模糊理论与工程丛书

模糊理论基础

（第二版）

胡宝清 编著



武汉大学出版社

WUHAN UNIVERSITY PRESS

·模糊理论与工程丛书·

- 责任编辑／李汉保
- 责任校对／刘　欣
- 版式设计／支　笛
- 封面设计／涂　驰

ISBN 978-7-307-07676-1



定价：56.00元

国家自然科学基金资助项目（70771081）成果
国家重点基础研究发展计划（973计划）资助项目（2007CB310804）成果

模糊理论与工程丛书

模糊理论基础

（第二版）

胡宝清 编著



WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社



图书在版编目(CIP)数据

模糊理论基础/胡宝清编著 .—2 版.—武汉：武汉大学出版社，2010.6
模糊理论与工程丛书
ISBN 978-7-307-07676-1

Ⅰ.模… Ⅱ.胡… Ⅲ.模糊集理论 Ⅳ.O159

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 051628 号

责任编辑:李汉保　　责任校对:刘　欣　　版式设计:支　笛

出版发行：**武汉大学出版社** (430072 武昌 珞珈山)
(电子邮件：cbs22@whu.edu.cn 网址：www.wdp.com.cn)
印刷：湖北恒泰印务有限公司
开本：720×1000　1/16　印张:41.75　字数:764 千字　插页:1
版次：2004 年 9 月第 1 版　　2010 年 6 月第 2 版
　　2010 年 6 月第 2 版第 1 次印刷
ISBN 978-7-307-07676-1/O · 421　　定价:56.00 元

模糊理论与工程系列丛书编委会

内容简介

本书系统地介绍了模糊集理论及其应用的基本原理与基本方法。全书共分15章，内容包括模糊集理论的三个基本概念——模糊集合、模糊关系、模糊隶属函数；模糊集理论的三大基本原理——分解定理、表现定理和扩张原理；模糊集理论的三个基本应用——模糊聚类分析、模糊模式识别和模糊综合评判；模糊集理论的三大热门专题——模糊决策理论、模糊逻辑系统、模糊测度理论。书中阐述的重要概念附有英文对照，便于读者对相关英文文献的检索；每章后附有小结，便于读者对最新研究成果的追踪；书后附有符号说明和名称索引，便于读者阅读方便；大量的参考文献便于读者进一步阅读。

本书可以作为大专院校高年级本科生、研究生的教材或教学参考书，也可以作为从事模糊集理论与应用研究的工程技术人员和广大教师的参考书。

作者简介

胡宝清，男，1962年3月出生于湖北仙桃，武汉大学数学与统计学院教授、博士生导师。1982年获得学士学位，学习基础数学。1987年获得硕士学位，主攻专业为模糊数学。2001年获得武汉大学博士学位。2003年9月至2004年3月作为访问教授前往澳大利亚西澳大学进行为期半年的访问学习。多次前往香港城市大学与香港理工大学进行合作研究。1997年后被聘为武汉大学教授，是信息与计算科学学科的学术带头人之一，兼任武汉大学数学与统计学院信息与计算科学系主任、中国系统工程学会模糊数学与模糊系统专业委员会常务理事兼教育与普及工作委员会主任、《模糊系统与数学》杂志编委、中国运筹学会模糊信息与工程分会常务理事、中国计算数学学会理事、中国人工智能学会理事等职。胡宝清教授长期从事智能计算与不确定性信息处理及其应用研究。主持国家自然科学基金项目、国家教育部骨干教师计划基金项目，参加国家973项目、国家"八五"攻关项目、国家教育部博士学科点基金项目、香港政府研究资助局项目等十多项科研项目。参加的东北电网水库调度自动化系统的合作项目达到国际先进水平，主持其中的实用化软件开发达到国际领先水平。在国内外重要学术刊物发表学术论文80余篇，其中收录于三大检索的论文22篇。

（E-mail：bqhu@whu.edu.cn）

序

1965 年,美国计算机与控制论专家 L. A. Zadeh 教授发表了题为《Fuzzy Sets》的论文,从而宣告模糊数学的诞生。他提出了 Fuzzy 集概念,创造了研究模糊性或不确定性问题的理论方法,迄今已成为一个较为完善的数学分支。

四十多年来,模糊理论与技术得到了迅猛发展,国内外学者在这个领域做了大量卓有成效的工作,其中许多探索是具有突破性的。模糊理论与技术一个突出的优点就是能较好地描述与仿效人的思维方式,总结和反映人的体会与经验,对复杂事物和系统可以进行模糊度量、模糊识别、模糊推理、模糊控制与模糊决策。尤其是模糊理论与人工智能在神经网络和专家系统等方面相互结合的研究已涉及计算机、多媒体、自动控制以及信息采集与处理等一系列高新技术的开发与利用,有力地推动了应用科学、决策科学、管理科学与社会科学的进步。在图像识别、人工智能、自动控制、信息处理、经济学、心理学、社会学、生态学、语言学、管理科学、医疗诊断、哲学研究等领域中,都得到广泛应用。

国际上,自 1980 年以来,每年均有数十次大中小型国际会议,并于 1984 年 7 月成立了国际模糊系统学会(IFSA——The International Fuzzy Systems Association),办有权威性的国际性杂志《Fuzzy Sets and Systems》,其后又有国际性杂志相继创刊,如《International Journal of Fuzzy Mathematics》、《IEEE Transaction on Fuzzy Systems》、《International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems》、《Advances in Fuzzy Mathematics》、《Advances in Fuzzy Sets and Systems》、《Advances in Fuzzy Systems》等。在我国,于 1983 年成立了模糊数学学会,从 1981 年起先后办有《模糊数学》、《模糊系统与数学》、《Fuzzy Information and Engineering》杂志。

为了系统地归纳总结模糊理论与技术的学术成就,系统地向广大读者介绍模糊数学的基础理论与基本知识,进一步推动该学科的发展,我们经过多年的酝酿、策划与探索,决定组织出版"模糊理论与工程系列丛书"。这套系列丛书中的大部分书籍既可以作为理工类本科生、硕士生和博士生的教材,也可以作为高等院校教师、相关科技工作者和模糊理论爱好者的参考读本。

"模糊理论与工程系列丛书"能够顺利出版主要得益于两方面的大力支持:

其一，得益于我国模糊数学界广大专家、学者的支持。王国俊教授、吴从炘教授、应明生教授、张文修教授、罗懋康教授等，在表示支持组织出版该丛书的同时，对该丛书的理论框架、选题定位以及一些具体操作细节上提出了许多宝贵的指导性意见。特别值得提及的是，得到了刘应明院士以及广大专家、学者的大力支持，组织了以刘应明院士为名誉主编的本系列丛书编委会。组织这个编委会的目的一是对该丛书的指导思想、选题思路以及今后的趋势将经常听取编委会的意见；二是对本系列丛书中拟将出版的每一本书都要由相关编委审核把关，尔后付梓，以确保丛书质量。

其二，得益于全国优秀出版社武汉大学出版社的大力支持。武汉大学出版社社长、总编与相关编辑对本系列丛书的出版给予了大力支持，多年来他们做了许多深入细致的工作，使这套系列丛书的第一批作品得以顺利出版。

在此，丛书编委会代表本系列丛书的全体作者，对各位专家、学者以及武汉大学出版社的领导与编辑表示由衷的感谢！真诚地希望广大专家、学者对本系列丛书提出宝贵的意见，使之日臻完善；热忱地欢迎广大专家、学者积极参与本丛书的编撰工作，使之日渐丰富。组织出版这套系列丛书本身就是一项系统工程。需要各位专家、学者以及方方面面的鼎力相助。倘若这套系列丛书能对广大读者有所裨益，能在浩瀚的书海中泛起一片闪光的涟漪，作为丛书编委会，我们就喜出望外了。

模糊理论与工程系列丛书编委会

2010年2月于武汉大学

前　言

自从罗特夫·扎德(Lotfi Zadeh)博士于1965年在《信息与控制》杂志上发表一篇开创性论文《模糊集合》以后，模糊集理论引起了学术界的高度关注，从此模糊集理论走过了一段长长的历程。从模糊集的提出到粗糙集的引入，从模糊逻辑的发展到软计算(soft computing)的形成，模糊集理论已遍地开花。特别是模糊逻辑技术在日本的成功应用，使得美国开始重视模糊逻辑。1989年，Frost & Sullivan国际营销研究结构提出，鉴于模糊逻辑技术产业的年增长率高达20%，该技术将成为21世纪的全球最热门的十大技术之一。全美技术信息服务中心(NTIS)在1990年和1991年对与美国攸关的外国技术作的意见表明模糊逻辑技术对未来将有重大的影响。模糊逻辑技术越来越成为解决当今复杂问题的一种实用手段。

迄今为止，国内外关于模糊集理论及其应用的学术专著不计其数，但这些书要么是针对某一数学理论问题，要么是针对某一应用专题；要么过于理论作抽象描述，要么过于粗略作简单介绍。由于各自的研究目的和撰写角度不同，对模糊集理论的基础，特别是应用基础，进行综合性与系统性介绍的书还不多。作者想借武汉大学出版社组织出版模糊理论与工程系列丛书之契机，向读者提供一本较完整地介绍模糊理论基础的书。

本书系统地介绍了模糊集理论及其应用的基本原理与基本方法。全书共分14章，内容包括模糊集理论的三个基本概念——模糊集合(第1章)、模糊关系(第3、7章)、模糊隶属函数(第1、8章)；模糊集理论的三大基本原理——分解定理、表现定理和扩张原理(第2章)；模糊集理论的三个基本应用——模糊聚类分析(第4章)、模糊模式识别(第5章)和模糊综合评判(第6章)；模糊集理论的三大热门专题——模糊决策理论(第9、14章)、模糊逻辑系统(第10、11章)、模糊测度理论(第12、13章)。

本书具有以下特点：

第一，重基础。对Fuzzy集理论的基础问题，特别是应用基础，进行了重点介绍。

第二，重方法。对于某些关键问题给出多种算法，并给出程序化步骤，便于

工程应用人员上机实现。

第三,重拓展。给出了 Fuzzy 集和 Fuzzy 算子的各种推广形式,为多种模型的选择提供了理论基础。三角模算子与区间值穿插全书,关于 Fuzzy 值与格值的推广也有介绍。

第四,重实用。书中重要概念附有中、英文对照,便于读者对相关英文文献的模糊检索;书中某些定义、定理和例子等标明出处,便于读者查寻其背景与详细内容;书中不同章节里再次出现的概念和方法注明出处,便于读者选择性阅读;每章后附有小节,便于读者对最新研究成果的追踪;书后附有符号说明和名称索引,便于读者阅读;书后的参考文献以字典序排列,便于读者对文献的查阅。

本书得到包括刘应明院士在内的模糊理论与工程系列丛书编委会所有成员和包括应明生教授在内的中国系统工程学会模糊数学与模糊系统专业委员会诸委员的热忱支持,给作者以极大的鼓舞。武汉大学数学与统计学院的亲切关怀,给作者以极大的鞭策。武汉大学出版社的无私帮助,给作者以莫大的安慰。丰富的文献与专著的引入,使本书生辉。在此一并致谢!

倘若该书能对那些对模糊集感到神秘而又无从下手的朋友、想从事模糊集应用研究而又苦于理论贫乏的朋友有所帮助,作者就感到欣慰了,也不会枉费初衷。由于作者才疏学浅,错误与纰漏在所难免,诚望广大读者批评斧正。

胡宝清

2004 年 5 月于武汉珞珈山

前 言(第二版)

《模糊理论基础》(第一版)已出版六年了,六年来得到了广大读者的钟爱和支持,应读者要求在第一版的基础上做了全面的修改。除了修正一些错误和不妥之处以外,还进行了下列调整。

1. 去掉了第 1 章§1.5 中关于粗糙集的内容,并将其更详细描述与可信性理论一起作为第 15 章——Fuzzy 集理论的若干相关理论。

2. 第 1 章由 t-模与 t-余模满足结合律直接引出 n 维 t-模与 n 维 t-余模。增加了 t-模的生成子、S-蕴涵算子、Q-蕴涵算子、Fuzzy 集的整数基数和标量基数、Fuzzy 集的距离与 Genuine 集。

3. 在第 2 章中将区间数及其运算放在 Fuzzy 数之前。将第 14 章中关于三角 Fuzzy 数和对称 Fuzzy 数的数乘与加法运算放在一般 Fuzzy 数运算之后。增加了 Fuzzy 自然数和 Fuzzy 基数、扩张极大与扩张极小运算。

4. 第 3 章中将 Fuzzy 矩阵调整到 Fuzzy 关系的复合之前,Fuzzy 关系的投影与截影单独作为一节。

5. 第 4 章§4.3 中增加了聚类效果的检验与目标函数的改进。

6. 第 5 章中以单特征模式与多特征模式进行分类。

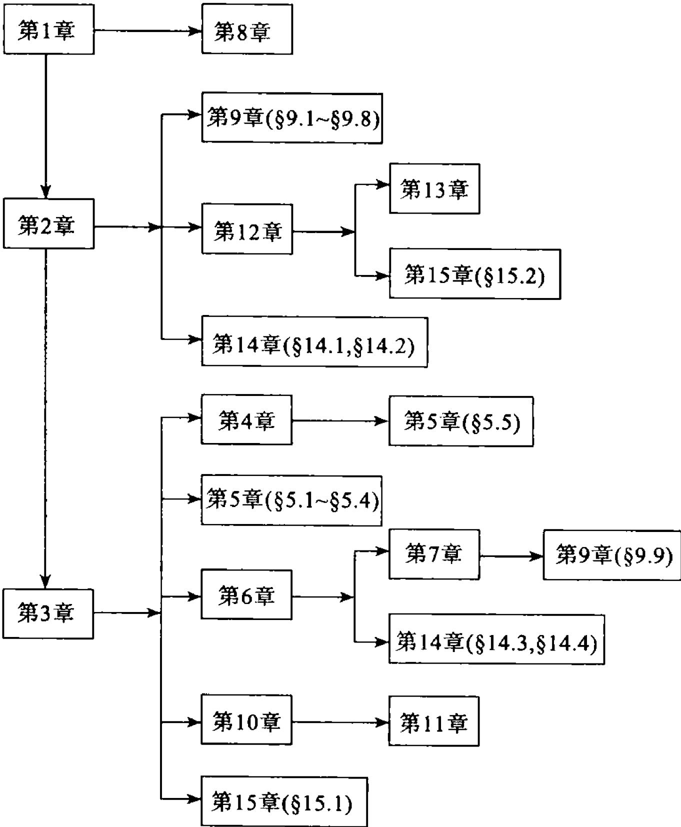
7. 第 8 章中增加了层次分析法。

本书第二版保持了第一版重基础、重方法、重拓展、重实用的风格与特点,增加和调整了部分内容,使该书内容更加丰满和系统。虽然如此,仍然会存在错误与纰漏,诚望广大读者继续批评斧正。

胡宝清

2010 年 2 月于武汉珞珈山

本书阅读建议


第1章
第8章
第9章(§9.1~§9.8)
第13章
第2章
第12章
第15章(§15.2)
第14章(§14.1,§14.2)
第4章
第5章(§5.5)
第5章(§5.1~§5.4)
第7章
第9章(§9.9)
第6章
第3章
第14章(§14.3,§14.4)
第10章
第11章
第15章(§15.1)

目　录

第 1 章　Fuzzy 集合及其运算

19 世纪末，德国数学家 G. Cantor 首创集合论，对于数学基础的奠定有着重大贡献. 1965 年美国计算机与控制论专家 L. A. Zadeh 第一次提出了 Fuzzy 集概念，对 Cantor 集合理论作了有益的推广，迄今已形成一个较为完善的数学分支，且在许多领域中获得了卓有成效的应用，特别以模糊推理为核心的人工智能技术，在许多领域取得了明显的成果和经济效益. 本章主要介绍 Fuzzy 集的定义与运算、Fuzzy 性的度量和 Fuzzy 集的各种推广.

§1.1　Fuzzy 集的定义与表示法

对于一个经典集合 A，空间中任一元素 x，要么 $x \in A$，要么 $x \overline{\in} A$，二者必居其一. 这一特征可以用一个函数表示为

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \overline{\in} A \end{cases}$$

$\chi_A(x)$ 即为集合 A 的特征函数. 将特征函数推广到 Fuzzy 集，在经典集合中只取 0，1 两值推广到 Fuzzy 集中为区间[0，1].

定义 1.1.1　设 $\widetilde{A}$ 是论域 X 到[0，1]的一个映射，即

$$\widetilde{A}: X \to [0,1],\ x \mapsto \widetilde{A}(x)$$

称 $\widetilde{A}$ 是 X 上的 Fuzzy 集，$\widetilde{A}(x)$ 称为 Fuzzy 集 $\widetilde{A}$ 的隶属函数(membership function)(或称为 x 对 Fuzzy 集 $\widetilde{A}$ 的隶属度(degree of membership)).

Fuzzy 集的思想既简单又自然，下面的例子可以帮助我们理解 Fuzzy 集的思想.

例 1.1.1　(Tizhoosh，1997) 我们想定义一个"黑色"集合，如图 1.1.1 所示. 在经典集合理论中，我们必须确定一个阈值，比如灰度 100. 所有灰度在 0 到 100 的是"黑色"的元素，其他的不属于这一集合(见图 1.1.1(a)). 但黑色是一定程度的灰色，所以用 Fuzzy 集能更好地描述这一特征. 定义这样的集合我

们需要两个阈值，比如灰度 50 和 150. 灰度小于 50 的完全属于“黑色”集合，灰度大于 150 的完全不属于该集合. 而灰度介于 50 到 150 之间的是部分属于该集合(见图 1.1.1(b)).

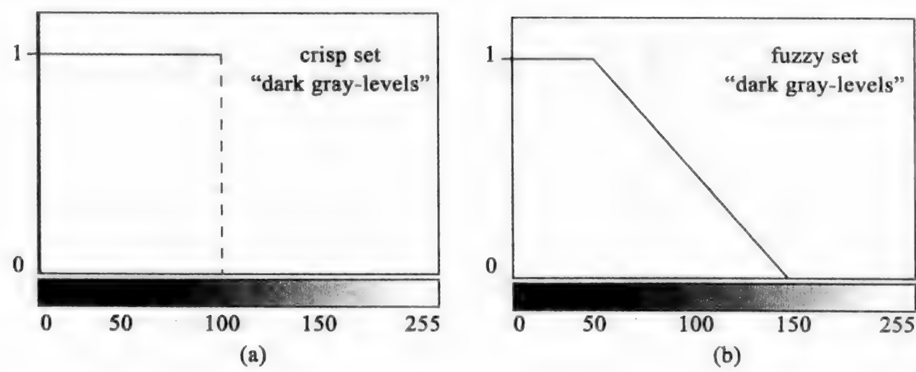


图 1.1.1 “黑色”的经典集与 Fuzzy 集

例 1.1.2 图 1.1.2 用经典方法描述了一个房间的温度集合:“冷”(cold)、“凉”(cool)、“暖”(warm)和“热”(hot).

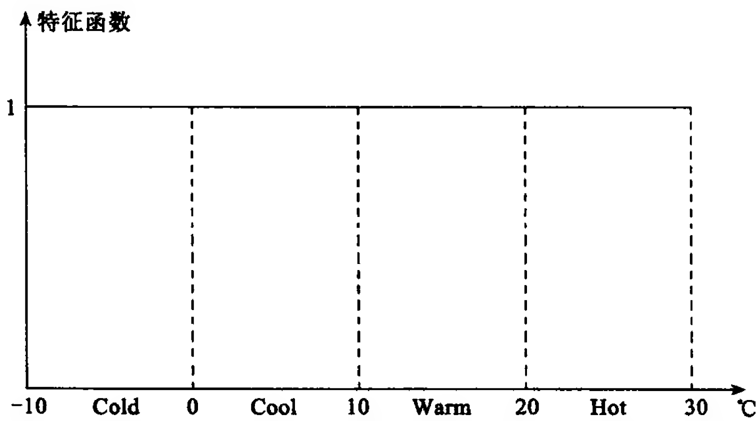


图 1.1.2 一个房间的温度“冷”(cold)、“凉”(cool)、“暖”(warm)和“热”(hot)的 cantor 集

从图 1.1.2 中能清楚地看到经典集合最明显的限制特征是它们相互排斥的. 很显然，这没有精确定义从一个量到另一个量的过渡，如从“warm”到“hot”. 在现实世界中存在一个从“warm”到“hot”的光滑变化.

这一自然现象可以通过 Fuzzy 集来精确描述. 图 1.1.3 表示了定量相同信

息的 Fuzzy 集如何描述自然变化.

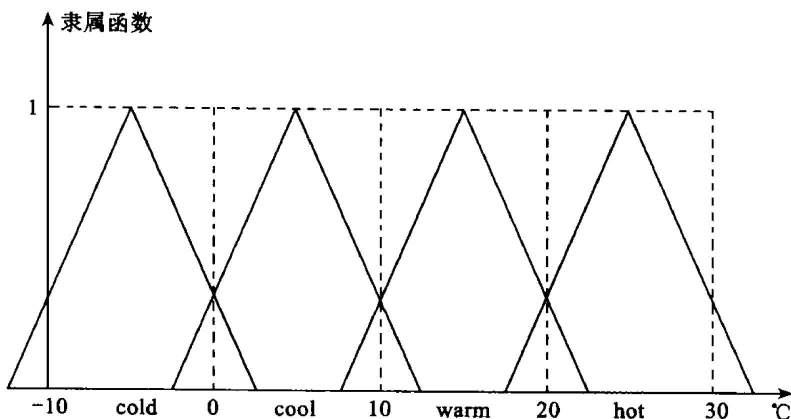


图 1.1.3 一个房间的温度"冷"(cold)、"凉"(cool)、"暖"(warm)和"热"(hot)的 Fuzzy 集

例 1.1.3 若给 5 个同学 x_1, x_2, x_3, x_4 和 x_5 的性格稳重程度打分,按百分制给分,再除以 100,这样给定了一个从论域 $X=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ 到闭区间[0,1]的映射 $\widetilde{A}$.

$$x_1: 85 \text{ 分,即 } \widetilde{A}(x_1)=0.85$$

$$x_2: 75 \text{ 分,即 } \widetilde{A}(x_2)=0.75$$

$$x_3: 98 \text{ 分,即 } \widetilde{A}(x_3)=0.98$$

$$x_4: 30 \text{ 分,即 } \widetilde{A}(x_4)=0.30$$

$$x_5: 60 \text{ 分,即 } \widetilde{A}(x_5)=0.60$$

这样确定出一个 Fuzzy 集 $\widetilde{A}$. □

例 1.1.4 设论域 $X=[0, 100]$, Fuzzy 集 $\widetilde{A}$ 表示"年老", $\widetilde{B}$ 表示"年轻". Zadeh 给出 $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ 的隶属函数分别为

$$\widetilde{A}(x)=\begin{cases} 0, & 0 \leqslant x \leqslant 50 \\ \left(1+\left(\dfrac{x-50}{5}\right)^{-2}\right)^{-1}, & 50 < x \leqslant 100 \end{cases}$$

$$\widetilde{B}(x)=\begin{cases} 1, & 0 \leqslant x \leqslant 25 \\ \left(1+\left(\dfrac{x-25}{5}\right)^{2}\right)^{-1}, & 25 < x \leqslant 100 \end{cases}$$

相应的曲线如图 1.1.4 所示.

$\widetilde{A}(70) \approx 0.94$, 即"70 岁"属于"年老"的程度为 0.94. 又易知 $\widetilde{A}(60)=0.8$, $\widetilde{B}(60)=0.02$, 故可以认为"60 岁"是"较老的". □

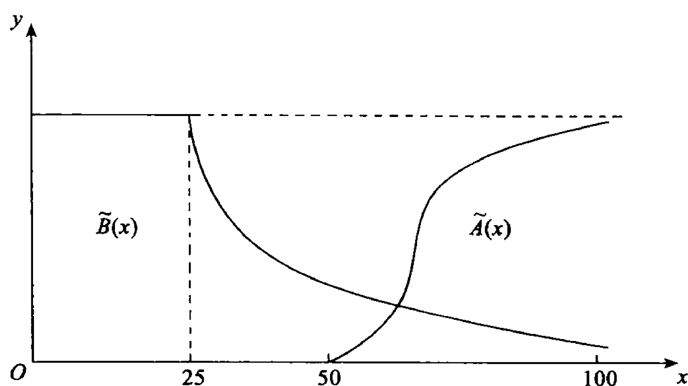


图 1.1.4 “年老”、“年轻”的隶属函数曲线

例 1.1.5 设论域 $X=(0, 2.00]$，用 $\widetilde{A}$ 表示“高个子男人”的集，并认为身高为 1.80m 以上的男人必为高个子，而身高在 1.60m 以下的男人都不是高个子. 用 x 表示某男人的身高，并给出 $\widetilde{A}$ 的隶属函数如下

$$\widetilde{A}(x)=\begin{cases}0, & 0<x<1.60\\ 2\left(\dfrac{x-1.60}{0.2}\right)^2, & 1.60\leqslant x<1.70\\ 1-2\left(\dfrac{x-1.80}{0.2}\right)^2, & 1.70\leqslant x<1.80\\ 1, & 1.80\leqslant x\leqslant 2.00\end{cases}$$

取 x 分别等于 1.65，1.70，1.75，则 $\widetilde{A}(x)$ 分别等于 0.125，0.50，0.875，即身高为 1.65m，1.70m，1.75m 的男人，分别以 0.125，0.50，0.875 的程度属于高个子男人. $\widetilde{A}$ 是“高个子男人”对应的 Fuzzy 集，其相应的曲线如图 1.1.5 所示.

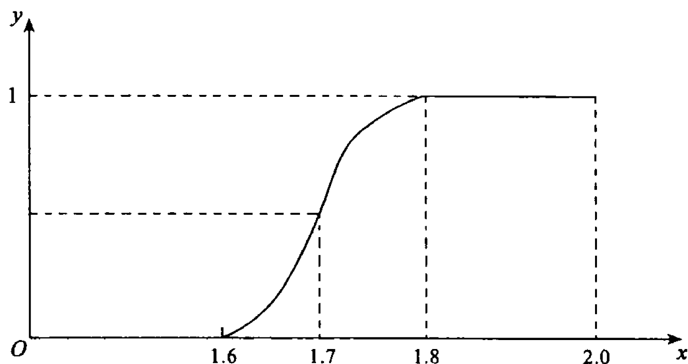


图 1.1.5 “高个子男人”的隶属函数曲线

X 上的全体 Fuzzy 集所构成的集合记为 $\mathscr{F}(X)$. 如果 $\widetilde{A} \in \mathscr{F}(X)$，且 $\widetilde{A}: X \to \{0,1\}$，则 $\widetilde{A}$ 为经典集，即 $\widetilde{A} \in \mathscr{P}(X)$，从而经典集也可以视为 Fuzzy 集的特例. 也就是说，经典集 A 与特征函数 $\chi_A(x)$ 分别是 Fuzzy 集与隶属函数的特例. 反之，Fuzzy 集 $\widetilde{A}$ 与隶属函数 $\widetilde{A}(x)$ 是经典集与特征函数的推广.

为了书写方便起见，在不混淆的情况下，后面将不加说明地省去 Fuzzy 集 $\widetilde{A}$ 上面的"～"而简写成 A.

对于 Fuzzy 集合，有下列不同的表示方法：

1. Fuzzy 集可以表述为

$$A = \{(x, A(x)) \mid x \in X\} \tag{1.1.1}$$

称这种表示法为序对表示法.

例 1.1.6　(1) A ="比 10 大得多的数"(如图 1.1.6 所示)

$$A = \{(x, A(x)) \mid x \in \mathbf{R}\}$$

其中

$$A(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 10 \\ (1 + (x - 10)^{-2})^{-1}, & x > 10 \end{cases}.$$

(2) B ="接近 10 的数"(如图 1.1.6 所示)

$$B = \{(x, B(x)) \mid B(x) = (1 + (x - 10)^2)^{-1}, x \in \mathbf{R}\}.$$

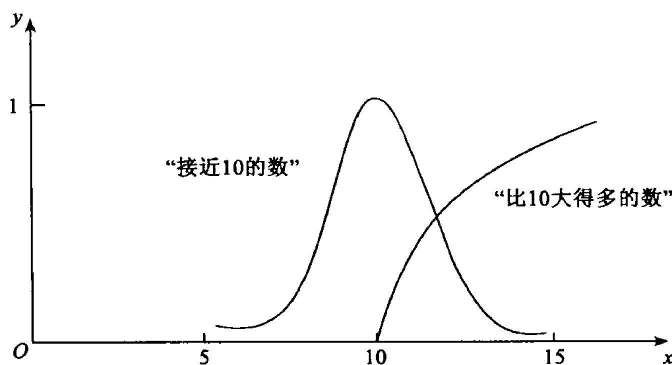


图 1.1.6　"比 10 大得多的数"与"接近 10 的数"的隶属函数曲线

2. 单独由隶属函数表示 Fuzzy 集.

例 1.1.7　$A(x) = (1 + (x - 10)^2)^{-1}$ 是 Fuzzy 集"接近 10 的数".

3. 若 X 为有限集 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$，则 $A \in \mathscr{F}(X)$ 可以表示为

$$A = \frac{A(x_1)}{x_1} + \frac{A(x_2)}{x_2} + \cdots + \frac{A(x_n)}{x_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{A(x_i)}{x_i} \tag{1.1.2}$$

或 $$A=(A(x_1),A(x_2),\cdots,A(x_n)) \tag{1.1.3}$$
称式(1.1.2)为Zadeh表示法，称式(1.1.3)为向量表示法；若 X 为无限集，Zadeh使用记号
$$A=\int_X \frac{A(x)}{x} \tag{1.1.4}$$
值得注意的是，这里的 $\int$，$\sum$ 并不是普通意义下的积分号与和号. 习惯上，如果 $A(x)=0$，则 A 的表示式中对应的项省去不写. 若 X 是无限集，而 $\{A(x)\mid x\in X\}$ 中的非零项只有有限个，如 $A(x_{i_1}),A(x_{i_2}),\cdots,A(x_{i_k})(x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_k}\in X)$，则此时也用
$$\frac{A(x_{i_1})}{x_{i_1}}+\frac{A(x_{i_2})}{x_{i_2}}+\cdots+\frac{A(x_{i_k})}{x_{i_k}}$$
来表示Fuzzy集 A.

例 1.1.8 (1)设论域为 $\mathbf{N}$，则
$$A=\text{“接近 10 的正整数”}=\frac{0.1}{7}+\frac{0.5}{8}+\frac{0.8}{9}+\frac{1}{10}+\frac{0.8}{11}+\frac{0.5}{12}+\frac{0.1}{13};$$
设论域为 $\mathbf{R}$，则
$$B=\text{“接近 10 的数”}=\int_{\mathbf{R}}\frac{1}{1+(x-10)^2}\Big/x$$
(2)例1.1.4中的“年老”和“年轻”可以表示为
$$\text{“年老”}=\int_{50}^{100}\left[1+\left(\frac{x-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1}\Big/x$$
$$\text{“年轻”}=\int_0^{25}\frac{1}{x}+\int_{50}^{100}\left[1+\left(\frac{x-25}{5}\right)^{2}\right]^{-1}\Big/x.$$
□

定义 1.1.2 设 $A\in\mathscr{F}(X)$，记
$$\mathrm{supp}A\triangleq\{x\mid x\in X,A(x)>0\} \tag{1.1.5}$$
$$\mathrm{ker}A\triangleq\{x\mid x\in X,A(x)=1\} \tag{1.1.6}$$
$$\mathrm{cross}A\triangleq\{x\mid x\in X,A(x)=0.5\} \tag{1.1.7}$$
分别称 $\mathrm{supp}A$、$\mathrm{ker}A$ 和 $\mathrm{cross}A$ 为 A 的支集(support)、核(kernel)与交叉点(crossover point). $\mathrm{supp}A\backslash\mathrm{ker}A$ 称为 A 的边界(boundary). 如果 $\mathrm{supp}A$ 是 X 上的有限集，则称 A 为有限Fuzzy集(finite fuzzy set). 空集 $\varnothing$ 看成一个特殊的有限Fuzzy集. 如果 $\mathrm{supp}A$ 是 X 上的有界集，则称 A 为有界Fuzzy集(bounded fuzzy set). 当 $\mathrm{ker}A\neq\varnothing$ 时，称 A 为正规Fuzzy集(normal fuzzy set). X 上的全体有限Fuzzy集、全体有界Fuzzy集与全体正规Fuzzy集分别记为 $\mathscr{F}\mathscr{F}(X)$、$\mathscr{F}\mathscr{B}(X)$ 和 $\mathscr{F}\mathscr{N}(X)$. 支集为单点集的Fuzzy集称为Fuzzy点(fuzzy singleton or

singleton). 在不混淆的情况下，支点为单点集 $\{a\}$ 的 Fuzzy 点记为 λ/a 或 $\lambda_{\{a\}}$ $(0<\lambda\leqslant 1)$，即

$$(\lambda/a)(x)=\begin{cases}\lambda, & x=a\\ 0, & x\neq a\end{cases} \tag{1.1.8}$$

一般地，对于 $A\subseteq X$，Fuzzy 集 λ_A $(0<\lambda\leqslant 1)$ 定义为

$$\lambda_A(x)=\begin{cases}\lambda, & x\in A\\ 0, & x\overline{\in} A\end{cases} \tag{1.1.9}$$

例 1.1.9 设 $X=\{1,2,\cdots,9\}$，且

$$A=\text{“接近 5 的自然数”}=\frac{0.2}{2}+\frac{0.5}{3}+\frac{0.9}{4}+\frac{1}{5}+\frac{0.9}{6}+\frac{0.5}{7}+\frac{0.2}{8}$$

则

$$\mathrm{supp}A=\{2,3,4,5,6,7,8\}$$
$$\ker A=\{5\}$$
$$\mathrm{supp}A\backslash\ker A=\{2,3,4,6,7,8\}$$
$$\mathrm{cross}A=\{3,7\}.$$

由此我们知道 A 是 $\mathbf{N}$ 上有限正规 Fuzzy 集. □

§1.2 Fuzzy 集的基本运算与性质

同经典集合一样，下面来研究 Fuzzy 集之间的序关系及其运算.

定义 1.2.1 设 $A,B\in\mathscr{F}(X)$，若 $\forall x\in X, A(x)\leqslant B(x)$，则称 B 包含 A，或 A 被包含于 B，并记为 $A\subseteq B$，或 $B\supseteq A$；而 $\forall x\in X, A(x)=B(x)$，则称 A 与 B 相等，记为 $A=B$. 若 $A\subseteq B$，但 $A\neq B$，则称 B 真包含 A，或 A 被真包含于 B，并记为 $A\subset B$，或 $B\supset A$.

今后用 $\varnothing$ 表示其隶属函数值恒为 0 的 Fuzzy 集，X 表示其隶属函数恒为 1 的 Fuzzy 集，即 $\varnothing(x)\equiv 0$，$X(x)\equiv 1$. 按照定义 1.2.1，下面的定理是显然的.

定理 1.2.1 设 $A,B,C\in\mathscr{F}(X)$，则下列各式成立：

(1)有界性 $\varnothing\subseteq A\subseteq X$；

(2)自反性 $A\subseteq A$；

(3)反对称性 $A\subseteq B$，$B\subseteq A\Rightarrow A=B$；

(4)传递性 $A\subseteq B$，$B\subseteq C\Rightarrow A\subseteq C$.

由定理 1.2.1 的(2)、(3)、(4)易知，$\subseteq$ 是 $\mathscr{F}(X)$ 上的一种偏序关系，从而 $(\mathscr{F}(X),\subseteq)$ 是一个偏序集.

下面用取大（$\vee$）和取小（$\wedge$）运算来定义 Fuzzy 集之间的各种运算. 符号 $\vee$，$\wedge$ 在模糊数学中常被称为 Zadeh 算子.

定义 1.2.2 设 $A,B \in \mathscr{F}(X)$，分别称 Fuzzy 集 $A \cup B$，$A \cap B$ 为 A 与 B 的并(union)和交(intersection)，而称 Fuzzy 集 A^c 为 A 的补集或余集(complement or negation). 其中 $\forall x \in X$，则

$$(A \cup B)(x) = \max\{A(x), B(x)\} = A(x) \vee B(x) \tag{1.2.1}$$

$$(A \cap B)(x) = \min\{A(x), B(x)\} = A(x) \wedge B(x) \tag{1.2.2}$$

$$(A^c)(x) = 1 - A(x) \tag{1.2.3}$$

为方便起见，对于 $a \in [0,1]$，记 $a^c \triangleq 1 - a$. 这时对 Fuzzy 集 A 的补集有

$$A^c(x) = (A(x))^c,\ x \in X.$$

Fuzzy 集的运算在其隶属函数的曲线上有清楚的反映(如图 1.2.1～图 1.2.4所示).

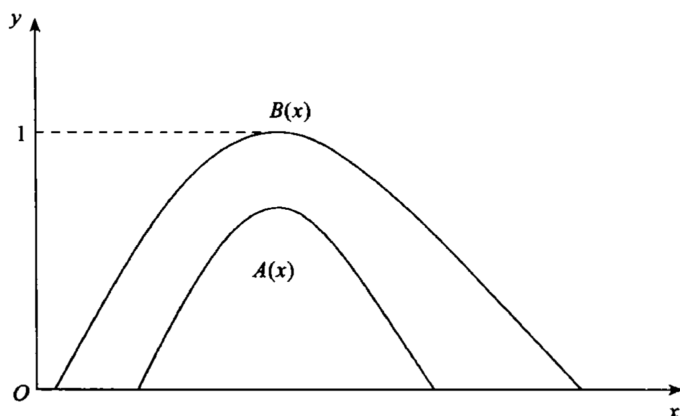


图 1.2.1 Fuzzy 集 A 与 B 包含关系 $A \subseteq B$

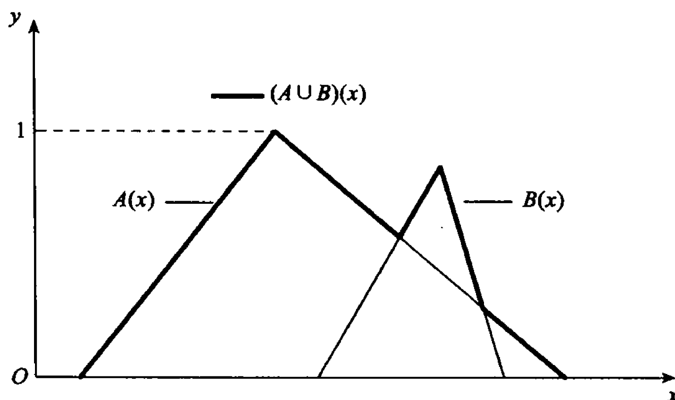


图 1.2.2 Fuzzy 集 A 与 B 的并关系 $A \cup B$

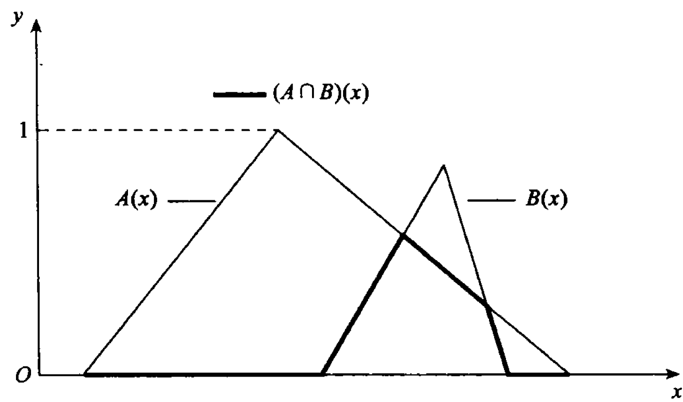


图 1.2.3　Fuzzy 集 A 与 B 的交关系 $A \cap B$

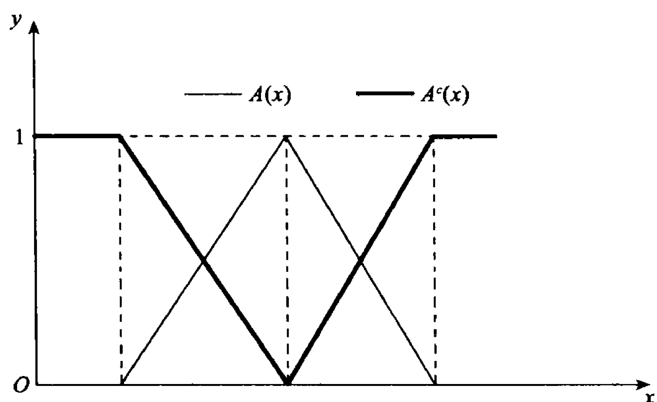


图 1.2.4　Fuzzy 集 A 的补集 A^c

显然，我们有 $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A$.

下面通过例子来说明这些运算.

例 1.2.1　一个房地产商想将销售给客户的商品房进行分类. 房子舒适如何的一个标志是其卧室的多少. 设 $X = \{1,2,3,4,5,6\}$ 是房子卧室数集. Fuzzy 集“对三口之家的舒适型房子”可以描述为

$$A = \{(1,\ 0.3),\ (2,\ 0.8),\ (3,\ 1),\ (4,\ 0.7),\ (5,\ 0.3)\}$$

Fuzzy 集“对三口之家的大面积型房子”可以描述为

$$B = \{(2,\ 0.4),\ (3,\ 0.6),\ (4,\ 0.8),\ (5,\ 1),\ (6,\ 1)\}$$

A 与 B 的并 $A \cup B = \{(1,\ 0.3),\ (2,\ 0.8),\ (3,\ 1),\ (4,\ 0.8),\ (5,\ 1),\ (6,$

1)}，表示“大或者舒适房子”.

A 与 B 的交 $A\cap B=\{(2,0.4),(3,0.6),(4,0.7),(5,0.3)\}$，表示“又大又舒适的房子”.

B 的补集 $B^c=\{(1,1),(2,0.6),(3,0.4),(4,0.2)\}$，表示“不大的房子”. □

例 1.2.2 假设 $A=$“比 10 大得多的数”和 $B=$“接近 11 的数”，并且

$$A=\{(x,A(x))\mid x\in\mathbf{R}\}$$

其中

$$A(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 10\\ (1+(x-10)^{-2})^{-1}, & x>10\end{cases}$$

$$B=\{(x,B(x))\mid x\in\mathbf{R}\}$$

其中

$$B(x)=(1+(x-11)^4)^{-1}$$

于是

$$(A\cup B)(x)=\begin{cases}\max\{(1+(x-10)^{-2})^{-1},(1+(x-11)^4)^{-1}\}, & x>10\\ (1+(x-11)^4)^{-1}, & x\leqslant 10\end{cases}$$

$$(A\cap B)(x)=\begin{cases}\min\{(1+(x-10)^{-2})^{-1},(1+(x-11)^4)^{-1}\}, & x>10\\ 0, & x\leqslant 10\end{cases}$$

其函数曲线如图 1.2.5 所示.

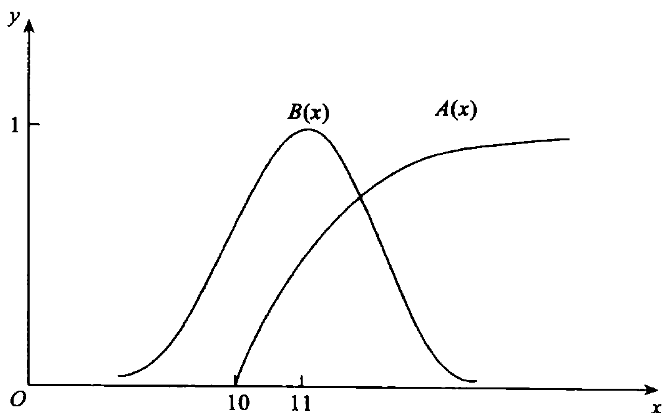


图 1.2.5 “比 10 大得多的数”和“接近 11 的数”的隶属函数曲线

例 1.2.3 如图 1.2.6 所示，a,b,c,d,e 是五个小块，它们组成论域 X.

$$A=\text{“圆块”}=\frac{1}{a}+\frac{0.75}{b}+\frac{0.5}{c}+\frac{0.25}{d}$$

$$B=\text{“方块”}=\frac{0.3}{b}+\frac{0.5}{c}+\frac{0.7}{d}+\frac{1}{e}$$

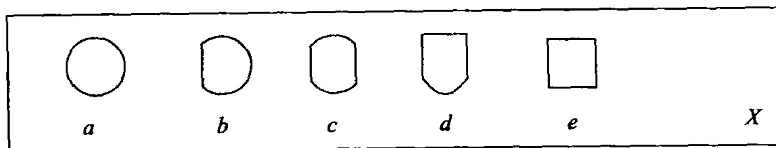


图 1.2.6　$X=\{a,b,c,d,e\}$

则　$A\cup B=\text{“或方或圆”}=\frac{1\vee 0}{a}+\frac{0.75\vee 0.3}{b}+\frac{0.5\vee 0.5}{c}+\frac{0.25\vee 0.7}{d}+\frac{0\vee 1}{e}$

$$=\frac{1}{a}+\frac{0.75}{b}+\frac{0.5}{c}+\frac{0.7}{d}+\frac{1}{e}$$

$$A\cap B=\text{“又方又圆”}=\frac{1\wedge 0}{a}+\frac{0.75\wedge 0.3}{b}+\frac{0.5\wedge 0.5}{c}+\frac{0.25\wedge 0.7}{d}+\frac{0\wedge 1}{e}$$

$$=\frac{0.3}{b}+\frac{0.5}{c}+\frac{0.25}{d}$$

$$A^c=\text{“不圆”}=\frac{1-1}{a}+\frac{1-0.75}{b}+\frac{1-0.5}{c}+\frac{1-0.25}{d}+\frac{1-0}{e}$$

$$=\frac{0.25}{b}+\frac{0.5}{c}+\frac{0.75}{d}+\frac{1}{e}$$

$$B^c=\text{“不方”}=\frac{1-0}{a}+\frac{1-0.3}{b}+\frac{1-0.5}{c}+\frac{1-0.7}{d}+\frac{1-1}{e}$$

$$=\frac{1}{a}+\frac{0.7}{b}+\frac{0.5}{c}+\frac{0.3}{d}$$

$$A^c\cap B^c=\text{“既不方又不圆”}=\frac{0\wedge 1}{a}+\frac{0.25\wedge 0.7}{b}+\frac{0.5\wedge 0.5}{c}+\frac{0.75\wedge 0.3}{d}+\frac{1\wedge 0}{e}$$

$$=\frac{0.25}{b}+\frac{0.5}{c}+\frac{0.3}{d}$$

□

下面将 Fuzzy 集的并、交运算推广到任意族 Fuzzy 集的情形.

设 T 为任意指标集，$A_t \in \mathscr{F}(X)(t \in T)$，则分别定义并 $\bigcup\limits_{t\in T} A_t$ 与交 $\bigcap\limits_{t\in T} A_t$ 如下

$$\left(\bigcup_{t\in T} A_t\right)(x) = \sup_{t\in T} A_t(x) = \bigvee_{t\in T} A_t(x) \tag{1.2.4}$$

$$\left(\bigcap_{t\in T} A_t\right)(x) = \inf_{t\in T} A_t(x) = \bigwedge_{t\in T} A_t(x) \tag{1.2.5}$$

这里，$\bigvee\limits_{t\in T} A_t(x)$（或 $\sup\limits_{t\in T} A_t(x)$），$\bigwedge\limits_{t\in T} A_t(x)$（或 $\inf\limits_{t\in T} A_t(x)$）分别为 $\{A_t(x) \mid t \in T\}$ 的上确界、下确界. 容易证明 $\bigcup\limits_{t\in T} A_t \in \mathscr{F}(X)$，$\bigcap\limits_{t\in T} A_t \in \mathscr{F}(X)$. 特别地，$A_n \in \mathscr{F}(X)$ $(n \in \mathbf{N})$，若 $A_n \subseteq A_{n+1}$ $(n \in \mathbf{N})$，则 $\bigcup\limits_{n\in \mathbf{N}} A_n = A$ 记为 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$，简记为 $A_n \nearrow A$. 若 $A_n \supseteq A_{n+1}$ $(n \in \mathbf{N})$，则 $\bigcap\limits_{n\in \mathbf{N}} A_n = A$ 记为 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$，简记为 $A_n \searrow A$.

定理 1.2.2 设 $A,B,C \in \mathscr{F}(X)$，则 $\mathscr{F}(X)$ 上的 $\cup$，$\cap$，c 运算具有下列运算规律：

(1)幂等律 $A \cup A = A$，$A \cap A = A$；

(2)交换律 $A \cup B = B \cup A$，$A \cap B = B \cap A$；

(3)结合律 $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$，$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$；

(4)分配律 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$，

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$；

(5)吸收律 $A \cup (A \cap B) = A$，$A \cap (A \cup B) = A$；

(6)复原律 $(A^c)^c = A$；

(7)0—1 律 $A \cup \varnothing = A$，$A \cap \varnothing = \varnothing$，

$A \cup X = X$，$A \cap X = A$；

(8)对偶律 $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$，$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

证明 只证分配律与对偶律，其余的读者可以自行证明.

(4)要证 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$，只需证明

$\forall x \in X, A(x) \vee (B(x) \wedge C(x)) = (A(x) \vee B(x)) \wedge (A(x) \vee C(x))$.

注意到 $\forall x \in X$，$A(x)$，$B(x)$，$C(x)$ 之间存在如下可能的 6 种大小关系，即

(i) $A(x) \geqslant B(x) \geqslant C(x)$ (ii) $A(x) \geqslant C(x) \geqslant B(x)$

(iii) $B(x) \geqslant A(x) \geqslant C(x)$ (iv) $B(x) \geqslant C(x) \geqslant A(x)$

(v) $C(x) \geqslant A(x) \geqslant B(x)$ (vi) $C(x) \geqslant B(x) \geqslant A(x)$

对于情形(i) $A(x) \vee (B(x) \wedge C(x)) = A(x) \vee C(x) = A(x)$

而　　$(A(x) \vee B(x)) \wedge (A(x) \vee C(x)) = A(x) \wedge A(x) = A(x)$

即对情形(i)结论是正确的，类似地证明对其他 5 种情形结论也都是正确的. 仿此证明分配律中第二式.

(8) $\forall x \in X$，有

$$(A \cup B)^c(x) = 1 - (A \cup B)(x) = 1 - (A(x) \vee B(x))$$
$$= (1 - A(x)) \wedge (1 - B(x)) = A^c(x) \wedge B^c(x)$$

故 $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$，同理可证，$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$. □

复原律也称为对合律，而对偶律也称为 De Morgan 律. 定理 1.2.2 中的 (4)，(8)可以推广到一般的情形，其证明方法也是类似的. 设 $B_t \in \mathscr{F}(X)$ $(t \in T)$，则有

(4′) $A \cup \left(\bigcap_{t \in T} B_t\right) = \bigcap_{t \in T} \left(A \cup B_t\right)$，$A \cap \left(\bigcup_{t \in T} B_t\right) = \bigcup_{t \in T} (A \cap B_t)$.

(8′) $\left(\bigcup_{t \in T} B_t\right)^c = \bigcap_{t \in T} B_t^c$，$\left(\bigcap_{t \in T} B\right)^c = \bigcup_{t \in T} B_t^c$.

通常把满足定理 1.2.2 中 8 条运算规律的代数系统称为软代数(soft algebra). 根据定理 1.2.2，$(\mathscr{F}(X), \cup, \cap, c)$构成一个软代数，或称之为 Fuzzy 格(fuzzy lattice).

与经典集合相比较，对 Fuzzy 集合，互补律不成立，即 $A \cup A^c = X$ (排中律)，$A \cap A^c = \varnothing$ (矛盾律)不真.

例 1.2.4　设 $\forall x \in X$，$A(x) = 0.5$，则 $A^c(x) \equiv 1 - 0.5 = 0.5$. 因此 $(A \cup A^c)(x) = (A \cap A^c)(x) \equiv 0.5$，即 $A \cup A^c \neq X$，$A \cap A^c \neq \varnothing$ $(X(x) \equiv 1$，$\varnothing(x) \equiv 0)$. □

这说明例 1.2.4 中 Fuzzy 集 A，以 A^c 作为 A 的补集时互补律不成立. 那么是否有其他的 B，以 B 作为 A 的补集而使互补律成立呢？回答是否定的.

定理 1.2.3　任取 Fuzzy 集 $A \in \mathscr{F}(X)$，若 $\exists x_0 \in X$，使 $A(x_0) = a \in (0,1)$，则对任意 $B \in \mathscr{F}(X)$，$A \cup B = X$，$A \cap B = \varnothing$ 至少有一个不成立.

证明　任取 $B \in \mathscr{F}(X)$，欲使 $A(x_0) \wedge B(x_0) = 0$，只有取 $B(x_0) = 0$，但这时 $A(x_0) \vee B(x_0) = a \neq 1$. 欲使 $A(x_0) \vee B(x_0) = 1$，只有取 $B(x_0) = 1$，而这时又有 $A(x_0) \wedge B(x_0) = a \neq 0$. 即对任意 $B \in \mathscr{F}(X)$，$A \cup B = X$，$A \cap B = \varnothing$ 至少有一个不成立. □

通常把满足互补律的软代数称为布尔代数 (Boolean algebra). 由上面的讨论，$(\mathscr{F}(X), \cup, \cap, c)$不构成布尔代数. 普通集代数$(\mathscr{P}(X), \cup, \cap, c)$构成布尔代数.

定义 1.2.3　设 $A, B \in \mathscr{F}(X)$，分别称 Fuzzy 集

$$A\backslash B \triangleq A \cap B^c \text{ 与 } A\Delta B \triangleq (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$$

为 A 与 B 的差(difference)和对称差(symmetric difference).

显然，$\forall x \in X$，有

$$A\backslash B(x) = A(x) \wedge (1 - B(x)) \tag{1.2.6}$$

$$A\Delta B(x) = (A(x) \wedge (1 - B(x))) \vee ((1 - A(x)) \wedge B(x)) \tag{1.2.7}$$

差与对称差具有下列性质.

定理 1.2.4 设 $A,B,C \in \mathscr{F}(X)$，则：

(1) $A\backslash(B \cup C) = (A\backslash B) \cap (A\backslash C) = A\backslash B\backslash C$,

$A\backslash(B \cap C) = (A\backslash B) \cup (A\backslash C)$;

(2) $A \cup (B\backslash A) = (A \cup B) \cap (A \cup A^c)$,

$A\backslash(A\backslash B) = (A \cap B) \cup (A \cap A^c)$;

(3) $A\Delta B = B\Delta A$;

(4) $A\Delta\varnothing = \varnothing\Delta A = A$;

(5) $A\Delta X = X\Delta A = A^c$;

(6) $(A\Delta B) \cup (A \cap B) \subseteq A \cup B$;

(7) $A\Delta A = A \cap A^c$.

§1.3 Fuzzy 算子与 Fuzzy 集的其他运算

Fuzzy 集是经典集的推广，经典集是 Fuzzy 集的特殊情形. 因此，在 Fuzzy 集上定义运算也可以视为经典集上相应运算的推广. §1.2 中在 Fuzzy 集上定义的 $\cup$，$\cap$，c 运算都是经典集上相应运算的推广. 但是这种推广并不是唯一的.

1.3.1 t-模与 t-余模

1. 定义与性质

Fuzzy 集的 $\cup$，$\cap$ 运算是用 $\vee$，$\wedge$ 算子定义的，这是迄今为止应用最为广泛的一对算子. 然而在实际应用中，用 $\vee$，$\wedge$ 算子处理模糊信息时，有时往往会由于遗失的信息太多而使得对于问题的处理脱离实际. Zadeh 一开始就注意到了这个事实，并且指出：有大量的理由说明，要根据具体的问题而选用不同的算子. 解决这个问题的有力工具是由 Menger(1942)提出的三角模(triangular norms). Bellman 与 Giertz(1973)在这个方面做了许多开创性的工作. 首先引入下面的定义.

定义 1.3.1 映射 $\top: [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$，如果 $\forall a,b,c,d \in [0,1]$ 满

足条件:

(1) 交换律 $\top(a,b)=\top(b,a)$;

(2) 结合律 $\top(\top(a,b),c)=\top(a,\top(b,c))$;

(3) 单调性 $a\leqslant c,\ b\leqslant d\Rightarrow \top(a,b)\leqslant \top(c,d)$;

(4) 边界条件 $\top(1,a)=a$.

则称$\top$为$[0,1]$上的 t-模(t-norm). $\top(a,b)$ 也可以写成 $a\top b$.

定义 1.3.2 映射 $\perp:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$, 如果 $\forall a,b,c,d\in[0,1]$ 满足条件:

(1) 交换律 $\perp(a,b)=\perp(b,a)$;

(2) 结合律 $\perp(\perp(a,b),c)=\perp(a,\perp(b,c))$;

(3) 单调性 $a\leqslant c,\ b\leqslant d\Rightarrow \perp(a,b)\leqslant\perp(c,d)$;

(4) 边界条件 $\perp(a,0)=a$.

则称 $\perp$ 为$[0,1]$上的 t-余模(t-conorm)或 s-模(s-norm). $\perp(a,b)$ 也可以写成 $a\perp b$.

$[0,1]$上的二元运算称为 Fuzzy 算子(fuzzy operator),t-模与 t-余模是$[0,1]$上的 Fuzzy算子.满足定义 1.3.1(定义 1.3.2)的条件(1)、(2)、(3)的 Fuzzy 算子称为$[0,1]$上的三角模(triangular norms). 当$[0,1]$上的 Fuzzy 算子为连续函数时,称其为连续的 Fuzzy 算子. 当 t-模与 t-余模为连续函数时,则分别称为连续的 t-模与连续的 t-余模. 如果连续的 t-模$\top$(连续的 t-余模 $\perp$)满足 $\forall a\in(0,1)$, $\top(a,a)<a$ ($\perp(a,a)>a$),则称$\top$($\perp$)是 Archimedean t-模(Archimedean t-余模)(Mayor and Torrens,1991).

例 1.3.1 对任意 $a,b\in[0,1]$, 令 $a\wedge b=\min\{a,b\}$, $a\vee b=\max\{a,b\}$. 易证 $\wedge$, $\vee$ 分别是$[0,1]$上的 t-模与 t-余模. $\vee$, $\wedge$ 常称为 Zadeh 算子, $\vee$, $\wedge$ 是 § 1.2 中用来定义 Fuzzy 集的 $\cup$, $\cap$ 运算的依据. 因此,t-模与 t-余模也可以视为 Zadeh 算子的推广.

下面是一些常见的算子:

(1)Drastic 和与 Drastic 积(Dubois、Prade,1980、1982)

$$a\nabla b=\begin{cases}b, & a=0\\ a, & b=0\\ 1, & ab\neq 0\end{cases}=\begin{cases}1, & a,b\in(0,1]\times(0,1],\\ \max\{a,b\}, & \text{其他}\end{cases}\tag{1.3.1}$$

$$a\Delta b=\begin{cases}b, & a=1\\ a, & b=1\\ 0, & a\neq 1\text{ 且 }b\neq 1\end{cases}=\begin{cases}0, & a,b\in[0,1)\times[0,1),\\ \min\{a,b\}, & \text{其他}\end{cases}\tag{1.3.2}$$

(2)代数和与代数积

$$a \hat{+} b = a + b - ab \tag{1.3.3}$$

$$a \hat{\cdot} b = ab \tag{1.3.4}$$

(3)有界和与有界积或Łukasiewicz (Giles,1976)

$$a \oplus b = \min\{a + b, 1\} \tag{1.3.5}$$

$$a \odot b = \max\{0, a + b - 1\} \tag{1.3.6}$$

(4)Einstein 和与 Einstein 积(Mizumoto,1982)

$$a \overset{+}{\varepsilon} b = \frac{a + b}{1 + ab} \tag{1.3.7}$$

$$a \dot{\varepsilon} b = \frac{ab}{1 + (1 - a)(1 - b)} \tag{1.3.8}$$

(5) Hamacher 和与 Hamacher 积 (Hamacher,1978)

$$a \overset{+}{\gamma} b = \frac{a \hat{+} b - (1 - \gamma)ab}{\gamma + (1 - \gamma)(1 - ab)} = \frac{a + b - (2 - \gamma)ab}{1 - (1 - \gamma)ab} \tag{1.3.9}$$

$$a \dot{\gamma} b = \frac{ab}{\gamma + (1 - \gamma)(a \hat{+} b)} = \frac{ab}{\gamma + (1 - \gamma)(a + b - ab)}, \gamma \in (0, +\infty) \tag{1.3.10}$$

当 $\gamma = 1$ 时，$(\overset{+}{\gamma}, \dot{\gamma})$化为 $(\hat{+}, \hat{\cdot})$；

当 $\gamma = 2$ 时，$(\overset{+}{\gamma}, \dot{\gamma})$ 化为 $(\overset{+}{\varepsilon}, \dot{\varepsilon})$.

(6) Yager (1980)

$$a \overset{+}{y} b = 1 \wedge (a^p + b^p)^{\frac{1}{p}}, p \in [1, +\infty) \tag{1.3.11}$$

$$a \dot{y} b = 1 - 1 \wedge [(1 - a)^p + (1 - b)^p]^{\frac{1}{p}}, p \in [1, +\infty) \tag{1.3.12}$$

当 $p = 1$ 时，$(\overset{+}{y}, \dot{y})$化为 $(\oplus, \odot)$；

当 $p \to +\infty$时，$(\overset{+}{y}, \dot{y})$化为 $(\vee, \wedge)$.

(7) Dubois and Prade (1980, 1982)

$$a \overset{+}{p} b = \frac{a + b - ab - \min\{a, b, 1 - p\}}{\max\{1 - a, 1 - b, p\}} = 1 - \frac{(1 - a)(1 - b)}{\max\{1 - a, 1 - b, p\}} \tag{1.3.13}$$

$$a \dot{p} b = \frac{ab}{\max\{a, b, p\}}, p \in (0, 1] \tag{1.3.14}$$

当 $p = 1$ 时，$(\overset{+}{p}, \dot{p})$化为 $(\hat{+}, \hat{\cdot})$.

(8) Weber (1983)

$$a \overset{+}{\omega} b = \min\left\{1, a + b - \frac{\omega}{1 + \omega} ab\right\} \tag{1.3.15}$$

$$a \dot{\omega} b = \max\left\{0, \frac{a + b + \omega ab - 1}{1 + \omega}\right\}, \omega \in (-1, +\infty) \tag{1.3.16}$$

当 $\omega=0$ 时，$(\overset{+}{\omega},\dot{\omega})$ 化为 $(\oplus,\odot)$. □

定理 1.3.1 算子 Δ, $\hat{\cdot}$, $\odot$, $\dot{\varepsilon}$, $\dot{\gamma}$, $\dot{y}$, $\dot{p}$, $\dot{\omega}$ 为[0,1]上的 t-模，算子 ∇, $\hat{+}$, $\oplus$, $\overset{+}{\varepsilon}$, $\overset{+}{\gamma}$, $\overset{+}{y}$, $\overset{+}{p}$, $\overset{+}{\omega}$ 为[0,1]上的 t-余模.

证明 只证 Einstein 算子，其他算子同样可证.

由定义易见，$\forall a,b\in[0,1]$, $a\dot{\varepsilon}b=b\dot{\varepsilon}a$.

$\forall a,b,c,d\in[0,1], a\leqslant c, b\leqslant d\Rightarrow ab\leqslant cd, (1-a)(1-b)\geqslant(1-c)(1-d)$

$$\Rightarrow\frac{ab}{1+(1-a)(1-b)}\leqslant\frac{cd}{1+(1-c)(1-d)}$$

$$\Rightarrow a\dot{\varepsilon}b\leqslant c\dot{\varepsilon}d$$

又易计算

$$\begin{aligned}(a\dot{\varepsilon}b)\dot{\varepsilon}c&=\frac{(a\dot{\varepsilon}b)c}{1+(1-(a\dot{\varepsilon}b))(1-c)}\\&=\frac{abc}{1+(1-a)(1-b)+(1-a)(1-c)+(1-b)(1-c)}\\&=a\dot{\varepsilon}(b\dot{\varepsilon}c)\end{aligned}$$

且 $\forall a\in[0,1]$
$$a\dot{\varepsilon}1=\frac{a\cdot1}{1+0}=a$$

即 $\dot{\varepsilon}$ 是[0,1]上的 t-模. 同样可以验证 $\overset{+}{\varepsilon}$ 是[0,1]上的 t-余模. □

记 $\mathscr{T}(2)\triangleq\{\top\mid\top$是$[0,1]$的 t-模$\}$, $\mathscr{S}(2)\triangleq\{\perp\mid\perp$ 是$[0,1]$上的t-余模$\}$，在 $\mathscr{T}(2)$与 $\mathscr{S}(2)$中规定序关系 $\leqslant$，则

$$\top_1\leqslant\top_2\Leftrightarrow(\forall x,y\in[0,1])\ \top_1(x,y)\leqslant\top_2(x,y)$$

这时称 $\top_1$ 弱于 $\top_2$，其中 $\top_1,\top_2\in\mathscr{T}(2)\cup\mathscr{S}(2)$.

定理 1.3.2 $\forall\top\in\mathscr{T}(2)$, $\perp\in\mathscr{S}(2)$，总有：

(1) $\top(a,0)=0$, $\perp(a,1)=1$, $\forall a\in[0,1]$;

(2) $\Delta\leqslant\top\leqslant\wedge\leqslant\vee\leqslant\perp\leqslant\nabla$.

特别地 $\Delta\leqslant\odot\leqslant\dot{\varepsilon}\leqslant\hat{\cdot}\leqslant\wedge\leqslant\vee\leqslant\hat{+}\leqslant\overset{+}{\varepsilon}\leqslant\oplus\leqslant\nabla$.

证明 (1)是显然的，只证(2). 设$\top\in\mathscr{T}(2)$, $\perp\in\mathscr{S}(2)$，则 $\forall a,b\in[0,1]$，由单调性与边界条件得

$$\top(a,b)\leqslant\top(a,1)=a,\quad \top(a,b)\leqslant\top(1,b)=b$$

故 $\top(a,b)\leqslant a\wedge b$. 类似地可以证明 $a\vee b\leqslant\perp(a,b)$. 显然 $\Delta\leqslant\top$, $\wedge\leqslant\vee$, $\perp\leqslant\nabla$，因此

$$\Delta\leqslant\top\leqslant\wedge\leqslant\vee\leqslant\perp\leqslant\nabla.$$

下证 $\odot\leqslant\dot{\varepsilon}$. 事实上若 $a+b\leqslant1$，则显见 $a\odot b=0\leqslant a\dot{\varepsilon}b$. 由于 $a,b\in[0,1]$，则 $a(b-1)\geqslant b-1$，即 $ab\geqslant a+b-1$，从而

$$(2-a-b)(ab+1-a-b)\geqslant0$$

变形可得

$$a+b-1 \leqslant \frac{ab}{1+(1-a)(1-b)}$$

即当 $a+b>1$ 时 $$a \odot b \leqslant a \dot{\varepsilon} b.$$

类似地可以证明 $\overset{+}{\varepsilon} \leqslant \oplus$.

因 $\frac{ab}{1+(1-a)(1-b)} \leqslant ab$，所以 $\dot{\varepsilon} \leqslant \hat{\cdot}$.

又 $$a+b-1-ab \leqslant 0 \Rightarrow a^2b+ab^2-ab-a^2b^2 \leqslant 0$$
$$\Rightarrow a+b-ab+(a+b)ab-(ab)^2 \leqslant a+b$$
$$\Rightarrow (a+b-ab)(1+ab) \leqslant a+b$$
$$\Rightarrow a+b-ab \leqslant \frac{a+b}{1+ab}$$

即 $\hat{+} \leqslant \overset{+}{\varepsilon}$.

故定理 1.3.2 中的结论都是成立的. □

由于 t-模与 t-余模满足结合律，可以将其运算推广到 n 元运算上. 若 $\top$ 是 $[0,1]$上的 t-模，则对于 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in [0,1]$ 我们可以定义：

$$\top(x_1, x_2, x_3) \triangleq \top(x_1, \top(x_2, x_3))$$

$$\top(x_1, x_2, x_3, x_4) \triangleq \top(x_1, \top(x_2, x_3, x_4))$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\top(x_1, x_2, \cdots, x_n) \triangleq \top(x_1, \top(x_2, x_3, \cdots, x_n))$$

特别地，$\top(\underbrace{x, x, \cdots, x}_{n})$ 记为 $x_{\top}^{(n)}$.

对于 t-余模 $\perp$ 可以类似定义. 这样的 t-模与 t-余模也称为 n 维 t-模与 n 维 t-余模(汪培庄，李洪兴，1996). 便于应用，下面将常用 n 维 t-模与 n 维 t-余模列出.

下列都是 n 维 t-模：

$\wedge$： $\wedge(x_1, x_2, \cdots, x_n) \triangleq \bigwedge_{j=1}^{n} x_j$；

Π： $\Pi(x_1, x_2, \cdots, x_n) \triangleq \prod_{j=1}^{n} x_j$；

Δ： $\Delta(x_1, x_2, \cdots, x_n) \triangleq \begin{cases} x_i, & x_j = 1,\ j \neq i,\ 1 \leqslant j \leqslant n \\ 0, & x_j \neq 1,\ 1 \leqslant j \leqslant n \end{cases}$；

$\odot$： $\odot(x_1, x_2, \cdots, x_n) \triangleq \max\left\{ \sum_{j=1}^{n} x_j - n + 1, 0 \right\}$.

下列都是 n 维 t-余模：

$\vee$：　$\vee(x_1,x_2,\cdots,x_n)\triangleq\bigvee_{j=1}^{n}x_j$；

$\amalg$：　$\amalg(x_1,x_2,\cdots,x_n)\triangleq 1-\prod_{j=1}^{n}(1-x_j)$；

∇：　$\nabla(x_1,x_2,\cdots,x_n)\triangleq\begin{cases}x_i, & x_j=0,\ j\neq i,\ 1\leqslant j\leqslant n\\ 1, & x_j\neq 0,\ 1\leqslant j\leqslant n\end{cases}$；

$\oplus$：　$\oplus(x_1,x_2,\cdots,x_n)\triangleq\min\left\{\sum_{j=1}^{n}x_j,1\right\}$.

如果 t-模 $\top$ 与 t-余模 $\perp$ 还满足一定条件，则 $\top=\wedge$，$\perp=\vee$. 下面一些定理可以说明这一点.

定理 1.3.3　(1) 如果 t-模 $\top$(t-余模 $\perp$)满足幂等律，即 $\forall x\in[0,1]$，$\top(x,x)=x$ ($\perp(x,x)=x$)，则 $\top=\wedge$ ($\perp=\vee$).

(2)如果 t-模 $\top$ 和 t-余模 $\perp$ 满足吸收律，即 $\forall x,y\in[0,1]$，$\top(\perp(x,y),x)=x$ ($\perp(\top(x,y),x)=x$)，则 $\top=\wedge$ ($\perp=\vee$).

证明　(1) $\forall x,y\in[0,1]$，$x\wedge y=\top(x\wedge y,x\wedge y)\leqslant\top(x,y)\leqslant x\wedge y$，即 $\top=\wedge$. 对 t-余模 $\perp$ 类似可证.

(2) 在 $\top(\perp(x,y),x)=x$ 中令 $y=0$，或在 $\perp(\top(x,y),x)=x$ 中令 $y=1$，即得幂等律.　□

定理 1.3.4　(Bellman and Giertz，1973；张文修，1984) 设 f，g 是 $[0,1]^2\to[0,1]$ 的二元运算，如果 f，g 满足以下条件：

(1) f，g 是连续函数并且分别对两变元是不减的；

(2) $f(x,y)=f(y,x)$，$g(x,y)=g(y,x)$；

(3) $p(x)=f(x,x)$，$q(x)=g(x,x)$ 是严格增的；

(4) $f(x,y)\leqslant x\wedge y$，$g(x,y)\geqslant x\vee y$；

(5) $f(1,1)=1$，$g(0,0)=0$；

(6) f，g 满足结合律和分配律，即

$$f(x,f(y,z))=f(f(x,y),z)$$
$$g(x,g(y,z))=g(g(x,y),z)$$
$$f(x,g(y,z))=g(f(x,y),f(x,z))$$
$$g(x,f(y,z))=f(g(x,y),g(x,z))$$

则 f，g 被唯一确定为

$$f(x,y)=x\wedge y$$
$$g(x,y)=x\vee y.$$

证明　分下面五步进行.

(i)首先证明 $p(x)$, $q(x)$ 是 $[0,1]$ 到 $[0,1]$ 的单满射.

根据条件(4)和条件(5),易知

$$p(0)=0,\quad p(1)=1$$

再由条件(1)和条件(3)可知,$p(x)$ 是严格增的连续函数,则得证. 同理可证,$q(x)$ 是 $[0,1]$ 到 $[0,1]$ 的单满射.

(ii)证明,$\forall x\in[0,1]$ 有

$$x=f(x,g(x,x))=g(x,f(x,x)).$$

设 $p(x)=a$,由条件(4)和条件(6)易得

$$\begin{aligned}p(x)=f(x,x)=a&\leqslant\max\{a,f(a,a)\}\leqslant g(a,f(a,a))\\&=f(g(a,a),g(a,a))=p(g(a,a))\end{aligned}$$

由于 $p(x)$ 是严格增的函数,故 $x\leqslant g(a,a)$. 另外

$$g(a,a)=g(f(x,x),f(x,x))=f(x,g(x,x))\leqslant\min\{x,g(x,x)\}\leqslant x$$

于是 $x=g(a,a)$,从而得到

$$x=f(x,g(x,x)).$$

同理可证,$x=g(x,f(x,x))$.

(iii)证明,$\forall a\in[0,1]$ 有

$$f(a,a)=a,\quad g(a,a)=a$$

由(ii),即得

$$\begin{aligned}f(a,a)&=f(f(a,a),g(f(a,a),f(a,a)))\\&=f(f(a,a),f(a,g(a,a)))=f(f(a,a),a)\end{aligned}$$

进一步有

$$f(a,a)=f(f(f(a,a),a),a)=f(f(a,a),f(a,a))$$

即,$p(a)=p(f(a,a))$. 由(i)即证得 $a=f(a,a)$.

同理可证,$a=g(a,a)$.

(iv)证明,$\forall a,b\in[0,1]$ 有

$$f(a,g(a,b))=g(a,f(a,b))=a.$$

由条件(4)及(iii)即得

$$\begin{aligned}a\leqslant\max\{a,f(a,b)\}&\leqslant g(a,f(a,b))=f(g(a,a),g(a,b))\\&=f(a,g(a,b))\leqslant\min\{a,g(a,b)\}\leqslant a\end{aligned}$$

则

$$f(a,g(a,b))=g(a,f(a,b))=a.$$

(v)证明 $\forall a,b\in[0,1]$ 有

$$f(a,b)=\min\{a,b\},\ g(a,b)=\max\{a,b\}$$

由条件(2)不妨设 $a\leqslant b$. 令

$$k(a,y)=g(a,y)$$

则

$$k(a,a)=g(a,a)=a$$

$$k(a,1)=g(a,1)\geqslant \max\{a,1\}=1$$

从而，$k(a,1)=1$.

固定 a，$k(a,y)$ 是 $[a,1]$ 到 $[a,1]$ 的连续函数. 于是对 $b\geqslant a$，存在 $c\geqslant a$ 使

$$k(a,c)=g(a,c)=b$$

因而，由(iv)有

$$f(a,b)=f(a,g(a,c))=a=\min\{a,b\}$$

同理可证

$$g(a,b)=\max\{a,b\}$$

则定理得证. □

2. 对偶 t-模与有补 t-模

关于补运算，引入如下"伪补"的概念.

定义 1.3.3　设 $(X,\leqslant)$ 为偏序集，映射 $N:X\to X$，且 $\forall a,b\in X$，满足：

(1) $a\leqslant b\Rightarrow N(b)\leqslant N(a)$ (逆序对应)；

(2) $N(N(a))=a$ (对合律或复原律).

称 N 为 X 上的伪补(pseudo-complement)或逆序对合算子(inverse order and involution operator, antiony and involution operator)或对合否算子(involution negator operator).

例 1.3.2　(1) 设 $N:[0,1]\to[0,1]$，且 $\forall a\in[0,1]$，$N(a)=1-a$，则 N 为$[0,1]$上的伪补. 这时 $N(a)=1-a\triangleq a^c$.

(2) 设 $N:[0,1]\to[0,1]$，且 $\forall a\in[0,1]$，$N(a)=\dfrac{1-a}{1+\lambda a}$，$\lambda\in(-1,+\infty)$，则 N 为$[0,1]$上的伪补. 特别地，$\lambda=0$，即为 a^c.

(3) 设 $N:[0,1]\to[0,1]$，且 $\forall a\in[0,1]$，$N(a)=\sqrt[w]{1-a^w}$，$w\in(0,+\infty)$，则 N 为$[0,1]$上的伪补. 特别地，$w=1$，即为 a^c. □

下面讨论伪补的性质.

定理 1.3.5　设 N 是$[0,1]$上的伪补，则：

(1) $N(0)=1$，$N(1)=0$；

(2) N 是双射(即一一对应的满射)；

(3) N 在$[0,1]$上连续.

证明　(1)和(2) 易证，只证(3).

任取 $\{a_n\}\subseteq[0,1]$ 是单调增的，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\in[0,1]$，$\{N(a_n)\}\subseteq[0,1]$ 是单调减的，故 $\lim\limits_{n\to\infty}N(a_n)=b\geqslant N(a)$. 若 $b>N(a)$，则由 $N(a_n)\geqslant b>N(a)$ 及

N 的一一对应和逆序对应性，我们有 $a_n \leqslant N(b) < a$，这与 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 矛盾，故 $\lim\limits_{n\to\infty} N(a_n) = N(a)$. 类似地证明，当 $\{a_n\}$ 单调减趋于 $a \in [0,1]$ 时，$\{N(A_n)\}$ 单调增趋于 $N(a)$，即 N 是连续的. □

定理 1.3.6 （张文修，1984）设 $h:[0,1] \to [0,1]$ 满足条件：

(1) $h(0)=1$, $h(1)=0$；

(2) h 是连续的严格单调减的；

(3) $\forall x \in [0,1]$ 有 $h(h(x))=x$；

(4) $\forall x \in [0,1]$ 有 $h(1-x)=1-h(x)$.

则 $h(x)=1-x$.

证明 当 $x=0,\frac{1}{2},1$ 时，显然有 $h(x)=1-x$. 若存在 $x_0\left(x_0 \neq 0,\frac{1}{2},1\right)$，使得 $h(x_0)=y_0 \neq 1-x_0$，不妨设 $y_0 > 1-x_0$. 令 $x_1 = 1-x_0$，$h(x_1)=y_1$，则

$$y_1 = h(x_1) = h(1-x_0) = 1-h(x_0) < 1-(1-x_0) = x_0$$

于是

$$1-x_0 < h(x_0) < h(y_1) = x_1 = 1-x_0$$

矛盾，则得证. □

定理 1.3.7 设 N 为[0,1]上的伪补，

(1)若 $\top$ 是 [0,1] 上的 t-模，令

$$\bot(a,b) = N(\top(N(a),N(b))),\ \forall a,b \in [0,1]$$

则 $\bot$ 是[0,1]上的 t-余模，并且如果 $\top$ 是连续的，则 $\bot$ 也连续.

(2)若 $\bot$ 是 [0,1] 上的 t-余模，令

$$\top(a,b) = N(\bot(N(a),N(b))),\ \forall a,b \in [0,1]$$

则 $\top$ 是 [0,1] 上的 t-模，并且如果 $\bot$ 是连续的，则 $\top$ 也连续.

证明 (1) $\bot$ 显然满足交换律，因为 $\forall a,b,c \in [0,1]$

$$\begin{aligned}\bot(\bot(a,b),c) &= N(\top(N(N(\top(N(a),N(b)))),N(c)))\\ &= N(\top(\top(N(a),\ N(b)),\ N(c)))\\ &= N(\top(N(a)\ ,\top(N(b)),\ N(c)))\\ &= N(\top(N(a),\ N(N(\top(N(b)),\ N(c)))))\\ &= \bot(a,\ \bot(b,c))\end{aligned}$$

故 $\bot$ 满足结合律. 又 $\forall a,b,c \in [0,1]$

$$\begin{aligned}a \leqslant b &\Rightarrow N(b) \leqslant N(a)\\ &\Rightarrow \top(N(b),N(c)) \leqslant \top(N(a),N(c))\\ &\Rightarrow N(\top(N(a),N(c))) \leqslant N(\top(N(b),N(c)))\\ &\Rightarrow \bot(a,c) \leqslant \bot(b,c)\end{aligned}$$

即 $\perp$ 也满足单调性. 再注意到

$$\perp(a,0)=N(\top(N(a),N(0)))=N(\top(N(a),1))=N(N(a))=a,\ \forall a\in[0,1]$$

故 $\perp$ 是 t-余模. 连续性显然.

(2)类似(1)的证明可证. □

定义 1.3.4 设 $\top$, $\perp$, N 分别是[0,1]上的 t-模,t-余模与伪补. 且

$$(\forall a,b\in[0,1])(\top(a,b)=N(\perp(N(a),N(b)))) \quad (1.3.17)$$

(等价于 $(\forall a,b\in[0,1])(\perp(a,b)=N(\top(N(a),N(b))))$)

则称 $\top$ 和 $\perp$ 关于 N 是对偶的(dual),式(1.3.17)也称为 $\top$ 和 $\perp$ 的对偶律.

例 1.3.3 $\wedge$ 与 $\vee$, Δ 与 ∇, $\hat{\cdot}$ 与 $\hat{+}$, $\odot$ 与 $\oplus$, $\dot{\varepsilon}$ 与 $\overset{+}{\varepsilon}$, $\dot{\gamma}$ 与 $\overset{+}{\gamma}$, $\dot{y}$ 与 $\overset{+}{y}$, $\dot{p}$ 与 $\overset{+}{p}$, $\dot{\omega}$ 与 $\overset{+}{\omega}$ 关于 $N(a)=1-a$ 是对偶的.

$$a\odot a^c=a\odot(1-a)=\max\{0,a+(1-a)-1\}=0$$

$$a\oplus a^c=a\oplus(1-a)=\min\{a+(1-a),1\}=1$$

这说明 $\odot$ 与 $\oplus$ 关于 $N(a)=1-a$ 还存在互补律. □

定理 1.3.8 设 $a,b\in[0,1]$, 则

(1) $a\vee b=a\oplus(a^c\odot b)$;

(2) $a\wedge b=a\odot(a^c\oplus b)$;

(3) $a\mathbin{\hat{\cdot}} b=a\odot(a^c\mathbin{\hat{+}} b)$;

(4) $a\mathbin{\hat{+}} b=a\oplus(a^c\mathbin{\hat{\cdot}} b)$.

证明
$$\begin{aligned}a\oplus(a^c\odot b)&=(a+((1-a)+b-1)\vee 0)\wedge 1\\&=(a+(b-a)\vee 0)\wedge 1=\begin{cases}b, & b\geqslant a\\ a, & b<a\end{cases}\\&=a\vee b\end{aligned}$$

即(1)成立. 因为 $\odot$ 与 $\oplus$ 及 $\wedge$ 与 $\vee$ 关于 $N(a)=1-a=a^c$ 是对偶的,故由(1)得

$$a\odot(a^c\oplus b)=(a^c\oplus((a^c)^c\odot b^c))^c=(a^c\vee b^c)^c=a\wedge b$$

即(2)成立. 同理可证(3)、(4). □

定义 1.3.5 设 $\top$($\perp$)是[0,1]上的 t-模(t-余模),且存在伪补 N,使得 $\forall a\in[0,1]$ 都有 $\top(a,N(a))=0$ ($\perp(a,N(a))=1$),称 $\top$($\perp$)是有补 t-模(有补 t-余模)(complemented t-norm (complemented t-conorm)). 并称 $\top$($\perp$)关于 N 是有补的(complemented).

例 1.3.4 设 $\top$ 是 Weber 算子 $\dot{\omega}$, 即 $\forall a,b\in[0,1]$

$$\top(a,b)=\frac{a+b+\omega ab-1}{1+\omega}\vee 0$$

其中 $\omega\in(-1,+\infty)$. 令

$$N(a)=\frac{1-a}{1+\omega a},\ \forall a\in[0,1]$$

也容易验证 N 是伪补. 又令

$$\bot(a,b)=N\left(\frac{N(a)+N(b)+\omega N(a)N(b)-1}{1+\omega}\vee 0\right)=(a+b+\omega ab)\wedge 1$$

由定理 1.3.7 知 $\bot$ 是 t-余模. 又当 $\omega=0$ 时, $\bot(a,b)=a\oplus b$, 由定义 1.3.4 知 $\top$ 与 $\bot$ 关于 N 是对偶的, 且 $\top$ 与 $\bot$ 分别是有补 t-模与有补 t-余模. 值得注意的是 Weber 算子 $\dot{\omega}$ 关于 1-a 对偶的 t-余模是 $\overset{+}{\omega}$, 这说明不同的伪补得到不同的对偶算子. □

下面是有补 t-模与有补 t-余模的一个构造方法(彭祖赠, 孙韫玉, 1985).

定理 1.3.9 设 $R:\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$ 满足下列条件: 对所有 $x,y,z\in\mathbf{R}^+$, 有:

(i) $R(x,y)=R(y,x)$;

(ii) $R(R(x,y),z)=R(x,R(y,z))$;

(iii) $R(x,y)$ 关于所有变元连续, 严格单调增;

(iv) $R(x,0)=x$.

$\forall x,y\in[0,1]$, 令 $\bot(x,y)=R(x,y)\wedge 1$, $\top(x,y)=N(\bot(N(x),N(y)))$, 其中 $R(x,N(x))=1$. 则:

(1) $\bot$ 是有补 t-余模, $R(x,N(x))=1$ 所确定的唯一的隐函数 $N(x)$ 是其伪补, 并且 $\top$ 是和 $\bot$ 对偶的有补 t-模.

(2) $\forall x,y\in[0,1]$, $\top(x,\bot(N(x),y))=x\wedge y$, $\bot(x,\top(N(x),y))=x\vee y$;

(3) $\top(x,y)=0\Leftrightarrow y\leqslant N(x)$, $\bot(x,y)=1\Leftrightarrow x\geqslant N(y)$.

证明 (1) 直接验证.

(2) $\forall x,y\in[0,1]$, $x\leqslant y\Rightarrow N(y)\leqslant N(x)$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow \top(x,N(y))\leqslant \top(x,N(x))=0\\&\Rightarrow \top(x,N(y))=0\\&\Rightarrow \top(x,\bot(N(x),y))\\&=\top(x,N(\top(x,N(y))))=\top(x,1)=x.\end{aligned}$$

设 $x>y$, 则 $0\leqslant R(N(x),y)<R(N(x),x)=1$, 并且

$$R(N(x),N(R(N(x),y)))\leqslant R(N(x),N(R(N(x),0)))=1$$

于是

$$\begin{aligned}\top(x,\bot(N(x),y))&=N(\bot(N(x),N(\bot(N(x),y))))\\&=N(R(N(x),N(R(N(x),y))))\end{aligned}$$

并且 $1=R(R(N(x),y),N(R(N(x),y)))=R(y,R(N(x),N(R(N(x),y))))$

而 $R(y,N(y))=1$，故由 $N(y)$ 的唯一性得到 $R(N(x),N(R(N(x),y)))=N(y)$，从而

$$\top(x,\bot(N(x),y))=y$$

于是 $\forall x,y\in[0,1]$，$\top(x,\bot(N(x),y))=x\wedge y$. 另一式可以对偶得到.

(3) $\top(x,y)=0\Rightarrow N(x)\vee y=\bot(N(x),\top(x,y))$
$=\bot(N(x),0)=N(x)$（由(2)）
$\Rightarrow y\leqslant N(x)$

又 $y\leqslant N(x)\Rightarrow\top(x,y)\leqslant\top(x,N(x))=0\Rightarrow\top(x,y)=0$，从而 $\top(x,y)=0\Leftrightarrow y\leqslant N(x)$. 另一式由对偶得到. □

定理 1.3.10　设 $g:[0,1]\to[0,1]$ 是严格单调增的连续函数，且 $g(0)=0$，$g(1)=1$，用 G 表示 g 的反函数. 又设 $\top^*$、$\bot^*$ 与 N^* 分别是[0,1]上的 t-模、t-余模与伪补. 若 $\forall a,b\in[0,1]$，令

$$\top(a,b)=G(\top^*(g(a),g(b)))，\ \bot(a,b)=G(\bot^*(g(a),g(b)))$$
$$N(a)=G(N^*(g(a)))$$

则 $\top$、$\bot$ 与 N 也分别是[0,1]上的 t-模、t-余模与伪补. 并且若 $\top^*$、$\bot^*$ 关于 N^* 是对偶的(有补的)，则 $\top$、$\bot$ 关于 N 也是对偶的(有补的).

证明　因为 $\top^*$ 满足交换律，故 $\top$ 也满足交换律. 又 $\forall a,b,c\in[0,1]$，有

$$\begin{aligned}\top(\top(a,b),c)&=G(\top^*(g(G(\top^*(g(a),g(b)))),g(c)))\\&=G(\top^*(\top^*(g(a),g(b)),g(c)))\\&=G(\top^*(g(a),\top^*(g(b),g(c))))\\&=G(\top^*(g(a),g(G(\top^*(g(b),g(c))))))\\&=\top(a,\top(b,c))\end{aligned}$$

即 $\top$ 满足结合律. 因为 g 和 G 是严格单调增的以及 $\top^*$ 的单调性，所以 $\forall a,b\in[0,1]$

$$\begin{aligned}&a\leqslant b\Rightarrow g(a)\leqslant g(b)\\&\quad\Rightarrow(\forall c\in[0,1])(\top^*(g(a),g(c))\leqslant\top^*(g(b),g(c)))\\&\quad\Rightarrow(\forall c\in[0,1])(\top(a,c)=G(\top^*(g(a),g(c)))\\&\quad\leqslant G(\top^*(g(b),g(c)))=\top(b,c))\end{aligned}$$

即 $\top$ 具有单调性. 又 $\forall a\in[0,1]$，

$$\top(a,1)=G(\top^*(g(a),g(1)))=G(\top^*(g(a),1))=G(g(a))=a$$

故 $\top$ 是 t-模. 类似地可证 $\bot$ 是 t-余模，N 是伪补.

若 $\top^*$、$\bot^*$ 关于 N^* 是对偶的，则

$$\begin{aligned}\top(a,b)&=G(\top^*(g(a),g(b)))\\&=G(N^*(\bot^*(N^*(g(a)),N^*(g(b)))))\end{aligned}$$

$$=G(N^*(\bot^*(g(N(a)),g(N(b)))))$$

$$=G(N^*(g(\bot(N(a),N(b)))))=N(\bot(N(a),N(b))).$$

若 $\top^*$ 、$\bot^*$ 关于 N^* 是有补的，即 $\forall a\in[0,1]$，$\top^*(N^*(a),a)=0$，则

$$\begin{aligned}\top(N(a),a)&=\top(G(N^*(g(a)))),a)\\&=G(\top^*(g(G(N^*(g(a))),g(a)))\\&=G(\top^*(N^*(g(a)),g(a)))=G(0)=0.\end{aligned}$$

类似地，由 $\bot^*(N^*(a),a)=1$ 可以推出 $\bot(N(a),a)=1$，即 $\top$ 、$\bot$ 关于 N 也是有补的. □

例 1.3.5 设 $g(x)=x^2$，$G(x)=\sqrt{x}$. 若 $\top^*$ 、$\bot^*$ 与 N^* 同例 1.3.4 中的 $\top$、$\bot$ 与 N，则由定理 1.3.10 得

$$\top(a,b)=\left(\frac{a^2+b^2+\omega a^2b^2-1}{1+\omega}\vee 0\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.3.18}$$

$$\bot(a,b)=((a^2+b^2+\omega a^2b^2)\wedge 1)^{\frac{1}{2}} \tag{1.3.19}$$

$$N(a)=\left(\frac{1-a^2}{1+\omega a^2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.3.20}$$

且 $\top$ 、$\bot$ 关于 N 是对偶的和有补的. □

3. t-模的生成子

不同的情况需用不同的 t-模，并且重要的是能够构造相关的 t-模. 假设 $0\leqslant a\leqslant 1$，并且 f 是从$[0,1]$到$[a,1]$的序同构. 序同构是指 f 是$[0,1]$到$[a,1]$的双射并且满足 $x\leqslant y$ 当且仅当 $f(x)\leqslant f(y)$. 如果 $a=0$，则 f 是$[0,1]$上的自同构. 图 1.3.1 是一个序同构 f 的曲线图.

对于一个序同构 $f:[0,1]\to[a,1]$ 和 Archimedean t-模 $\top$，我们定义

$$x\top_f y=f^{-1}((f(x)\top f(y))\vee a) \tag{1.3.21}$$

定理 1.3.11 $\top_f$ 是一个$[0,1]$上的 Archimedean t-模.

证明 由定义很容易得知 $\top_f$ 满足交换律和单调性并且在$[0,1]$上连续.

(1)边界条件

$$1\top_f x=f^{-1}((f(1)\top f(x))\vee a)=f^{-1}(f(x)\vee a)=f^{-1}(f(x))=x.$$

(2)Archimedean 条件

对于 $b\in(0,1)$，$b\top_f b=f^{-1}(f(b)\top f(b)\vee a)$

如果 $f(b)\top f(b)<a$，$b\top_f b=f^{-1}(a)=0<b$；

如果 $f(b)\top f(b)\geqslant a$，$b\top_f b=f^{-1}(f(b)\top f(b))<f^{-1}(f(b))=b$

(3)结合律

利用对任意 $x\in[0,1]$，$a\leqslant f(x)$，我们得到

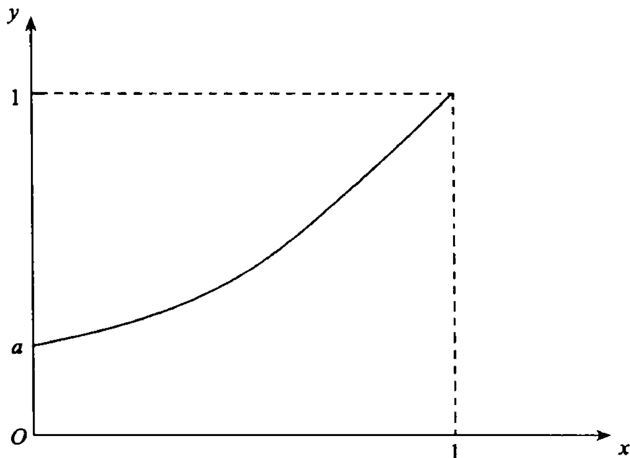


图 1.3.1　序同构 f 的曲线图

$$
\begin{aligned}
x \top_f (y \top_f z) &= x \top_f (f^{-1}((f(y) \top f(z))) \vee a)) \\
&= f^{-1}\{f(x) \top [f(f^{-1}((f(y) \top f(z)) \vee a)] \vee a\} \\
&= f^{-1}\{f(x) \top [(f(y) \top f(z)) \vee a] \vee a\} \\
&= f^{-1}(f(x) \top f(y) \top f(z) \vee a)(\text{注意}: f(x) \top a \leqslant a) \\
(x \top_f y) \top_f z &= f^{-1}(((ff^{-1}(f(x) \top f(y) \vee a)) \top f(z) \vee a) \\
&= f^{-1}((f(x) \top f(y) \vee a)) \top f(z) \vee a) \\
&= f^{-1}(f(x) \top f(y) \top f(z) \vee a)(\text{注意}: a \top f(z) \leqslant a)
\end{aligned}
$$

即
$$x \top_f (y \top_f z) = (x \top_f y) \top_f z.$$
□

定义 1.3.6　设 $\hat{\cdot}$ 是代数积 t-模(即普通乘法). 如果 $\top = \hat{\cdot}_f$，那么 f 称为 $\top$ 的一个生成子(Generator).

例 1.3.6　(1) 对于 $\top = \hat{\cdot}$，$f(x) = x^r (r > 0)$ 是 $\hat{\cdot}$ 的一个生成子.

(2)对于 $\top = \odot$，$f(x) = e^{x-1}$ 是 $\odot$ 的一个生成子. 事实上，$f(0) = e^{-1}$，$f^{-1}(x) = 1 + \ln x$，并且

$$
\begin{aligned}
f^{-1}(f(x)f(y) \vee e^{-1}) &= f^{-1}(e^{x-1}e^{y-1} \vee e^{-1}) \\
&= 1 + ((x + y - 2) \vee (-1)) = (x + y - 1) \vee 0.
\end{aligned}
$$

(3)设

$$
\top(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x + y - xy}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}
$$

容易验证 $\top$ 是[0, 1]上的 t-模,则

$$f(x)=\begin{cases}\exp\left(-\dfrac{1-x}{x}\right), & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

是 $\top$ 的一个生成子. 事实上

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-\ln x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

若 $x=0$ 或 $y=0$，则 $f^{-1}(f(x)f(y))=0=\top(x,y)$. 若 $x\neq 0$ 并且 $y\neq 0$，则

$$f^{-1}(f(x)f(y))=\frac{1}{1-\ln(f(x)f(y))}=\frac{1}{1-\ln\left(\exp\left(-\dfrac{1-x}{x}\right)\exp\left(-\dfrac{1-y}{y}\right)\right)}$$

$$=\left(1+\frac{1-x}{x}+\frac{1-y}{y}\right)^{-1}=\frac{xy}{x+y-xy}.$$

□

4. 基于 t-模与 t-余模的 Fuzzy 集运算

现将 t-模，t-余模与伪补用于 Fuzzy 集之间的运算.

定义 1.3.7 设 $\top$、$\bot$、N 分别是[0，1]上的 t-模，t-余模与伪补，$A,B,C\in\mathscr{F}(X)$.

(1)若 $C(x)=\bot(A(x),B(x))$，$\forall x\in X$，则记 $C=A\cup_{\bot}B$，称 $A\cup_{\bot}B$ 为 A 与 B 的"模并"；

(2)若 $C(x)=\top(A(x),B(x))$，$\forall x\in X$，则记 $C=A\cap_{\top}B$，称 $A\cap_{\top}B$ 为 A 与 B 的"模交"；

(3)若 $C(x)=N(A(x))$，$\forall x\in X$，则记 $C=A^N$，称 A^N 为 A 的"伪补".

特别地，若 $N(a)=1-a$，则仍常记 A^N 为 A^c.

容易验证 Fuzzy 集模并、模交与伪补运算具有下列性质，其证明略.

定理 1.3.12 设 $\top$、$\bot$、N 分别是[0,1]上的 t-模、t-余模与伪补，则

(1) $A\cup_{\bot}B=B\cup_{\bot}A$，$A\cap_{\top}B=B\cap_{\top}A$；

(2) $(A\cup_{\bot}B)\cup_{\bot}C=A\cup_{\bot}(B\cup_{\bot}C)$，

$(A\cap_{\top}B)\cap_{\top}C=A\cap_{T}(B\cap_{\top}C)$；

(3) $A\subseteq B\Rightarrow(\forall C\in\mathscr{F}(X)\ (A\cup_{\bot}C\subseteq B\cup_{\bot}C,\ A\cap_{\top}C\subseteq B\cap_{\top}C)$；

(4) $A\cup_{\bot}\varnothing=A$，$A\cap_{\top}\varnothing=\varnothing$，$A\cup_{\bot}X=X$，$A\cap_{\top}X=A$；

(5)若 $\top$ 与 $\bot$ 关于 N 是对偶的，则

$$(A\cup_{\bot}B)^N=A^N\cap_{\top}B^N,\quad (A\cap_{\top}B)^N=A^N\cup_{\bot}B^N;$$

(6)若 $\top$ 与 $\bot$ 关于 N 是有补的，则

$$A^N\cap_{\top}A=\varnothing,\quad A^N\cup_{\bot}A=X;$$

(7) $A \cap_{\top} B \subseteq A \cap B \subseteq A \cup B \subseteq A \cup_{\perp} B$;

(8) $A \cup_{\perp}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)=\bigcup_{k=1}^{n}(A \cup_{\perp} A_k)$, $\quad A \cap_{\top}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)=\bigcup_{k=1}^{n}(A \cap_{\top} A_k)$,

$A \cup_{\perp}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right)=\bigcap_{k=1}^{n}(A \cup_{\perp} A_k)$, $A \cap_{\top}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right)=\bigcap_{k=1}^{n}(A \cap_{\top} A_k)$;

(9)若 $\top$ 与 $\perp$ 是连续的,则对任意指标集 Λ 都有

$$A \cup_{\perp}\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(A \cup_{\perp} A_\lambda),\quad A \cap_{\top}\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(A \cap_{\top} A_\lambda),$$

$$A \cup_{\perp}\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}(A \cup_{\perp} A_\lambda),\quad A \cap_{\top}\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}(A \cap_{\top} A_\lambda).$$

1.3.2 Fuzzy 蕴涵算子

蕴涵算子在经典二值逻辑中扮演了重要角色. Fuzzy 蕴涵算子是经典蕴涵算子的推广,就像 t-模和 t-余模分别是合取和析取的推广一样. 下面我们给出 Fuzzy 蕴涵算子的一般定义.

定义 1.3.8 (Kitainik,1993)映射 $I:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$ 称为一个 Fuzzy 蕴涵算子,如果 $\forall a,b,c\in[0,1]$ 该映射满足条件:

(1) $a\leqslant b\Rightarrow I(a,c)\geqslant I(b,c)$;

(2) $b\leqslant c\Rightarrow I(a,b)\leqslant I(a,c)$;

(3) $I(0,0)=1,\ I(1,1)=1,\ I(1,0)=0$.

下面给出三个常用的 Fuzzy 蕴涵算子.

1. $\alpha_{\top}$ 算子(或 R-蕴涵算子)

下面引入与 t-模 $\top$ 相关的 $\alpha_{\top}$ 算子(Sanchez 算子),这一算子在后面是很有用的.

设 $\top$ 是 $[0,1]$ 上的 t-模,则由 $\top$ 的单调性,我们得知 $\top$ 对 $\vee$ 的分配律成立,即

$$a\top(b\vee c)=a\top b\vee a\top c,\ \forall a,b,c\in[0,1]$$

但 $\top$ 对 $\vee$ 的无穷分配不一定成立,于是我们给出如下定义.

定义 1.3.9 设 $\top$ 是$[0,1]$上的 t-模,如果 $\top$ 满足

$$a\top\left(\bigvee_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda\right)=\bigvee_{\lambda\in\Lambda}(a\top a_\lambda),\ \forall a,a_\lambda\in[0,1],\lambda\in\Lambda \tag{1.3.22}$$

则称 $\top$ 对 $\vee$ 是无穷可分配的(infinitely $\vee$ -distributive).

例 1.3.7 t-模 Drastic 积 Δ 是对 $\vee$ 非无穷可分配的. 事实上, $\forall a\in(0,1)$

$$a\Delta\left(\bigvee_{i=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{i}\right)\right)=a\Delta 1=a,\ \bigvee_{i=1}^{\infty}\left(a\Delta\left(1-\frac{1}{i}\right)\right)=\bigvee_{i=1}^{\infty}0=0$$

于是 $$a\Delta\left(\bigvee_{i=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{i}\right)\right)\neq\bigvee_{i=1}^{\infty}\left(a\Delta\left(1-\frac{1}{i}\right)\right).$$ □

定理 1.3.13 若 $\top$ 是 $[0,1]$ 上的连续 t-模，则 $\top$ 对 $\vee$ 是无穷可分配的.

证明 $\forall a,a_\lambda\in[0,1],\lambda\in\Lambda$，由 $\top$ 的单调性，易知

$$a\top\left(\bigvee_{\lambda\in\Lambda}a_\lambda\right)\geqslant\bigvee_{\lambda\in\Lambda}(a\top a_\lambda)$$

又 $\forall\varepsilon\in\left(0,\bigvee_{\lambda\in\Lambda}a_\lambda\right)$ $\left(\text{不妨设}\bigvee_{\lambda\in\Lambda}a_\lambda\neq 0\right)$，$\exists\lambda_0\in\Lambda$，使得 $\bigvee_{\lambda\in\Lambda}a_\lambda-\varepsilon<a_{\lambda_0}$，于是

$$a\top\left(\bigvee_{\lambda\in\Lambda}a_\lambda-\varepsilon\right)\leqslant a\top a_{\lambda_0}\leqslant\bigvee_{\lambda\in\Lambda}(a\top a_\lambda)$$

由 ε 的任意性及 $\top$ 的连续性得，$a\top\left(\bigvee_{\lambda\in\Lambda}a_\lambda\right)\leqslant\bigvee_{\lambda\in\Lambda}(a\top a_\lambda)$. □

定义 1.3.10 (Sanchez, 1976) 设 $\top$ 是$[0,1]$上的 t-模，则在$[0,1]$上定义一个算子 $\alpha_\top$

$$a\alpha_\top b=\bigvee\{x\in[0,1]\mid a\top x\leqslant b\},\ \forall a,b\in[0,1] \quad (1.3.23)$$

在不混淆的情况下简记 $\alpha_\top$ 为 α. 算子 α 也称为 R-蕴涵算子(R-implicator or residual implicator).

定理 1.3.14 (胡宝清，1988b) (1) $\forall a\in[0,1]$，$1\alpha a=a$

(2) $\forall a,b,c\in[0,1]$，$a\leqslant b\Rightarrow a\alpha c\geqslant b\alpha c, c\alpha a\leqslant c\alpha b$.

证明 (1)由定义直接得到.

(2)若 $a\leqslant b$，则 $\forall c\in[0,1]$

$$\{x\mid a\top x\leqslant c\}\supseteq\{y\mid b\top y\leqslant c\},\ \{x\mid c\top x\leqslant a\}\subseteq\{y\mid c\top y\leqslant b\}$$

易知，$a\alpha c\geqslant b\alpha c$，$c\alpha a\leqslant c\alpha b$.

由定理 1.3.14 易知 $\alpha_\top$ 是$[0,1]$上的一个 Fuzzy 蕴涵算子.

定理 1.3.15 (胡宝清，1988b)设 $\top$ 对 $\vee$ 无穷可分配，则 $\forall a,b,c\in[0,1]$，有

(1) $a\top(a\alpha b)\leqslant b\leqslant a\alpha(a\top b)$;

(2) $a\top b\leqslant c\Leftrightarrow a\alpha c\geqslant b$;

(3) $a\alpha b=\max\{x\mid a\top x\leqslant b\}$，$a\top b=\min\{x\mid a\alpha x\geqslant b\}$;

(4) $(a\top b)\alpha c=a\alpha(b\alpha c)=b\alpha(a\alpha c)$;

(5) $(a\alpha b)\top(b\alpha c)\leqslant a\alpha c$;

(6) $(a\alpha b)\alpha b\geqslant a$;

(7) $a\leqslant b\Leftrightarrow a\alpha b=1$;

(8) $a\alpha(b\alpha a)=1$;

(9) $a\alpha b\geqslant b$.

证明　(1)直接验证得

$$a\top(a\alpha b)=a\top(\vee\{x\mid a\top x\leqslant b\})=\vee\{a\top x\mid a\top x\leqslant b\}\leqslant b.$$

(2)由 α 的定义，$a\top b\leqslant c\Rightarrow a\alpha c\geqslant b$；反之，由(1)得

$$a\alpha c\geqslant b\Rightarrow a\top b\leqslant a\top(a\alpha c)\leqslant c.$$

(3)由定义及(1)和(2)易知.

(4) $(a\top b)\alpha c=\vee\{x\mid a\top b\top x\leqslant c\}=\vee\{x\mid b\top x\leqslant a\alpha c\}$

$$=\vee\{x\mid x\leqslant b\alpha(a\alpha c)\}=b\alpha(a\alpha c)$$

再由 $a\top b=b\top a$，即得.

(5)由(4)，$(a\alpha b)\alpha(a\alpha c)=(a\top(a\alpha b))\alpha c$.

由(1)，$a\top(a\alpha b)\leqslant b$.

由定理1.3.14(2)和(4)，$(a\alpha b)\alpha(a\alpha c)\geqslant b\alpha c$.

由(2)，$(a\alpha b)\top(b\alpha c)\leqslant a\alpha c$.

(6)由(1) $a\top(a\alpha b)\leqslant b$，由 $\top$ 的交换性得 $(a\alpha b)\top a\leqslant b$，再由(2)的 $(a\alpha b)\alpha b\geqslant a$.

(7)、(8)、(9)易证.　□

定理 1.3.16　(胡宝清，1988b)设 $\top$ 对 $\vee$ 无穷可分配，并且 $a_\lambda\in[0,1]$，$\lambda\in\Lambda$，$b\in[0,1]$，则：

(1) $\left(\bigvee_{\lambda\in\Lambda}a_\lambda\right)\alpha b=\bigwedge_{\lambda\in\Lambda}(a_\lambda\alpha b)$；

(2) $b\alpha\left(\bigwedge_{\lambda\in\Lambda}a_\lambda\right)=\bigwedge_{\lambda\in\Lambda}(b\alpha a_\lambda)$.

证明　由定理1.3.14(2)易知 $\left(\bigvee_{\lambda\in\Lambda}a_\lambda\right)\alpha b\leqslant\bigwedge_{\lambda\in\Lambda}(a_\lambda\alpha b)$，又由定理1.3.15(1)得

$$\left(\bigvee_{\eta\in\Lambda}a_\eta\right)\top\left(\bigwedge_{\lambda\in\Lambda}(a_\lambda\alpha b)\right)\leqslant\bigwedge_{\lambda\in\Lambda}\left(\left(\bigvee_{\eta\in\Lambda}a_\eta\right)\top(a_\lambda\alpha b)\right)$$

$$=\bigwedge_{\lambda\in\Lambda}\left(\bigvee_{\eta\in\Lambda}(a_\eta\top(a_\lambda\alpha b))\right)\leqslant\bigvee_{\eta\in\Lambda}(a_\eta\top(a_\eta\alpha b))\leqslant b$$

再由定理1.3.15(2)得 $\left(\bigvee_{\lambda\in\Lambda}a_\lambda\right)\alpha b\geqslant\bigwedge_{\lambda\in\Lambda}(a_\lambda\alpha b)$.

即
$$\left(\bigvee_{\lambda\in\Lambda}a_\lambda\right)\alpha b=\bigwedge_{\lambda\in\Lambda}(a_\lambda\alpha b).$$

同理可证(2).　□

由定理1.3.14(2)易证以下定理.

定理 1.3.17　(胡宝清，1988b) 设 $a_\lambda\in[0,1]$，$\lambda\in\Lambda$，$b\in[0,1]$，则：

(1) $\left(\bigwedge_{\lambda\in\Lambda}a_\lambda\right)\alpha b\geqslant\bigvee_{\lambda\in\Lambda}(a_\lambda\alpha b)$；

(2) $b\alpha\left(\bigvee_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda\right) \geqslant \bigvee_{\lambda\in\Lambda}(b\alpha a_\lambda)$.

例 1.3.8 如果 $\top=\wedge$，则

$$a\alpha_{\wedge} b=\begin{cases}1, & a\leqslant b\\ b & a>b\end{cases}.$$

例 1.3.9 如果 $\top=\dot{\gamma}$, 则

$$a\alpha_{\dot{\gamma}}b=\begin{cases}1, & a\leqslant b\\ \dfrac{ab+b(1-a)\gamma}{a-(1-\gamma)(1-a)b}, & a>b\end{cases}.$$

特别地，$\gamma=1, \dot{\gamma}=\hat{\cdot}$，这时

$$a\alpha_{\hat{\cdot}}\, b=\begin{cases}1, & a\leqslant b\\ \dfrac{b}{a}, & a>b\end{cases}$$

$\gamma=2$, $\dot{\gamma}=\dot{\varepsilon}$, 有

$$a\alpha_{\dot{\varepsilon}}b=\begin{cases}1, & a\leqslant b\\ \dfrac{(2-a)b}{a+(1-a)b}, & a>b\end{cases}.$$ □

定理 1.3.18 设 $\top$ 是一个 Archimedean t-模，并且 f 是 $\top$ 的一个生成子. 那么：

(1)如果 $f(0)\neq 0$，则

$$x\alpha y=f^{-1}\left(\frac{f(y)}{f(x)}\wedge 1\right).$$

(2)如果 $f(0)=0$，则

$$x\alpha y=\begin{cases}f^{-1}\left(\dfrac{f(y)}{f(x)}\wedge 1\right), & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}.$$

证明
$$\begin{aligned}x\alpha y&=\bigvee\{z\mid x\top z\leqslant y\}=\bigvee\{z\mid f^{-1}(f(x)f(z))\vee f(0)\leqslant y\}\\&=\bigvee\{z\mid f(x)f(z)\vee f(0)\leqslant f(y)\}=\bigvee\{z\mid f(x)f(z)\leqslant f(y)\}\\&=\bigvee\left\{z\mid f(z)\leqslant\frac{f(y)}{f(x)}\right\}\ (\text{如果 } f(x)\neq 0)\\&=\bigvee\left\{z\mid z\leqslant f^{-1}\left(\frac{f(y)}{f(x)}\wedge 1\right)\right\}=f^{-1}\left(\frac{f(y)}{f(x)}\wedge 1\right).\end{aligned}$$ □

2. S-蕴涵算子

定义 1.3.11 一个 S-蕴涵算子(S-implicator)是一个映射 $\Rightarrow_{\perp}:[0,1]\times[0,1]\rightarrow[0,1]$

$$(x\Rightarrow_{\perp} y)=N(x)\perp y \tag{1.3.24}$$

其中 $\perp$ 是[0,1]上的 t-余模，N 是[0,1]上的伪补.

很显然,S-蕴涵算子是一个 Fuzzy 蕴涵算子.

例 1.3.10　(1) 对于 $\vee$ 和 $N(x)=1-x$，有 $(x\Rightarrow_{\vee} y)=(1-x)\vee y$.

(2) 对于 $\hat{+}$ 和 $N(x)=1-x$，有 $(x\Rightarrow_{\hat{+}} y)=1-x+xy$.

(3) 对于 $\oplus$ 和 $N(x)=1-x$，有 $(x\Rightarrow_{\oplus} y)=1\wedge(1-x+y)$.

3. Q-蕴涵算子

定义 1.3.12　一个 Q-蕴涵算子(Q-implicator)是一个映射 $\Rightarrow_Q:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$

$$(x\Rightarrow_Q y)=N(x)\perp(x\top y) \tag{1.3.25}$$

其中 $\top$、$\perp$ 和 N 分别是[0,1]上的 t-模、t-余模和伪补，并且 $\top$ 和 $\perp$ 关于 N 是对偶的. Q-蕴涵算子也称为 QL-蕴涵算子.

很显然,Q-蕴涵算子是一个 Fuzzy 蕴涵算子.

例 1.3.11　(1) 对于 $\wedge$、$\vee$ 和 $N(x)=1-x$，有 $(x\Rightarrow_Q y)=(x\wedge y)\vee(1-x)$.

(2)对于 $\hat{\cdot}$、$\hat{+}$ 和 $N(x)=1-x$，有 $(x\Rightarrow_Q y)=1-x+x^2y$.

(3)对于 $\odot$、$\oplus$ 和 $N(x)=1-x$，有 $(x\Rightarrow_Q y)=(1-x)\vee y$.

1.3.3　弱 t-模

定义 1.3.13　(Fodor, 1991) 映射 $W:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$，如果 $\forall a,b,c,d\in[0,1]$ 满足条件：

(1) 边界条件 $W(a,1)\leqslant a, W(1,b)=b$;

(2) 单调性 $a\leqslant c,\ b\leqslant d\Rightarrow W(a,b)\leqslant W(c,d)$.

则称 W 为弱 t-模(weak t-norm). $W(a,b)$ 也可以写成 aWb.

定义 1.3.14　(Fodor, 1991) 设 W 是[0,1]上的弱 t-模,则在[0,1]上定义一个算子 α_W

$$a\alpha_W b=\vee\{x\mid aWx\leqslant b\},\quad \forall a,b\in[0,1] \tag{1.3.26}$$

很容易看到,对任意弱 t-模 W 有下面的不等式成立

$$W_w(a,b)\leqslant W(a,b)\leqslant a\wedge b,\quad \forall a,b\in[0,1] \tag{1.3.27}$$

其中

$$W_w(a,b)=\begin{cases}b, & a=1\\ 0, & a<1\end{cases} \tag{1.3.28}$$

是最弱的弱 t-模.

记 $\mathscr{W}$ 表示[0,1]上的全体弱 t-模,并且假设 $\forall a\in[0,1]$，$W(a,x)$ 在[0,1]上关于 x 是左连续的.

定理 1.3.19 设 $W, W_1, W_2 \in \mathscr{W}$，则有 $\forall a,b,c \in [0,1]$：

(1) $a\alpha_W x$ 在$[0,1]$上右连续；

(2) $1\alpha_W b = b$；

(3) $a \leqslant b \Rightarrow a\alpha_W b = 1$；

(4) $a\alpha_W b = 1 \Rightarrow (a \leqslant b \Leftrightarrow W(a,1) = a)$；

(5) $b \leqslant d \Rightarrow a\alpha_W b \leqslant a\alpha_W d$，$a \leqslant c \Rightarrow a\alpha_W b \geqslant c\alpha_W b$；

(6) $aW_1 b \leqslant aW_2 b \Rightarrow a\alpha_{W_1} b \geqslant a\alpha_{W_2} b$；

(7) $c \leqslant a\alpha_W b \Leftrightarrow aWc \leqslant b$；

(8) W 满足结合律 $\Rightarrow (aWb)\alpha_W c = (b\alpha_W(a\alpha_W c))$；

(9) W 满足交换律和结合律 $\Rightarrow (aWb)\alpha_W c = (b\alpha_W(a\alpha_W c)) = (a\alpha_W(b\alpha_W c))$；

(10) $aWb = \wedge\{x \mid a\alpha_W x \geqslant b\}$.

证明 由定义 1.3.13 与定义 1.3.14，用类似证明定理 1.3.14 与定理 1.3.15的方法易证. □

由定义 1.3.13 易知

$$a\alpha_{W_w} b = \begin{cases} 1, & a < 1 \\ b, & a = 1 \end{cases} \tag{1.3.29}$$

例 1.3.12 设 $\top, \top_1$ 是任意 t-模，并且 $\perp$ 是任意 t-余模，则

$$W(a,b) = \top_1(\top(a,b), \perp(a,b)), \ \forall a,b \in [0,1]$$

是弱 t-模，并且满足下列性质，$\forall a,b \in [0,1]$：

(1) $W(a,b) = W(b,a)$；

(2) $W(a,1) = a$，$W(1,b) = b$.

但 W 不一定是 t-模，事实上，若 $\top_1 = \cdot$，$\top = \odot$，$\perp = \vee$，则

$$W(a,b) = (a \odot b)(a \vee b)$$

易验证 $W(W(0.8,0.5),0.9) = 0.126$，$W(0.8, W(0.5,0.9)) = 0.128$，即 W 不满足结合律. □

例 1.3.13 设 $\top, \top_1$ 是任意 t-模，则 $W(a,b) = \top_1(a, \top(a,b))$ 是弱 t-模，但不一定是 t-模. 事实上，若 $\top_1$ 是 Archimedean t-模，则 $W(a,1) = a \top_1 a < a$，$\forall a \in (0,1)$. □

例 1.3.14 设 $W(a,b) = \max\left\{\dfrac{a+b-1}{2-a}, 0\right\}$，则 $W(a,1) = \dfrac{a}{2-a}$，$W(1,b) = b$，W 是弱 t-模，但不是 t-模，事实上，$\forall a \in [0,1)$，$aW1 < a$. 并且

$$a\alpha_W b = \min\{(2-a)b - a + 1, 1\}.$$ □

例 1.3.15 设 $W(a,b) = \max\left\{\dfrac{a+b-1}{a+b-ab}, 0\right\}$，则 $W(a,b) = W(b,a)$，

$W(a,1)=a$，W 是弱 t-模，但不是 t-模（容易验证 W 不满足结合律）. 并且

$$a\alpha_W b=\begin{cases}1, & a\leqslant b\\ \dfrac{ab+1-a}{ab+1-b}, & a>b\end{cases}.$$ □

1.3.4　Fuzzy 集的 Cartesian 乘积

定义 1.3.15　（Zadeh，1971）设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 分别是 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的 Fuzzy 集，则 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的 Cartesian 乘积（或直积）是乘积空间 $X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ 的一个 Fuzzy 集，记为 $A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$ 或 $\prod_{i=1}^{n}A_i$，其隶属函数为

$$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n(x)=\bigwedge_i\{A_i(x)\mid x=(x_1, x_2, \cdots, x_n), x_i\in X_i\}\tag{1.3.30}$$

视 $(A_1, A_2, \cdots, A_n)$ 与 $\prod_{i=1}^{n}A_i$ 为同一，则 $\prod_{i=1}^{n}A_i\in\prod_{i=1}^{n}\mathscr{F}(X_i)$.

例 1.3.16　在实数域 $\mathbf{R}$ 上给定两 Fuzzy 集

$$A=\int_{[0,10]}\frac{1-0.1x}{x}$$

$$B=\int_{[0,5]}\frac{0.2y}{y}$$

由 $1-0.1x=0.2y$ 得 $y=5-\frac{1}{2}x$，从而

$$A\times B=\int_{D_1}\frac{0.2y}{(x,y)}+\int_{D_2}\frac{1-0.1x}{(x,y)}$$

其中 D_1, D_2 如图 1.3.2 所示.

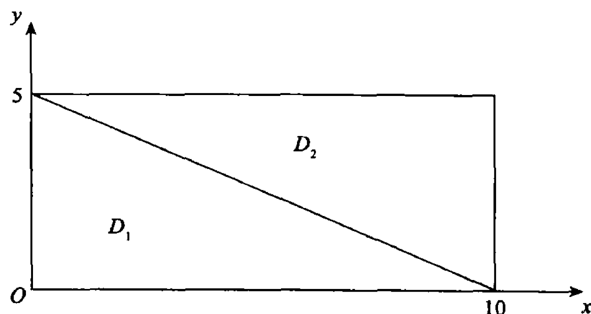


图 1.3.2　Fuzzy 集 A 与 B 的 Cartesian 乘积论域

$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的 Cartesian 乘积也可以用 t-模 $\top$ 来定义，称为 $\top$-乘积（$\top$-product），即

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \top(A_1(x_1), A(x_2), \cdots, A(x_n)), x_i \in X_i \tag{1.3.31}$$

§1.4 Fuzzy 性的度量

Fuzzy 性的度量主要包括 Fuzzy 集的 Fuzzy 性度量、Fuzzy 算子的 Fuzzy 性度量与 Fuzzy 集之间的 Fuzzy 性度量.

1.4.1 Fuzzy 集的基数

Fuzzy 集的基数是经典概念的推广，主要有三种推广方法：标量基数（Scalar cardinalities），整数基数（integer cardinalities）和 Fuzzy 基数（fuzzy cardinalities）.

定义 1.4.1 （De Luca，Termini，1972）对于论域 X 上的有限 Fuzzy 集 A，A 的基数或势（cardinality or power）σ_A 定义为

$$\sigma_A = \sum_{x \in \mathrm{supp}(A)} A(x) \tag{1.4.1}$$

当 X 是有限论域时，$r_A = \dfrac{\sigma_A}{|X|}$ 称为 Fuzzy 集 A 的相对基数（relative cardinality）.

显然，Fuzzy 集的相对势依赖于论域的势. 因此如果要通过相对势比较 Fuzzy 集，必须选择相同的论域.

Dubois 和 Prade(1985)用区间 $[|\ker A|, \sigma_A]$ 表示 A 的 Fuzzy 集 A 的可能标量基数，记为 DPs(A).

例 1.4.1 设 $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$，$A = \dfrac{0.5}{x_1} + \dfrac{0.2}{x_2} + \dfrac{0.8}{x_3} + \dfrac{1}{x_5}$，则 $\sigma_A = 2.5$，$r_A = 0.5$，DPs$(A) = [1, 2.5]$. □

定义 1.4.2 （Ralescu，1995）对于论域 X 上的有限 Fuzzy 集 A，A 的整数基数是 X 上 A 的隶属度不小于 0.5 的个数，记为 ncard(A).

Wygralak(1997)则将区间 $[\underline{\mathrm{ncard}}(A), \mathrm{ncard}(A)]$ 作为 A 的基数，其中 $\underline{\mathrm{ncard}}(A)$ 为 X 上 A 的隶属度大于 0.5 的个数.

在例 1.4.1 中，$[\underline{\mathrm{ncard}}(A), \mathrm{ncard}(A)] = [2, 3]$.

对于 Fuzzy 基数将在 §2.6 中讨论.

Wygralak(2003)给出了 Fuzzy 集的标量基数的公理化定义.

定义 1.4.3　(Wygralak, 2003) 映射 $sc:\mathscr{F}\mathscr{F}(X)\to[0,\infty)$ 称为论域 X 上有限 Fuzzy 集的一个标量基数(scalar cardinality)，如果该映射满足下列条件：

(W1) 一致性 $sc\left(\frac{1}{x}\right)=1$，$\forall x\in X$；

(W2) 单调性 $\forall a,b\in[0,1]$，$\forall x,y\in X$，　$a\leqslant b\Rightarrow sc\left(\frac{a}{x}\right)\leqslant sc\left(\frac{b}{y}\right)$；

(W3) 可加性 $\forall A,B\in\mathscr{F}\mathscr{F}(X)$.

$$\operatorname{supp}(A)\cap\operatorname{supp}(B)=\varnothing\Rightarrow sc(A\cup B)=sc(A)+sc(B). \tag{1.4.2}$$

显然定义 1.4.1 中的基数 σ_A 符合定义 1.4.3 的三个公理.

定理 1.4.1　(Wygralak, 2000) 设 $sc:\mathscr{F}\mathscr{F}(X)\to[0,\infty)$ 是论域 X 上有限 Fuzzy 集的一个标量基数，则：

(1) $sc\left(\frac{0}{x}\right)=0$，$\forall x\in X$ 并且 $sc(\varnothing)=0$；

(2) $\forall a,b\in[0,1]$，$\forall x,y\in X$

$$a=b\Rightarrow sc\left(\frac{a}{x}\right)=sc\left(\frac{b}{y}\right) \tag{1.4.3}$$

(3) $\forall A,B\in\mathscr{F}\mathscr{F}(X)$

$$A\subseteq B\Rightarrow sc(A)\leqslant sc(B) \tag{1.4.4}$$

(4) $\forall A\in\mathscr{F}\mathscr{F}(X)$

$$|\ker(A)|\leqslant sc(A)\leqslant|\operatorname{supp}(A)| \tag{1.4.5}$$

(5) $\forall A,B\in\mathscr{F}\mathscr{F}(X)$

$$sc(A)+sc(B)=sc(A\cup B)+sc(A\cap B) \tag{1.4.6}$$

(6) $\forall A_i\in\mathscr{F}\mathscr{F}(X)$，$i=1,2,\cdots,n$，

$$sc\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)\leqslant\sum_{i=1}^{n}sc(A_i). \tag{1.4.7}$$

证明　(1)由公理(W3)知，$\forall x\in X$，则

$$sc\left(\frac{1}{x}\right)=sc\left(\left(\frac{0}{x}\right)\cup\left(\frac{1}{x}\right)\right)=sc\left(\frac{0}{x}\right)+sc\left(\frac{1}{x}\right)$$

由此得到 $sc\left(\frac{0}{x}\right)=0$，从而 $sc(\varnothing)=0$.

(2) 由公理(W2)直接得到.

(3) 设 $A\in\mathscr{F}\mathscr{F}(X)$，则 $A=\bigcup\limits_{x\in\operatorname{supp}(A)}\frac{A(x)}{x}$. 对于 $A,B\in\mathscr{F}\mathscr{F}(X)$ 并且 $A\subseteq B$，由公理(W3)和公理(W2)得到

$$sc(A)=sc\left(\bigcup_{x\in\operatorname{supp}(A)}\frac{A(x)}{x}\right)=\sum_{x\in\operatorname{supp}(A)}sc\left(\frac{A(x)}{x}\right)\leqslant\sum_{x\in\operatorname{supp}(B)}sc\left(\frac{B(x)}{x}\right)=sc(B).$$

(4) 设 $A\in\mathscr{F}\mathscr{F}(X)$，则 $\sum\limits_{x\in\ker(A)}\frac{1}{x}\subseteq A\subseteq\sum\limits_{x\in\operatorname{supp}(A)}\frac{1}{x}$，于是由(3)得到(4).

(5) 由公理(W3)和(2)即得.

(6) 由(5)得到，$sc(A\cup B)\leqslant sc(A)+sc(B)$，从而(6)成立. □

定理 1.4.2 (Wygralak, 2000) 映射 $sc:\mathscr{F}\mathscr{F}(X)\to[0,\infty)$ 是论域 X 上的一个标量基数当且仅当对每一个 $A\in\mathscr{F}\mathscr{F}(X)$

$$sc(A)=\sum_{x\in\operatorname{supp}(A)}f(A(x))\tag{1.4.8}$$

其中，函数 $f:[0,1]\to[0,1]$ 满足

(1) $f(0)=0$，$f(1)=1$；

(2) $a\leqslant b\Rightarrow f(a)\leqslant f(b)$，$\forall a,b\in[0,1]$.

证明 ($\Rightarrow$) 如果 $sc:\mathscr{F}\mathscr{F}(X)\to[0,\infty)$ 满足公理(W1)～(W3)，则由公理(W3)推出

$$sc(A)=\sum_{x\in\operatorname{supp}(A)}sc\left(\frac{A(x)}{x}\right).$$

假设 $f(a)\triangleq sc\left(\frac{a}{x}\right):[0,1]\to[0,1]$（对任意 $x\in X$）（注意定理 1.4.1(2)）. 由定理 1.4.1(1)和公理(W1)分别得到 $f(0)=0$ 和 $f(1)=1$. 再由公理(W2)得到(2).

($\Leftarrow$) 假设 $f:[0,1]\to[0,1]$ 满足(1)、(2)，并且对每一个 $A\in\mathscr{F}\mathscr{F}(X)$，

$$sc(A)=\sum_{x\in\operatorname{supp}(A)}f(A(x)).$$

由 $f(1)=1$ 可以直接得到一致性，即 $sc\left(\frac{1}{x}\right)=1$，$\forall x\in X$.

$\forall a,b\in[0,1]$，$\forall x,y\in X$

$$a\leqslant b\Rightarrow sc\left(\frac{a}{x}\right)=f(a)\leqslant f(b)=sc\left(\frac{b}{y}\right).$$

假设 $A,B\in\mathscr{F}\mathscr{F}(X)$，并且 $\operatorname{supp}(A)\cap\operatorname{supp}(B)=\varnothing$，这时

$$\operatorname{supp}(A\cup B)=\operatorname{supp}(A)\cup\operatorname{supp}(B)$$

于是

$$sc(A\cup B)=\sum_{x\in\operatorname{supp}(A\cup B)}f((A\cup B)(x))=\sum_{x\in\operatorname{supp}(A)}f(A(x))+\sum_{x\in\operatorname{supp}(B)}f(B(x))=sc(A)+sc(B).$$ □

下面给出符合定义 1.4.3 的一些标量基数.

例 1.4.2 (Wygralak, 2000) (1) 取 $f(a)=0,a\in[0,1)$，$f(1)=1$，则

$$sc(A)=\sum_{x\in \mathrm{supp}(A)} f(A(x))=|\ker(A)|.$$

(2) 取 $f(a)=1, a\in(0,1]$, $f(0)=0$, 则

$$sc(A)=\sum_{x\in \mathrm{supp}(A)} f(A(x))=|\mathrm{supp}(A)|.$$

(3) 取 $f(a)=a^k, a\in[0,1]$, $k\in\mathbf{N}$ 则：

当 $k=0$ 时, $sc(A)=|\mathrm{supp}(A)|$.

当 $k=1$ 时, $sc(A)=\sigma_A$.

当 $k=2$ 时, $sc(A)=\sum_{x\in \mathrm{supp}(A)} (A(x))^2$.

当 $k\to\infty$, $sc(A)\to|\ker(A)|$.

(4) 取 $f(a)=\begin{cases}0, & a\in[0,\alpha)\\ 1, & a\in[\alpha,1)\end{cases}$, $\alpha\in(0,1]$, 则 $sc(A)=|\{x\,|\,A(x)\geqslant\alpha\}|$.

(5) 取 $f(a)=\begin{cases}0, & a\in[0,\alpha]\\ 1, & a\in(\alpha,1]\end{cases}$, $\alpha\in[0,1)$, 则 $sc(A)=|\{x\,|\,A(x)>\alpha\}|$.

□

1.4.2 Fuzzy 集的 Fuzzy 度

一个 Fuzzy 集到底模糊到什么程度？又怎样来度量这种程度？这是 Fuzzy 集的 Fuzzy 度问题. 关于 Fuzzy 集的 Fuzzy 度的研究是从 Luca 与 Termini (1972)开始的,后来经许多学者的完善性研究,得到下面比较合理的定义.

定义 1.4.4 (De Luca, Termini, 1972) 若映射 $d:\mathscr{F}(X)\to[0,1]$ 满足条件：

(1)当且仅当 $A\in\mathscr{P}(X)$ 时, $d(A)=0$;

(2)当且仅当 $A(x)\equiv\frac{1}{2}$ 时, $d(A)=1$;

(3) $\forall x\in X$, 当 $B(x)\leqslant A(x)\leqslant\frac{1}{2}$ 时, $d(B)\leqslant d(A)$;

(4) $\forall A\in\mathscr{F}(X)$, $d(A)=d(A^c)$.

称映射 d 为 $\mathscr{F}(X)$ 上的一个 Fuzzy 度或 Fuzzy 熵(measure of fuzziness, fuzzy entropy measure),称 $d(A)$ 为 Fuzzy 集 A 的 Fuzzy 度或 Fuzzy 熵.

定义 1.4.4 给出了关于 Fuzzy 度的四条公理. 这四条公理的合理性可以作如下理解：

公理(1)表明经典集是不模糊的；

公理(2)和公理(3)表明越靠近 0.5,就越模糊,尤其是当 $A(x)\equiv0.5$ 时,是最模糊的,这时

$$A^c(x)=1-A(x)=0.5$$

这种模棱两可的情况是最难决策的；

公理(4)表明集 A 与其补集 A^c 具有同等的模糊度，因为

$$|A(x)-0.5|=|A^c(x)-0.5|$$

即 $A(x)$ 和 $A^c(x)$ 与 0.5 的距离相等.

当论域为有限时，Fuzzy 度有下列一般形式.

定理 1.4.3 设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，且映射 $d:\mathscr{F}(X)\to[0,1]$ 为 $d(A)=g\left(\sum_{i=1}^{n}c_i f_i(A(x_i))\right)$，$\forall A\in\mathscr{F}(X)$，其中 c_i 为正的实数，$g:[0,a]\to[0,1]$ 严格单调增且 $g(a)=1$，$g(0)=0$，$a=\sum_{i=1}^{n}c_i f_i(0.5)$，而 $f_i:[0,1]\to[0,+\infty)$ 满足：

(1) $\forall t\in[0,1]$，$f_i(t)=f_i(1-t)$；

(2) $f_i(0)=0$；

(3) $f_i(t)$ 在$[0,0.5]$上严格单调增.

则 $d(A)$ 是 A 在 $\mathscr{F}(X)$ 上的 Fuzzy 度.

证明 由条件，$\forall i=1,2,\cdots,n$，$f_i(0)=f_i(1)=0$，且若 $A\in\mathscr{P}(X)$，则 $A(x_i)=0$ 或 $A(x_i)=1$. 从而

$$d(A)=g\left(\sum_{i=1}^{n}c_i f_i(A(x_i))\right)=g(0)=0$$

反之，若 $A\in\mathscr{F}(X)$，且 $d(A)=g\left(\sum_{i=1}^{n}c_i f_i(A(x_i))\right)=g(0)=0$，则 $\sum_{i=1}^{n}c_i f_i(A(x_i))=0$，从而 $\forall i=1,2,\cdots,n$，$A(x_i)=0$ 或 $A(x_i)=1$，即 $A\in\mathscr{P}(X)$.

又 $A(x)\equiv 0.5\Rightarrow d(A)=g\left(\sum_{i=1}^{n}c_i f_i(0.5)\right)=g(a)=1$；另一方面

$$d(A)=1\Rightarrow g\left(\sum_{i=1}^{n}c_i f_i(A(x_i))\right)=1\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}c_i f_i(A(x_i))=a=\sum_{i=1}^{n}c_i f_i(0.5)$$

$$\Rightarrow\forall i=1,2,\cdots,n,\ A(x_i)=0.5\Rightarrow A(x)\equiv 0.5$$

至于定义 1.4.4 中(3)、(4)可以类似验证.

从而 d 是 Fuzzy 度. □

如果定理 1.4.3 中的 g 是线性的，即，若 $g(x)=kx\ (k>0)$，则有

$$\forall A,B\in\mathscr{F}(X),\ d(A\cup B)+d(A\cap B)=d(A)+d(B)$$

下面给出几个例子.

例 1.4.3 设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，且若 $A\in\mathscr{F}(X)$，有

$$d_p(A)=\frac{2}{n^{\frac{1}{p}}}\left(\sum_{i=1}^{n}|A(x_i)-A_{0.5}(x_i)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

其中 $p>0$，而

$$A_{0.5}(x_i)=\begin{cases}1, & A(x_i)\geqslant 0.5\\ 0, & A(x_i)<0.5\end{cases}$$

则 $d_p(A)$ 为 A 的 Fuzzy 度. 事实上，令 $g(x)=2\left(\frac{x}{n}\right)^{\frac{1}{p}}$，而且设 $\forall i=1,2,\cdots,n$，$f_i=f$. 而

$$f(x)=\begin{cases}|x-1|^p, & x\geqslant 0.5\\ |x-0|^p, & x<0.5\end{cases}=|0.5-|0.5-x||^p$$

$$c_1=c_2=\cdots=c_n=1$$

则 $f(1-x)=|0.5-|0.5-(1-x)||^p=|0.5-|x-0.5||^p=f(x)$

$f(0)=0$；若 $x_1,x_2\in[0,0.5]$，$x_1<x_2$，则

$$f(x_1)=x_1^p<x_2^p=f(x_2)$$

即 f 在$[0,0.5]$上严格单调递增. 而 $f(0.5)=\frac{1}{2^p}$，则 $a=\sum_{i=1}^{n}f(0.5)=\frac{n}{2^p}$，从而

$$g(0)=0,\quad g(a)=2\cdot\frac{1}{n^{\frac{1}{p}}}\cdot\frac{n^{\frac{1}{p}}}{2}=1$$

故 $g:[0,a]\to[0,1]$ 严格单调递增. 这样，$f_i(i=1,2,\cdots,n)$，g 满足定理1.4.3的条件，故 $d_p(A)$ 为 A 的 Fuzzy 度. □

称 d_p 为 Minkowski Fuzzy 度，特别地，当 $p=1$ 时，称 $d_1(A)$ 为 A 的 Hamming Fuzzy 度，即

$$d_1(A)=\frac{2}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}|A(x_i)-A_{0.5}(x_i)|$$

当 $p=2$ 时，称 $d_2(A)$ 为 A 的 Euclid Fuzzy 度，即

$$d_2(A)=\frac{2}{n^{\frac{1}{2}}}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}|A(x_i)-A_{0.5}(x_i)|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

例 1.4.4 设 $X=\{a,b,c,d\}$，而 $A=\frac{0.8}{a}+\frac{0.9}{b}+\frac{0.1}{c}+\frac{0.8}{d}$，$B=\frac{0.3}{a}+\frac{0.3}{c}$，则因为

$$A_{0.5}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{d},\quad B_{0.5}=\varnothing$$

于是

$$d_1(A)=\frac{2}{4}(|0.8-1|+|0.9-1|+|0.1-0|+|0.8-1|)=0.3$$

$$d_1(B)=\frac{2}{4}(|0.3|+|0.3|)=0.3$$

$$d_2(A)=\frac{2}{\sqrt{4}}(|0.8-1|^2+|0.9-1|^2+|0.1-0|^2+|0.8-1|^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\sqrt{0.1}\approx 0.316$$

$$d_2(B)=\frac{2}{\sqrt{4}}(|0.3|^2+|0.3|^2)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{0.18}\approx 0.424.$$ □

由例 1.4.4 知，$d_1(A)=d_1(B)$，但 $d_2(A)<d_2(B)$. 由此可见：Hamming Fuzzy度计算简单，但误差大，而 Euclid Fuzzy 度虽计算复杂，但较精确.

例 1.4.5 设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，$s(x)$ 为 Shannon 函数，即

$$s(x)=\begin{cases}-x\ln x-(1-x)\ln(1-x), & x\in(0,1)\\ 0, & x=0,1\end{cases}$$

若 $A\in\mathscr{F}(X)$，则

$$H(A)=\frac{1}{n\ln 2}\sum_{i=1}^{n}s(A(x_i))$$

为 A 的 Fuzzy 度.

其证明只要在定理 1.4.3 中，令 $c_i=1$，$f_i(x)\equiv s(x)$ $(i=1,2,\cdots,n,x\in[0,1])$，而 $g(x)=\frac{x}{n\ln 2}$ 即可得到. □

例 1.4.6 (Shang, Jiang, 1997) 设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，若 $A\in\mathscr{F}(X)$，则按定义可以直接验证

$$H(A)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{A(x_i)\wedge A^c(x_i)}{A(x_i)\vee A^c(x_i)}$$

为 A 的 Fuzzy 度. □

1.4.3 Fuzzy 算子的清晰域

若 A 是 X 上的 Fuzzy 集，则对于任意 $x\in X$，$A(x)$ 可以视为 x 对 A 的隶属程度. 因此当 $A(x)=0$ 时，表示 $x\overline{\in}A$；而 $A(x)=1$，则表示 $x\in A$，都不存在 Fuzzy 性，将这样的 x 称为清晰点. 从而，使 $A(x)\in(0,1)$ 的 x 就是 Fuzzy 点，并且以 $A(x)=0.5$ 的 x 是“最”模糊的点. 下面主要讨论 Fuzzy 算子获得“清晰结果”的区域.

定义 1.4.5 设 $*$ 是[0,1]上的一个 Fuzzy 算子，且记

$$\sigma(*)=\{(x,y)\in[0,1]^2 \mid x*y=0 \text{ 或 } 1\} \tag{1.4.9}$$

称区域 $\sigma(*)$ 为 Fuzzy 算子 $*$ 的清晰域(crisp domain).

容易验证下面的性质：

(1) $(x,y)\in\sigma(\top)\Rightarrow(y,x)\in\sigma(\top)$;

(2) $(\{0\}\times[0,1])\cup([0,1]\times\{0\})\cup\{(1,1)\}\subseteq\sigma(\top)\subseteq[0,1]\times[0,1]$;

(3) $(\{1\}\times[0,1])\cup([0,1]\times\{1\})\cup\{(0,0)\}\subseteq\sigma(\bot)\subseteq[0,1]\times[0,1]$.

其中 $\top$ 与 $\bot$ 分别为 t-模与 t-余模.

例 1.4.7　考虑算子

$$a\overset{+}{\vee}_2 b=((a^2+b^2)\wedge 1)^{\frac{1}{2}}$$

$$a\overset{\cdot}{\wedge}_2 b=((a^2+b^2-1)\vee 0)^{\frac{1}{2}}$$

$$N_2(a)=(1-a^2)^{\frac{1}{2}}$$

和

$$a\overset{+}{\vee}_{\frac{1}{2}} b=((\sqrt{a}+\sqrt{b})\wedge 1)^2$$

$$a\overset{\cdot}{\wedge}_{\frac{1}{2}} b=((\sqrt{a}+\sqrt{b}-1)\vee 0)^2$$

$$N_{\frac{1}{2}}(a)=(1-\sqrt{a})^2$$

其中 $a,b\in[0,1]$. 由定理 1.3.10 知，$\overset{+}{\vee}_2$ 与 $\overset{\cdot}{\wedge}_2$ 是关于 N_2 对偶的有补 t-模与有补 t-余模(取 $g(x)=x^2$，有界和与有界积)；$\overset{+}{\vee}_{\frac{1}{2}}$ 与 $\overset{\cdot}{\wedge}_{\frac{1}{2}}$ 是关于 $N_{\frac{1}{2}}$ 对偶的有补 t-模与有补 t-余模(取 $g(x)=\sqrt{x}$，有界和与有界积). 四个算子各自的清晰域分别是(如图 1.4.1、图 1.4.2 所示)

$$\sigma(\overset{+}{\vee}_2)=\{(x,y)\in[0,1]^2 \mid x^2+y^2\geqslant 1\}\cup\{(0,0)\}$$

$$\sigma(\overset{\cdot}{\wedge}_2)=\{(x,y)\in[0,1]^2 \mid x^2+y^2\leqslant 1\}\cup\{(1,1)\}$$

$$\sigma(\overset{+}{\vee}_{\frac{1}{2}})=\{(x,y)\in[0,1]^2 \mid \sqrt{x}+\sqrt{y}\geqslant 1\}\cup\{(0,0)\}$$

$$\sigma(\overset{\cdot}{\wedge}_{\frac{1}{2}})=\{(x,y)\in[0,1]^2 \mid \sqrt{x}+\sqrt{y}\leqslant 1\}\cup\{(1,1)\}$$

下面只讨论 t-模的清晰域，关于 t-余模的结论可以对偶地得到.

例 1.4.8　如图 1.4.3 所示，记 $\sigma_m=(\{0\}\times[0,1])\cup([0,1]\times\{0\})\cup\{(1,1)\}$，有

$$\sigma(\wedge)=\sigma(\hat{\cdot})=\sigma(\dot{\varepsilon})=\sigma(\dot{\gamma})=\sigma_m.$$

例 1.4.9　$\sigma(\dot{y})=\{(x,y)\in[0,1]^2 \mid (1-x)^p+(1-y)^p\geqslant 1\}\cup\{(1,1)\}$ $(p\geqslant 1)$

$$\sigma(\odot)=\{(x,y)\in[0,1]^2\,|\,x+y\leqslant 1\}\cup\{1,1\}.$$

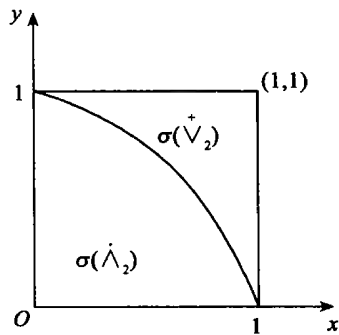


图 1.4.1 $\sigma(\dot{\vee}_2)$与$\sigma(\dot{\wedge}_2)$的图形

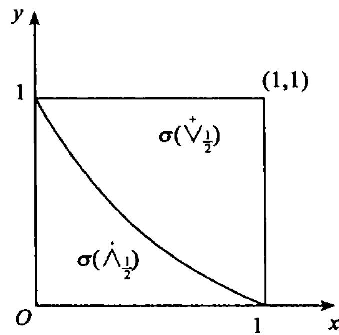


图 1.4.2 $\sigma(\dot{\vee}_{\frac{1}{2}})$与$\sigma(\dot{\wedge}_{\frac{1}{2}})$的图形

如图 1.4.4、图 1.4.5 所示.

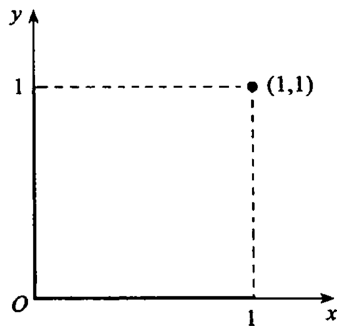


图 1.4.3 σ_m 的图形

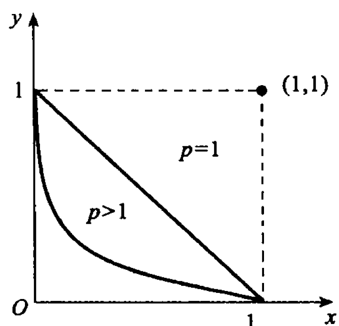


图 1.4.4 $\sigma(\dot{y})$的图形

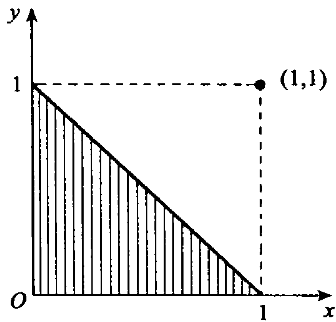


图 1.4.5 $\sigma(\odot)$ 的图形

1.4.4 Fuzzy 算子的"与"度和"或"度

1980 年，Yager 首先提出了"与"度和"或"度的思想，用"与"度和"或"度的概念来衡量各类模糊算子的严格程度.

定义 1.4.6 设$\top$为$[0,1]$上的任一连续 t-模，称

$$AD(\top) \triangleq 1 - 3\int_0^1\int_0^1 (x \top y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1.4.10}$$

为"与"度(the strength of "and")；若 $\perp$ 是与$\top$对偶的 t-余模，则 $\perp$ 的"或"度(the strength of "or")为

$$OD(\perp) \triangleq AD(\top) \tag{1.4.11}$$

例 1.4.10 (1) $AD(\wedge) = OD(\vee) = 0$；

(2) $AD(\hat{\cdot}) = OD(\hat{+}) = \frac{1}{4}$；

(3) $AD(\odot) = OD(\oplus) = \frac{1}{2}$. □

定理 1.4.4 $0 \leqslant AD(\top) \leqslant 1$.

证明 因为 $0 \leqslant x \top y \leqslant x \wedge y$，所以

$$0 \leqslant \int_0^1\int_0^1 (x \top y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant \int_0^1\int_0^1 (x \wedge y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{3}$$

从而 $0 \leqslant AD(\top) \leqslant 1$. □

1.4.5 Fuzzy 集的距离

定义 1.4.7 设 $X \neq \varnothing$，若映射 $\rho: X \times X \to \mathbf{R}$ 满足下列条件：$\forall x,y,z \in X$：

(1)正规性：$\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$；

(2)对称性：$\rho(x,y) = \rho(y,x)$；

(3)三角不等式：$\rho(x,z) \leqslant \rho(x,y) + \rho(y,z)$.

则称 ρ 是 X 上的距离函数，称 $\rho(x,y)$ 为 X 上 x 与 y 的距离，而称 (X,ρ) 为一个度量空间或距离空间. 若映射 ρ 满足(2)、(3)和

(1′) $\rho(x,x) = 0$.

则称 ρ 是 X 上的拟距离函数，$\rho(x,y)$ 称为 X 上 x 与 y 的拟距离.

下面是 Fuzzy 集之间常用的(拟)距离公式. 下面 $\mathscr{I}([a,b])$表示$[a,b]$($a<b$)上隶属函数可积的 Fuzzy 集全体.

1. Chebyshev 距离

设 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$，$A,B \in \mathscr{F}(X)$，令

$$\rho_C(A,B) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |A(x_i) - B(x_i)| \tag{1.4.12}$$

则 ρ_C 是 $\mathscr{F}(X)$ 上的距离函数.

2. Minkowski 距离

设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$, $A,B\in\mathscr{F}(X)$, 令

$$\rho_M^{(p)}(A,B)=\left(\sum_{i=1}^{n}\omega_i\,(A(x_i)-B(x_i))^p\right)^{\frac{1}{p}},\ p>0 \tag{1.4.13}$$

其中 $0<\omega_i<1, i=1,2,\cdots,n$, $\sum_{i=1}^{n}\omega_i=1$. 特别地, $\omega_i=\frac{1}{n}, i=1,2,\cdots,n$,

$$\rho_M^{(p)}(A,B)=\frac{1}{\sqrt[p]{n}}\left(\sum_{i=1}^{n}(A(x_i)-B(x_i))^p\right)^{\frac{1}{p}},\ p>0 \tag{1.4.14}$$

则 $\rho_M^{(p)}$ 是 $\mathscr{F}(X)$ 上的距离函数.

而当 $X=[a,b]$时, $A,B\in\mathscr{I}([a,b])\subseteq\mathscr{F}([a,b])$,令

$$\rho_M^{(p)}(A,B)=\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b(A(x)-B(x))^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.4.15}$$

则 $\rho_M^{(p)}(A,B)$ 是 $\mathscr{I}([a,b])$上 A 与 B 的拟距离.

特别地, 当 $p=1$ 时, 称为 Hamming 距离, 记为 ρ_H, 即当 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$, $A,B\in\mathscr{F}(X)$ 时

$$\rho_H(A,B)=\sum_{i=1}^{n}\omega_i\,|A(x_i)-B(x_i)| \tag{1.4.16}$$

或

$$\rho_H(A,B)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|A(x_i)-B(x_i)| \tag{1.4.17}$$

而当 $X=[a,b]$时, $A,B\in\mathscr{I}([a,b])\subseteq\mathscr{F}([a,b])$

$$\rho_H(A,B)=\frac{1}{b-a}\int_a^b|A(x)-B(x)|\,\mathrm{d}x \tag{1.4.18}$$

当 $p=2$ 时, 称为 Euclid 距离, 记为 ρ_E, 即当 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$, $A,B\in\mathscr{F}(X)$ 时

$$\rho_E(A,B)=\left(\sum_{i=1}^{n}\omega_i\,(A(x_i)-B(x_i))^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.4.19}$$

或

$$\rho_E(A,B)=\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sum_{i=1}^{n}(A(x_i)-B(x_i))^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.4.20}$$

而当 $X=[a,b]$时, $A,B\in\mathscr{I}([a,b])\subseteq\mathscr{F}([a,b])$,则令

$$\rho_E(A,B)=\frac{1}{\sqrt{b-a}}\left(\int_a^b(A(x)-B(x))^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.4.21}$$

3. 并交模差距离

设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$, $A,B\in\mathscr{F}(X)$, 令

$$\rho_{Ui}(A,B)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(A(x_i)\vee B(x_i))-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(A(x_i)\wedge B(x_i)) \tag{1.4.22}$$

则 ρ_{Ui} 是 $\mathscr{F}(X)$ 上的距离函数.

而当 $X=[a,b]$时, $A,B\in\mathscr{I}([a,b])\subseteq\mathscr{F}([a,b])$,令

$$\rho_{Ui}(A,B)=\frac{1}{b-a}\int_a^b(A(x)\vee B(x))\mathrm{d}x-\frac{1}{b-a}\int_a^b(A(x)\wedge B(x))\mathrm{d}x \tag{1.4.23}$$

则 ρ_{Ui} 是 $\mathscr{I}([a,b])$上的拟距离函数.

1.4.6 Fuzzy 集的贴近度

贴近度是对两个 Fuzzy 集接近程度的一种度量.

定义 1.4.8 设 $\{\varnothing,X\}\subseteq\mathscr{B}\subseteq\mathscr{F}(X)$, 若映射 $N:\mathscr{B}\times\mathscr{B}\to[0,1]$ 满足下列条件: $\forall A,B,C\in\mathscr{B}$:

(1) $N(A,A)=1$, $N(X,\varnothing)=0$;

(2) $N(A,B)=N(B,A)$;

(3)若 $A\subseteq B\subseteq C\Rightarrow N(A,C)\leqslant N(A,B)\wedge N(B,C)$.

则称 N 为 $\mathscr{B}$ 上的贴近度函数(similarity measure function),而 $N(A,B)$ 称为 A 与 B 的贴近度(similarity measure or similarity degree).

若公理(1)换为

(1′) $N(A,B)=1\Leftrightarrow A=B$, 且 $N(X,\varnothing)=0$.

则称 N 为 $\mathscr{B}$ 上严格贴近度函数(strict similarity measure function).

容易验证下面介绍的都是贴近度函数,它们都有形式简单、计算方便、意义明确等特点. 都具有实际使用价值. 下面 $\mathscr{I}([a,b])$仍表示$[a,b](a<b)$上隶属函数可积的 Fuzzy 集全体.

1. Chebyshev 贴近度 N_C

设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$, $A,B\in\mathscr{F}(X)$, 令

$$N_C(A,B)=1-\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{|A(x_i)-B(x_i)|\} \tag{1.4.24}$$

则 N_C 是 $\mathscr{F}(X)$ 上的严格贴近度函数.

2. Minkowski 贴近度 $N_M^{(p)}$

设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$, $A,B\in\mathscr{F}(X)$, 令

$$N_M^{(p)}(A,B)=1-\left(\sum_{i=1}^{n}\omega_i\ (A(x_i)-B(x_i))^p\right)^{\frac{1}{p}},\ p>0 \quad (1.4.25)$$

其中 $0<\omega_i<1, i=1,2,\cdots,n$，$\sum_{i=1}^{n}\omega_i=1$. 则 $N_M^{(p)}$ 是 $\mathscr{F}(X)$ 上的严格贴近度函数. 特别地，$\omega_i=\frac{1}{n}, i=1,2,\cdots,n$，则

$$N_M^{(p)}(A,B)=1-\frac{1}{\sqrt[p]{n}}\left(\sum_{i=1}^{n}(A(x_i)-B(x_i))^p\right)^{\frac{1}{p}},\ p>0 \quad (1.4.26)$$

而当 $X=[a,b]$时，$A,B\in\mathscr{I}([a,b])\subseteq\mathscr{F}([a,b])$，则令

$$N_M^{(p)}(A,B)=1-\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b(A(x)-B(x))^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \quad (1.4.27)$$

$N_M^{(p)}$ 是 $\mathscr{I}[a,b]$上的贴近度函数. 称其为 Minkowski 贴近度.

特别地，当 $p=1$ 时，称为 Hamming 贴近度，记为 N_H，即当 $X=\{x_1, x_2,\cdots,x_n\}$，$A,B\in\mathscr{F}(X)$ 时

$$N_H(A,B)=1-\sum_{i=1}^{n}\omega_i\,|A(x_i)-B(x_i)| \quad (1.4.28)$$

或

$$N_H(A,B)=1-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|A(x_i)-B(x_i)| \quad (1.4.29)$$

而当 $X=[a,b]$时，$A,B\in\mathscr{I}([a,b])\subseteq\mathscr{F}([a,b])$，

$$N_H(A,B)=1-\frac{1}{b-a}\int_a^b|A(x)-B(x)|\,\mathrm{d}x \quad (1.4.30)$$

当 $p=2$ 时，称为 Euclid 贴近度，记为 N_E，即当 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，$A,B\in\mathscr{F}(X)$ 时

$$N_E(A,B)=1-\left(\sum_{i=1}^{n}\omega_i\ (A(x_i)-B(x_i))^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.4.31)$$

或

$$N_E(A,B)=1-\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sum_{i=1}^{n}(A(x_i)-B(x_i))^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.4.32)$$

而当 $X=[a,b]$时，$A,B\in\mathscr{I}([a,b])\subseteq\mathscr{F}([a,b])$，则令

$$N_E(A,B)=1-\frac{1}{\sqrt{b-a}}\left(\int_a^b(A(x)-B(x))^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.4.33)$$

3. 绝对和差贴近度 N_{As}

设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，$A,B\in\mathscr{F}(X)$，令

$$N_{As}(A,B)=\begin{cases}1, & A=B=\varnothing \\ 1-\dfrac{\sum_{i=1}^{n}|A(x_i)-B(x_i)|}{\sum_{i=1}^{n}(A(x_i)+B(x_i))}, & \text{其他}\end{cases} \tag{1.4.34}$$

则 N_{As} 是 $\mathscr{F}(X)$ 上的严格贴近度函数.

而当 $X=[a,b]$时，$A,B\in\mathscr{I}([a,b])\subseteq\mathscr{F}([a,b])$，令

$$N_{As}(A,B)=\begin{cases}1, & \int_a^b A(x)\mathrm{d}x+\int_a^b B(x)\mathrm{d}x=0 \\ 1-\dfrac{\int_a^b|A(x)-B(x)|\mathrm{d}x}{\int_a^b(A(x)+B(x))\mathrm{d}x}, & \int_a^b A(x)\mathrm{d}x+\int_a^b B(x)\mathrm{d}x\neq 0\end{cases}$$

(1.4.35)

则 N_{As} 是 $\mathscr{I}([a,b])$上的贴近度函数.

4. 最大—最小贴近度 N_{Mm}

设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，$A,B\in\mathscr{F}(X)$，令

$$N_{Mm}(A,B)=\begin{cases}1, & A=B=\varnothing \\ \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(A(x_i)\wedge B(x_i))}{\sum_{i=1}^{n}(A(x_i)\vee B(x_i))}, & \text{其他}\end{cases} \tag{1.4.36}$$

则 N_{Mm} 是 $\mathscr{F}(X)$ 上的严格贴近度函数.

而当 $X=[a,b]$时，$A,B\in\mathscr{I}([a,b])\subseteq\mathscr{F}([a,b])$，令

$$N_{Mm}(A,B)=\begin{cases}1, & \int_a^b(A\cup B)(x)\mathrm{d}x=0 \\ \dfrac{\int_a^b(A\cap B)(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b(A\cup B)(x)\mathrm{d}x}, & \int_a^b(A\cup B)(x)\mathrm{d}x\neq 0\end{cases} \tag{1.4.37}$$

则 N_{Mm} 是 $\mathscr{I}([a,b])$上的贴近度函数.

5. 算术平均最小贴近度 N_{Aa}

设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，$A,B\in\mathscr{F}(X)$，令

$$N_{Aa}(A,B)=\begin{cases}1, & A=B=\varnothing \\ \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(A(x_i)\wedge B(x_i))}{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(A(x_i)+B(x_i))}, & \text{其他}\end{cases} \tag{1.4.38}$$

则 N_{Aa} 是 $\mathscr{F}(X)$ 上的严格贴近度函数.

而当 $X=[a,b]$时，$A,B\in\mathscr{I}([a,b])\subseteq\mathscr{F}([a,b])$，则令

$$N_{Aa}(A,B)=\begin{cases}1, & \int_a^b A(x)\mathrm{d}x+\int_a^b B(x)\mathrm{d}x=0 \\ \dfrac{\int_a^b (A\cap B)(x)\mathrm{d}x}{\frac{1}{2}\int_a^b (A(x)+B(x))\mathrm{d}x}, & \int_a^b A(x)\mathrm{d}x+\int_a^b B(x)\mathrm{d}x\neq 0\end{cases} \tag{1.4.39}$$

则 N_{Aa} 是 $\mathscr{I}([a,b])$上的贴近度函数.

当 $X=\mathbf{R}$ 时，如果 $A(x),B(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上可积且广义积分收敛，可以在 $\mathbf{R}$ 上类似定义绝对和差贴近度、最大—最小贴近度和算术平均贴近度.

6. 集函数贴近度 N_g

设 g 是 X 上的一集函数 $g:\mathscr{P}(X)\to[0,1]$，$M\mapsto g(M)\in[0,1]$，并且满足：

(1) $g(\varnothing)=0, g(X)=1$；

(2) $(\forall A,B\in\mathscr{P}(X))(A\subseteq B\Rightarrow g(A)\leqslant g(B))$.

$\forall A,B\in\mathscr{F}(X)$，令

$$N_g(A,B)=1-\bigvee_{\alpha\in[0,1]}\{\alpha\top g(\{x\,\|\,A(x)-B(x)|\geqslant\alpha\})\} \tag{1.4.40}$$

则 N_g 是 $\mathscr{F}(X)$ 上的贴近度函数，其中$\top$是 $[0,1]$ 上的 t-模.

例 1.4.11 设 $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$，而

$$A=\frac{0.5}{x_1}+\frac{0.7}{x_2}+\frac{1.0}{x_3}+\frac{0.9}{x_4}+\frac{0.6}{x_5}+\frac{0.3}{x_6}$$

$$B=\frac{0.7}{x_1}+\frac{0.8}{x_2}+\frac{0.9}{x_3}+\frac{1.0}{x_4}+\frac{0.7}{x_5}+\frac{0.5}{x_6}$$

则由定义可得

$$N_H(A,B)=1-\frac{1}{6}(0.2+0.1+0.1+0.1+0.1+0.2)\approx 0.867$$

$$N_E(A,B)=1-\frac{1}{\sqrt{6}}(0.2^2+0.1^2+0.1^2+0.1^2+0.1^2+0.2^2)^{\frac{1}{2}}\approx 0.859$$

$$N_{Mm}(A,B)=\frac{0.5+0.7+0.9+0.9+0.6+0.3}{0.7+0.8+1.0+1.0+0.7+0.5}\approx 0.830$$

$$N_{Aa}(A,B)=\frac{0.5+0.7+0.9+0.9+0.6+0.3}{\frac{1}{2}(1.2+1.5+1.9+1.9+1.3+0.8)}\approx 0.907$$

取 $\top=\wedge$，$g(M)=\frac{|M|}{6}$，则 $N_g(A,B)=0.8$. □

例 1.4.12　设 $X=[0,100]$，且

$$A(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x<20\\ \frac{x-20}{40}, & 20\leqslant x<60\\ 1, & 60\leqslant x\leqslant 100\end{cases}$$

$$B(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x<40\\ \frac{80-x}{40}, & 40\leqslant x<80\\ 0, & 80\leqslant x\leqslant 100\end{cases}$$

如图 1.4.6 所示.

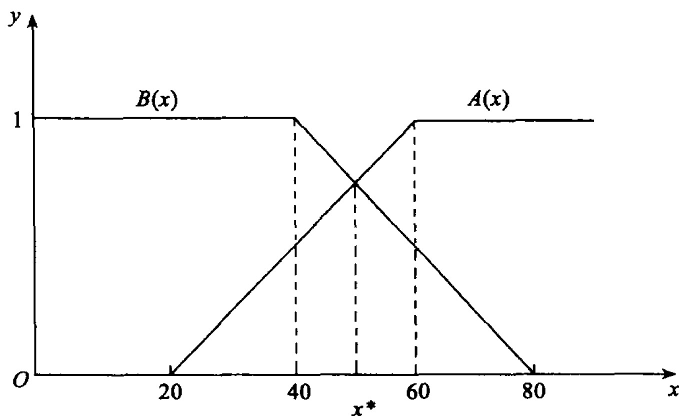


图 1.4.6　Fuzzy 集 A 和 B 的隶属函数曲线

不难求得 $A(x)$ 和 $B(x)$ 的交点坐标 $x^*=50$，于是

$$A(x)\wedge B(x)=\begin{cases}\frac{x-20}{40}, & 20\leqslant x<50\\ \frac{80-x}{40}, & 50\leqslant x<80\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$A(x) \vee B(x)=\begin{cases}\dfrac{80-x}{40}, & 40 \leqslant x<50 \\ \dfrac{x-20}{40}, & 50 \leqslant x<60 \\ 1, & \text{其他}\end{cases}$$

$$N_{Mm}(A,B)=\frac{\int_0^{100}(A(x) \wedge B(x))\mathrm{d}x}{\int_0^{100}(A(x) \vee B(x))\mathrm{d}x}$$

$$=\frac{\int_{20}^{50}\frac{x-20}{40}\mathrm{d}x+\int_{50}^{80}\frac{80-x}{40}\mathrm{d}x}{\int_0^{40}\mathrm{d}x+\int_{40}^{50}\frac{80-x}{40}\mathrm{d}x+\int_{50}^{60}\frac{x-20}{40}\mathrm{d}x+\int_{60}^{100}\mathrm{d}x} \approx 0.23. \quad \square$$

依上述方法计算 A 与 B 的贴近度的大小相近. 在实际问题中,可以根据需要选取其中的一种.下面介绍一种实际应用非常广泛的格贴近度.

1.4.7 Fuzzy 集的格贴近度

定义 1.4.9 设 $A,B \in \mathscr{F}(X)$,记

$$A \circ B=\bigvee_{x\in X}(A(x) \wedge B(x)) \tag{1.4.41}$$

$$A \,\hat{\circ}\, B=\bigwedge_{x\in X}(A(x) \vee B(x)) \tag{1.4.42}$$

分别称 $A \circ B$, $A \,\hat{\circ}\, B$ 为 Fuzzy 集 A,B 的内积(inner product)与外积(outer product).

内积与外积互为对偶运算. 在讨论内积与外积的性质之前,首先引入以下定义.

定义 1.4.10 设 $A \in \mathscr{F}(X)$,令

$$ht(A)=\bigvee_{x\in X} A(x) \tag{1.4.43}$$

$$lt(A)=\bigwedge_{x\in X} A(x) \tag{1.4.44}$$

$ht(A)$ 和 $lt(A)$ 分别称为 Fuzzy 集 A 的峰值(peak value)与谷值(valley value).

定理 1.4.5 设 $A,B \in \mathscr{F}(X)$,则有:

(1) $ht(A \cup B)=ht(A) \vee ht(B)$, $ht(A \cap B) \leqslant ht(A) \wedge ht(B)$,

$lt(A \cup B) \geqslant lt(A) \vee lt(B)$, $lt(A \cap B)=lt(A) \wedge lt(B)$;

(2) $A \subseteq B \Rightarrow ht(A) \leqslant ht(B), lt(A) \leqslant lt(B)$.

定理 1.4.6 设 $A,B,C,D \in \mathscr{F}(X)$,则有:

(1) $A \subseteq C, B \subseteq D \Rightarrow A \circ B \leqslant C \circ D$, $A \,\hat{\circ}\, B \leqslant C \,\hat{\circ}\, D$;

(2) $(A \,\hat{\circ}\, B)^c=A^c \circ B^c$, $(A \circ B)^c=A^c \,\hat{\circ}\, B^c$;

(3) $A \circ B \leqslant ht(A) \wedge ht(B)$, $A \mathbin{\hat{\circ}} B \geqslant lt(A) \vee lt(B)$;

(4) $A \subseteq B \Rightarrow A \circ B = ht(A)$, $A \mathbin{\hat{\circ}} B = lt(B)$;

(5) $A \circ A = ht(A)$, $A \mathbin{\hat{\circ}} A = lt(A)$;

(6) $A \circ A^c \leqslant \frac{1}{2}$, $A \mathbin{\hat{\circ}} A^c \geqslant \frac{1}{2}$;

(7) $\bigvee\limits_{B \in \mathscr{F}(X)} (A \circ B) = ht(A)$, $\bigwedge\limits_{B \in \mathscr{F}(X)} (A \mathbin{\hat{\circ}} B) = lt(A)$;

(8) $(A \cup B) \circ C = (A \circ C) \vee (B \circ C)$, $(A \cap B) \mathbin{\hat{\circ}} C = (A \mathbin{\hat{\circ}} C) \wedge (B \mathbin{\hat{\circ}} C)$.

证明 (1)由算子 $\circ$ 与 $\hat{\circ}$ 的定义即得.

(2)
$$\begin{aligned}(A \mathbin{\hat{\circ}} B)^c &= 1 - \bigwedge_{x \in X} (A(x) \vee B(x)) = \bigvee_{x \in X} (1 - (A(x) \vee B(x))) \\ &= \bigvee_{x \in X} ((1 - A(x)) \wedge (1 - B(x))) \\ &= \bigvee_{x \in X} (A^c(x) \wedge B^c(x)) = A^c \circ B^c\end{aligned}$$

类似证明第二式.

(3)、(4)、(5)、(6)由 $ht(A)$ 和 $lt(A)$ 以及算子 $\circ$ 与 $\circ^c$ 的定义即得.

(7)首先由(5),有 $\bigvee\limits_{B \in \mathscr{F}(X)} (A \circ B) \geqslant A \circ A = ht(A)$,而另一方面,由 $ht(A)$ 的定义又可以推出,$\forall B \in \mathscr{F}(X)$, $ht(A) = \bigvee\limits_{x \in X} A(x) \geqslant \bigvee\limits_{x \in X} (A(x) \wedge B(x)) = A \circ B$. 故 $\bigvee\limits_{B \in \mathscr{F}(X)} (A \circ B) \leqslant ht(A)$. 从而(7)的第一式得证. 同理可证(7)的第二式为真.

(8)仅证第一式

$$\begin{aligned}(A \cup B) \circ C &= \bigvee_{x \in X} (A(x) \vee B(x)) \wedge C(x) \\ &= \bigvee_{x \in X} (A(x) \wedge C(x)) \vee \bigvee_{x \in X} (B(x) \wedge C(x)) \\ &= (A \circ C) \vee (B \circ C).\end{aligned}$$

□

由定理 1.4.6(3)和(5)发现,给定 Fuzzy 集 A,让 Fuzzy 集 B 靠近 A,会使内积 $A \circ B$ 增大而外积 $A \mathbin{\hat{\circ}} B$ 减少. 反之,当 $A \circ B$ 较大且 $A \mathbin{\hat{\circ}} B$ 较小时,A 与 B 比较贴近. 所以,我们采用内积与外积相结合的"格贴近度"来刻画两个 Fuzzy 集的贴近程度.

定义 1.4.11 设 $A, B \in \mathscr{F}(X)$,记

$$N_{Lm}(A,B) = (A \circ B) \wedge (A \mathbin{\hat{\circ}} B)^c \tag{1.4.45}$$

$$N_{La}(A,B) = \frac{1}{2}[(A \circ B) + (A \mathbin{\hat{\circ}} B)^c] \tag{1.4.46}$$

则称 N_{Lm} 和 N_{La} 为 $\mathscr{F}(X)$ 上的格贴近度函数(lattice similarity measure function),而 $N_{Lm}(A,B)$ 和 $N_{La}(A,B)$ 称为 Fuzzy 集 A,B 的格贴近度(lattice similarity measure).

利用定理 1.4.6,可以很方便地研究格贴近度的许多性质.

定理 1.4.7 设 $A,B,C\in\mathscr{F}(X)$,对于格贴近度函数 N_{Lm} 和 N_{La},下列各式成立:

(1) $0\leqslant N_{Lm}(A,B)\leqslant 1$, $0\leqslant N_{La}(A,B)\leqslant 1$;

(2) $N_{Lm}(A,B)=N_{Lm}(B,A)$, $N_{La}(A,B)=N_{La}(B,A)$;

(3) $N_{Lm}(A,A)=ht(A)\wedge(1-lt(A))\geqslant N_{Lm}(A,B)$,

$$N_{La}(A,A)=\frac{1+ht(A)-lt(A)}{2}\geqslant N_{La}(A,B);$$

(4) $N_{Lm}(X,\varnothing)=0$, $N_{La}(X,\varnothing)=0$;

(5) $A\subseteq B\subseteq C\Rightarrow N_{Lm}(A,C)\leqslant N_{Lm}(A,B)\wedge N_{Lm}(B,C)$,

$A\subseteq B\subseteq C\Rightarrow N_{La}(A,C)\leqslant N_{La}(A,B)\wedge N_{La}(B,C)$.

证明 (1)、(2)、(3)和(4)显然成立. 现证(5).

根据定理 1.4.6(4),由 $A\subseteq C$ 得

$$N_{Lm}(A,C)=(A\circ C)\wedge(A\hat{\circ}C)^c=ht(A)\wedge(lt(C))^c$$

由 $A\subseteq B$ 得

$$N_{Lm}(A,B)=(A\circ B)\wedge(A\hat{\circ}B)^c=ht(A)\wedge(lt(B))^c$$

因为 $lt(B)\leqslant lt(C)$,从而 $(lt(B))^c\geqslant(lt(C))^c$,所以

$$N_{Lm}(A,C)\leqslant N_{Lm}(A,B)$$

同理

$$N_{Lm}(A,C)\leqslant N_{Lm}(B,C)$$

于是

$$N_{Lm}(A,C)\leqslant N_{Lm}(A,B)\wedge N_{Lm}(B,C)$$

第二式类似可证. □

由定理 1.4.7(3)易知 $N_{Lm}(A,A)=1\Leftrightarrow ht(A)=1,lt(A)=0\Leftrightarrow N_{La}(A,A)=1$. 因此 N_{Lm} 和 N_{La} 都不是 $\mathscr{F}(X)$ 上的贴近度函数(见定义 1.4.8),但 N_{Lm} 和 N_{La} 是

$$\mathscr{B}=\{A\in\mathscr{F}(X)\mid ht(A)=1,lt(A)=0\}$$

上的贴近度函数.

例 1.4.13 设 $A,B\in\mathscr{F}(\mathbf{R})$,而且

$$A(x)=\mathrm{e}^{-\left(\frac{x-a_1}{\sigma_1}\right)^2},\quad B(x)=\mathrm{e}^{-\left(\frac{x-a_2}{\sigma_2}\right)^2}$$

$A(x)$ 与 $B(x)$ 的曲线如图 1.4.7 所示.

$$A\circ B=\bigvee_{x\in\mathbf{R}}(A(x)\wedge B(x))=A(x^*)$$

令 $A(x)=B(x)$,则有

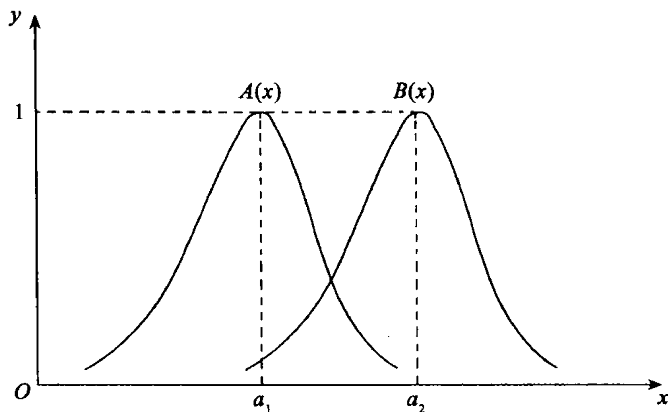


图 1.4.7 Fuzzy 集 A 和 B 的隶属函数曲线

$$\left(\frac{x-a_1}{\sigma_1}\right)^2=\left(\frac{x-a_2}{\sigma_2}\right)^2$$

解上述方程得

$$x_1=\frac{\sigma_1 a_2+\sigma_2 a_1}{\sigma_1+\sigma_2},\quad x_2=\frac{\sigma_2 a_1-\sigma_1 a_2}{\sigma_2-\sigma_1}$$

其中 x_2 不在 a_1，a_2 之间，不符合要求，故 x_1 为所求 x^*，于是有

$$A\circ B=A(x^*)=\mathrm{e}^{-\left(\frac{a_2-a_1}{\sigma_1+\sigma_2}\right)^2}$$

而

$$A^c\circ B^c=\bigvee_{x\in\mathbf{R}}((1-A(x))\wedge(1-B(x)))=1$$

由格贴近度公式，得

$$N_{Lm}(A,B)=\exp\left(-\left(\frac{a_2-a_1}{\sigma_1+\sigma_2}\right)^2\right),\quad N_{La}(A,B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\exp\left(-\left(\frac{a_2-a_1}{\sigma_1+\sigma_2}\right)^2\right).$$

□

§1.5 Fuzzy 集的推广

1.5.1 2 型 Fuzzy 集

到目前为止，我们已经考虑了 Fuzzy 集带有精确定义的隶属函数或隶属度. 在人们心目中无疑有了一个隶属函数的精确印象. 然而在实际中，有时隶属度仍表现出模糊性而使得很难用一个数值来表示. 例如要对 5 个人 x_1，x_2，

x_3,x_4,x_5 的年龄做出估计，则通常得到的答案是如下形式：

x_1——较年老，x_2——年轻，x_3——很年轻，x_4——很年老，x_5——中年

如果记 $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$，则上述结果可以表述成

$$A=\frac{\text{较年老}}{x_1}+\frac{\text{年轻}}{x_2}+\frac{\text{很年轻}}{x_3}+\frac{\text{很年老}}{x_4}+\frac{\text{中年}}{x_5}$$

在实际中，很少说 x_1 属于年老的程度是 0.7，而通常是说 x_1"较老"，其结果仍然是模糊的.

因此 Zadeh 提出了隶属函数本身是 Fuzzy 集的 Fuzzy 集概念. 如果我们称到目前为止所考虑的 Fuzzy 集为 1 型 Fuzzy 集，那么这种推广的 Fuzzy 集则称为 2 型 Fuzzy 集，其严格定义如下.

定义 1.5.1 (Zadeh，1975) 设 A 是论域 X 到 $\mathscr{F}([0,1])$ 的一个映射，即

$$A:X\to\mathscr{F}([0,1])$$
$$x\mapsto I_x\in\mathscr{F}([0,1])$$

称 A 是 X 上的 2 型 Fuzzy 集(type-2 fuzzy set 或 T2 FS)(或称为 Fuzzy 值 Fuzzy 集). 记 X 上的全体 2 型 Fuzzy 集为 $\mathscr{F}_2(X)$.

图 1.5.1 说明了 2 型 Fuzzy 集的概念.

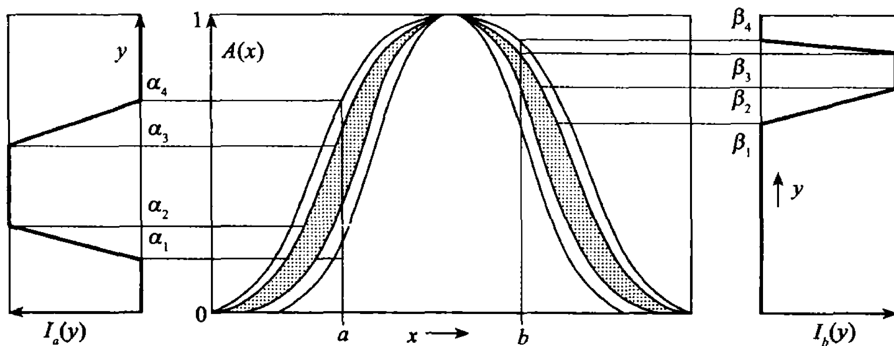


图 1.5.1 2 型 Fuzzy 集概念示意图

仍就 Fuzzy 集 A ="年老"来说明定义 1.5.1 的含义.

例 1.5.1 设 $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$，而 A ="年老"为

$$A=\frac{0.8}{x_1}+\frac{0.2}{x_2}+\frac{0.1}{x_3}+\frac{0.9}{x_4}+\frac{0.5}{x_5}$$

通常，这些隶属值是很难准确给出的，所以 Fuzzy 集 A 一般是下列形式

$$A=\frac{\text{较年老}}{x_1}+\frac{\text{年轻}}{x_2}+\frac{\text{很年轻}}{x_3}+\frac{\text{很年老}}{x_4}+\frac{\text{中年}}{x_5}$$

即

$$A=\frac{\widetilde{0.8}}{x_1}+\frac{\widetilde{0.2}}{x_2}+\frac{\widetilde{0.1}}{x_3}+\frac{\widetilde{0.9}}{x_4}+\frac{\widetilde{0.5}}{x_5}$$

这里“较年老”($\widetilde{0.8}$),“年轻”($\widetilde{0.2}$),“很年轻”($\widetilde{0.1}$),“很年老”($\widetilde{0.9}$),以及“中年”($\widetilde{0.5}$)等 Fuzzy 集表示属于“年老”的程度. 定义

$$\widetilde{0.8}=\frac{0.3}{0.6}+\frac{0.8}{0.7}+\frac{1.0}{0.8}+\frac{0.7}{0.9}+\frac{0.4}{1.0}$$

$$\widetilde{0.2}=\frac{0.3}{0.0}+\frac{0.7}{0.1}+\frac{1.0}{0.2}+\frac{0.4}{0.3}+\frac{0.1}{0.4}$$

$$\widetilde{0.1}=\frac{0.5}{0.0}+\frac{1.0}{0.1}+\frac{0.6}{0.2}+\frac{0.2}{0.3}+\frac{0.1}{0.4}$$

$$\widetilde{0.9}=\frac{0.6}{0.7}+\frac{0.7}{0.8}+\frac{1.0}{0.9}+\frac{0.8}{1.0}$$

$$\widetilde{0.5}=\frac{0.3}{0.3}+\frac{0.8}{0.4}+\frac{1.0}{0.5}+\frac{0.7}{0.6}+\frac{0.4}{0.7}$$

如 $\widetilde{0.8}(0.7)=0.8$ 是指 x_1 七成是“年老”的程度是 0.8,这时可以认为 x_1 有点老了. □

由此可见,2 型 Fuzzy 集对于模糊现象的刻画更为深刻,也更加接近于实际情形,但对其的处理比一般的 Fuzzy 集要复杂得多. 如果 $A,B\in\mathscr{F}_2(X)$,且设

$$A(x)=\int_{[0,1]}\frac{a_x(r)}{r},\quad B(x)=\int_{[0,1]}\frac{b_x(r)}{r}$$

则分别定义 $A(x)\ \hat{\bigcup}\ B(x)$, $A(x)\ \hat{\bigcap}\ B(x)$ 与 $\neg A(x)$ 如下(Mizumoto and Tanaka,1976)

$$(A(x)\ \hat{\bigcup}\ B(x))(r)=\bigvee_{r_1\vee r_2=r}\{a_x(r_1)\wedge b_x(r_2)\}\tag{1.5.1}$$

$$(A(x)\ \hat{\bigcap}\ B(x))(r)=\bigvee_{r_1\wedge r_2=r}\{a_x(r_1)\wedge b_x(r_2)\}\tag{1.5.2}$$

$$(\neg A(x))(r)=\int_{[0,1]}\frac{a_x(r)}{1-r}\tag{1.5.3}$$

2 型 Fuzzy 集的并、交、补与序关系定义如下:设 $A,B\in\mathscr{F}_2(X)$,则:

(1) $(A\cup B)(x)=A(x)\ \hat{\bigcup}\ B(x),\ \forall x\in X$;

(2) $(A\cap B)(x)=A(x)\ \hat{\bigcap}\ B(x),\ \forall x\in X$;

(3) $(A^c)(x)=\neg A(x),\ \forall x\in X$;

(4) $A\subseteq B\Leftrightarrow(\forall x\in X)(A(x)\subseteq B(x))$.

例 1.5.2 对给定的 $x\in X$, $A(x),B(x)\in\mathscr{F}([0,1])$,且

$$A(x)=\frac{0.5}{0}+\frac{0.7}{0.1}+\frac{0.3}{0.2},\ B(x)=\frac{0.9}{0}+\frac{0.6}{0.1}+\frac{0.2}{0.2}$$

则 $A(x)\ \hat{\cup}\ B(x)=\left(\frac{0.5}{0}+\frac{0.7}{0.1}+\frac{0.3}{0.2}\right)\hat{\cup}\left(\frac{0.9}{0}+\frac{0.6}{0.1}+\frac{0.2}{0.2}\right)$

$$=\frac{0.5\wedge 0.9}{0}+\frac{(0.5\wedge 0.6)\vee(0.7\wedge 0.9)\vee(0.7\wedge 0.6)}{0.1}+$$

$$\frac{(0.5\wedge 0.2)\vee(0.7\wedge 0.2)\vee(0.3\wedge 0.2)\vee(0.9\wedge 0.3)\vee(0.6\wedge 0.3)\vee(0.6\wedge 0.3)\vee(0.2\wedge 0.3)}{0.2}$$

$$=\frac{0.5}{0}+\frac{0.7}{0.1}+\frac{0.3}{0.2}.$$

由同样的步骤可得

$$A(x)\ \hat{\cap}\ B(x)=\frac{0.7}{0}+\frac{0.6}{0.1}+\frac{0.2}{0.2}$$

$$\neg A(x)=\frac{0.5}{1}+\frac{0.7}{0.9}+\frac{0.3}{0.8}.$$

□

可以类似地定义 m 型 Fuzzy 集如下:

定义 1.5.2 X 上的 m 型 Fuzzy 集(type-m fuzzy set)是一个 Fuzzy 集,其隶属度值为 $[0,1]$ 上的 $m-1$ 型 Fuzzy 集. 记 X 上的全体 m 型 Fuzzy 集为 $\mathscr{F}_{\mathrm{m}}(\mathrm{X})$.

对于 m 型 Fuzzy 集的并、交和补运算以及序关系可以类似定义.

1.5.2 区间值 Fuzzy 集

如果 2 型 Fuzzy 集的隶属函数值为区间,则有下面的定义.

定义 1.5.3 (Sambuc, 1975; Zadeh, 1975) 设 A 是论域 X 到 $I_{[0,1]}$ 的一个映射,即

$$A: X\to I_{[0,1]}$$

称 A 是 X 上的区间值 Fuzzy 集(interval-valued fuzzy set or ϕ-fuzzy set). 这里

$$I_{[0,1]}=\{a=[\underline{a},\overline{a}]\mid 0\leqslant\underline{a}\leqslant\overline{a}\leqslant 1,\underline{a},\overline{a}\in\mathbf{R}\}\tag{1.5.4}$$

记 X 上的全体区间值 Fuzzy 集为 $\mathscr{F}_I(X)$.

图 1.5.2 说明了区间值 Fuzzy 集的概念.

设 $A\in\mathscr{F}_{\mathrm{I}}(X)$,则 $A(x)\triangleq[\underline{A}(x),\overline{A}(x)]$,这时实际上 $\underline{A},\overline{A}\in\mathscr{F}(X)$,记 $A\triangleq[\underline{A},\overline{A}]$. $\underline{A}$ 和 $\overline{A}$ 分别称为 A 的下隶属函数和上隶属函数(lower and upper membership). 区间值 Fuzzy 集的并、交、补与序关系定义如下:设 $A,B\in\mathscr{F}_{\mathrm{I}}(X)$,则:

(1) $(A\cup B)(x)=[\underline{A}(x)\vee\underline{B}(x),\overline{A}(x)\vee\overline{B}(x)],\ \forall x\in X$;

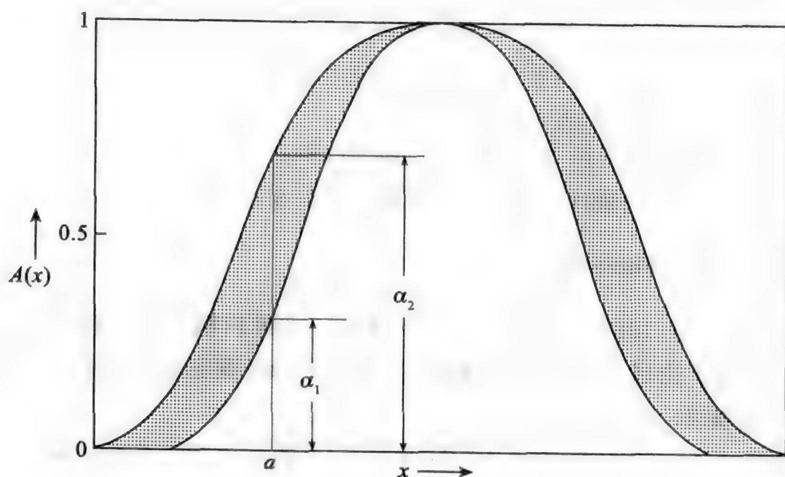


图 1.5.2 区间值 Fuzzy 集($A(a)=[\alpha_1,\alpha_2]$).

(2) $(A\cap B)(x)=[\underline{A}(x)\wedge\underline{B}(x),\overline{A}(x)\wedge\overline{B}(x)]$, $\forall x\in X$;

(3) $A^c(x)=[1-\overline{A}(x),1-\underline{A}(x)]$, $\forall x\in X$;

(4) $A\subseteq B\Leftrightarrow\underline{A}\subseteq\underline{B}$ 且 $\overline{A}\subseteq\overline{B}$.

由此得到

$$\underline{A\cup B}=\underline{A}\cup\underline{B},\quad \overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},$$
$$\underline{A\cap B}=\underline{A}\cap\underline{B},\quad \overline{A\cap B}=\overline{A}\cap\overline{B},$$
$$\underline{A^c}=(\overline{A})^c,\quad \overline{A^c}=(\underline{A})^c.$$

例 1.5.3 设 $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$, 则 A =“年老”可以定义为

$$A=\frac{[0.6,0.9]}{x_1}+\frac{[0.2,0.3]}{x_2}+\frac{[0.1,0.2]}{x_3}+\frac{[0.8,0.9]}{x_4}+\frac{[0.4,0.6]}{x_5}.\quad\square$$

注:有人将区间值 Fuzzy 集称为灰集(grey set)(Deng, 1989).

1.5.3 *L*-Fuzzy 集

定义 1.5.4 (Goguen, 1967) 设 $(L,\vee,\wedge,\leqslant)$ 为格,则论域 X 到 L 的一个映射 A, 即

$$A:X\to L$$

称为 X 上的 L-Fuzzy 集(L-fuzzy set). 记 X 上的全体 L-Fuzzy 集为 $\mathscr{F}_L(X)$.

由于$[0,1]$, $I_{[0,1]}$, $\mathscr{F}([0,1])$ 都是格,所以定义 1.1.1 中的 Fuzzy 集,定义 1.5.3 中的区间值 Fuzzy 集,定义 1.5.1 中的 2 型 Fuzzy 集都是特殊的 L-Fuzzy 集.

L-Fuzzy 集的并、交、补与序关系定义如下：设 $A,B \in \mathscr{F}_L(X)$，则：

(1) $(A \cup B)(x) = A(x) \vee B(x)$, $\forall x \in X$;

(2) $(A \cap B)(x) = A(x) \wedge B(x)$, $\forall x \in X$;

(3) $A^c(x) = N(A(x))$, $\forall x \in X$;

(4) $A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x \in X)(A(x) \leqslant B(x))$.

这里 N 为 $(L, \leqslant)$ 的逆序对合算子(参见定义 1.3.3).

1.5.4 直觉 Fuzzy 集

Atanassov 于 1983 年给出了 Fuzzy 集的一个推广概念——直觉 Fuzzy 集. Fuzzy 集给出了论域中一点的隶属度，而直觉 Fuzzy 集给出了论域中一点的隶属度与非隶属度.

定义 1.5.5 (Atanassov, 1983) 论域 X 上的一个直觉 Fuzzy 集(intuitionistic fuzzy set)是下列形式的一个对象

$$A = \{(x, \mu_A(x), \nu_A(x)) \mid x \in X\} \tag{1.5.5}$$

其中 $\mu_A(x)$ ($\in [0,1]$) 称为"x 属于 A 的隶属度"(degree of truth-membership or degree of membership), $\nu_A(x)$ ($\in [0,1]$) 称为"x 不属于 A 的隶属度"(degree of false-membership or degree of non-membership)，并且其和满足下列条件

$$\mu_A(x) + \nu_A(x) \leqslant 1, \forall x \in X \tag{1.5.6}$$

论域 X 上的所有直觉 Fuzzy 集记为 $\mathscr{IF}(X)$. 为了简单起见，$A = \{(x, \mu_A(x), \nu_A(x)) \mid x \in X\}$ 记为 $A = (x, \mu_A, \nu_A)$. 若 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$，则直觉 Fuzzy 集 $A = (x, \mu_A, \nu_A)$ 可以表示为

$$A = \frac{(\mu_A(x_1), \nu_A(x_1))}{x_1} + \frac{(\mu_A(x_2), \nu_A(x_2))}{x_2} + \cdots + \frac{(\mu_A(x_n), \nu_A(x_n))}{x_n} \tag{1.5.7}$$

例 1.5.4 设 $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$，则直觉 Fuzzy 集 A="年老"可以定义为

$$A = \frac{(0.8, 0.2)}{x_1} + \frac{(0.2, 0.7)}{x_2} + \frac{(0.1, 0.8)}{x_3} + \frac{(0.9, 0.1)}{x_4} + \frac{(0.5, 0.5)}{x_5}. \quad \square$$

对于 $A = (\mu_A, \nu_A) \in \mathscr{IF}(X)$，我们称

$$\pi_A(x) = 1 - \mu_A(x) - \nu_A(x) \tag{1.5.8}$$

为元素 x 在 A 中的直觉指标(intuitionistic index). 很显然 $0 \leqslant \pi_A(x) \leqslant 1$ (Burillo, Bustince, 1996a). $[\mu_A(x), 1 - \nu_A(x)]$ 称为 x 在直觉 Fuzzy 集 $A = (\mu_A, \nu_A)$ 中的 Fuzzy 值(fuzzy value)(Atanassov, 1986).

直觉 Fuzzy 集的并、交、补与序关系定义如下,设 $A,B \in \mathscr{IF}(X)$,则:

(1) $A \cup B=\{(x,\max\{\mu_A(x),\mu_B(x)\},\min\{\nu_A(x),\nu_B(x)\})\mid x \in X\}$;

(2) $A \cap B=\{(x,\min\{\mu_A(x),\mu_B(x)\},\max\{\nu_A(x),\nu_B(x)\})\mid x \in X\}$;

(3) $A^c=\{(x,\nu_A(x),\mu_A(x))\mid x \in X\}$;

(4) $A \subseteq B \Leftrightarrow \mu_A \subseteq \mu_B$ 且 $\nu_A \supseteq \nu_B$;

(5) $A=B \Leftrightarrow A \subseteq B, B \subseteq A$;

(6) $A \leq B \Leftrightarrow \mu_A \subseteq \nu_B$ 且 $\nu_A \subseteq \nu_B$.

还可以考虑直觉 Fuzzy 集的三角模运算:设 $A,B \in \mathscr{IF}(X)$,则:

(1) $A \cup_{\perp} B=\{(x,\perp(\mu_A(x),\mu_B(x)),\top(\nu_A(x),\nu_B(x)))\mid x \in X\}$;

(2) $A \cap_{\top} B=\{(x,\top(\mu_A(x),\mu_B(x)),\perp(\nu_A(x),\nu_B(x)))\mid x \in X\}$.

直觉 Fuzzy 集与区间值 Fuzzy 集是 Fuzzy 集的两个推广,数学形式上两者是等价的,通过下面的映射可以证明

$$f:\mathscr{F}_I(X) \to \mathscr{IF}(X)$$

$$A=[\underline{A},\overline{A}] \to B$$

其中 $\mu_B(x)=\underline{A}(x)$, $\nu_B(x)=1-\overline{A}(x)$. 但在应用上两者的涵义还是不同的.

Gau 和 Buehrer (1993)定义了含糊集(vague set)的概念,随后 Bustince 和 Burillo (1996a)证明了含糊集就是直觉 Fuzzy 集.

定义 1.5.6 (Atanassov, Gargov, 1989) 论域 X 上的一个区间值直觉 Fuzzy 集(interval-valued intuitionistic fuzzy set)是下列形式的一个对象

$$A=\{(x,M_A(x),N_A(x))\mid x \in X\} \tag{1.5.9}$$

其中 $M_A:X \to I_{[0,1]}$ 和 $N_A:X \to I_{[0,1]}$,并且其和满足下列条件

$$\overline{M_A}(x)+\overline{N_A}(x) \leqslant 1, \forall x \in X \tag{1.5.10}$$

论域 X 上的所有区间值直觉 Fuzzy 集记为 $\mathscr{IF}_I(X)$. 为了简单起见,

$A=\{(x,M_A(x),N_A(x))\mid x \in X\}$ 记为 $A=(x,M_A,N_A)$.

区间值直觉 Fuzzy 集的并、交、补与序关系定义如下,设 $A,B \in \mathscr{IF}_I(X)$,则:

(1) $A \cup B=\{(x,[\underline{M_A}(x) \vee \underline{M_B}(x),\overline{M_A}(x) \vee \overline{M_B}(x)],[\underline{N_A}(x) \wedge \underline{N_B}(x),\overline{N_A}(x) \wedge \overline{N_B}(x)])\mid x \in X\}$;

(2) $A \cap B=\{(x,[\underline{M_A}(x) \wedge \underline{M_B}(x),\overline{M_A}(x) \wedge \overline{M_B}(x)],[\underline{N_A}(x) \vee \underline{N_B}(x),\overline{N_A}(x) \vee \overline{N_B}(x)])\mid x \in X\}$;

(3) $A^c=\{(x,N_A(x),M_A(x))\mid x \in X\}$;

(4) $A \subseteq B \Leftrightarrow M_A \subseteq M_B$ 且 $N_A \supseteq N_B$;

(5) $A=B \Leftrightarrow A \subseteq B, B \subseteq A$;

(6) $A \leq B \Leftrightarrow M_A \subseteq M_B$ 且 $N_A \subseteq N_B$.

定义 1.5.7 (Atanassov, Stoeva, 1984) 设 $(L, \vee, \wedge, \leqslant)$ 为格，论域 X 上的一个直觉 L-Fuzzy 集(intuitionistic L-fuzzy set)是下列形式的一个对象

$$A = \{(x, \mu_A(x), \nu_A(x)) \mid x \in X\} \tag{1.5.11}$$

其中映射 $\mu_A: X \to L$ 和 $\mu_A: X \to L$ 分别表示 x 属于 A 的隶属度(即 $\mu_A(x)$)和 x 属于 A 的非隶属度(即 $\nu_A(x)$)，并且满足下列条件

$$0 \leqslant \mu_A(x) \leqslant N(\nu_A(x)), \forall x \in X \tag{1.5.12}$$

这里 N 为 $(L, \leqslant)$ 的伪补(或逆序对合算子)(参见定义 1.3.3)，论域 X 上的所有直觉 L-Fuzzy 集记为 $\mathscr{IF}_L(X)$. 为了简单起见，$A = \{(x, \mu_A(x), \nu_A(x)) \mid x \in X\}$ 记为 $A = (x, \mu_A, \nu_A)$.

直觉 L-Fuzzy 集的并、交、补与序关系定义如下，设 $A, B \in \mathscr{IF}_L(X)$ ，则：

(1) $A \cup B = \{(x, \mu_A(x) \vee \mu_B(x), \nu_A(x) \wedge \nu_B(x) \mid x \in X\}$;

(2) $A \cap B = \{(x, \mu_A(x) \wedge \mu_B(x), \nu_A(x) \vee \nu_B(x) \mid x \in X\}$;

(3) $A^c = \{(x, \nu_A(x), \mu_A(x)) \mid x \in X\}$;

(4) $A \subseteq B \Leftrightarrow \mu_A \subseteq \mu_B$ 且 $\nu_A \supseteq \nu_B$;

(5) $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B, B \subseteq A$;

(6) $A \leq B \Leftrightarrow \mu_A \subseteq \nu_B$ 且 $\nu_A \subseteq \nu_B$.

由定义 1.5.7 有

$$\begin{aligned} A, B \in \mathscr{IF}_L(X) &\Rightarrow (\forall x \in X)(\mu_A(x) \leqslant N(\nu_A(x)), \mu_B(x) \leqslant N(\nu_B(x))) \\ &\Rightarrow \mu_A(x) \vee \mu_B(x) \leqslant N(\nu_A(x)) \vee N(\nu_B(x)) \\ &\quad \leqslant N(\nu_A(x) \wedge \nu_B(x)) \\ &\Rightarrow A \cup B, A \cap B \in \mathscr{IF}_L(X) \end{aligned}$$

这说明直觉 L-Fuzzy 集的并与交运算是合理的.

1.5.5 Genuine 集

Genuine 集是 Demiric 基于 m 型 Fuzzy 集提出的.

定义 1.5.8 (Demiric, 1999)设 A 为 $X \times I^m$ 到 I 的一个映射，即

$$A: X \times I^m \to I, \quad (x, \varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_m) \mapsto \varphi$$

称 A 为 X 上的 m 阶 Genuine 集(m th-order genuine set)，$A(x, \varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_m)$ 为 Genuine 集 A 的真函数(reality function). 记 X 上的全体 m 阶 Genuine 集为 G_m^X.

特别地，当 $m = 0$ 时，该映射变为 $A: X \to I$. 因此，Fuzzy 集也可以看做是 0 阶 Genuine 集.

容易看出，所谓的 m 阶 Genuine 集其实就是 $m + 1$ 型 Fuzzy 集. 事实上，m

型 Fuzzy 集就像 m 个函数复合在一起，而 m 阶 Genuine 集就像一个含 $m+1$ 个变元的函数. 因此，这种双射的存在性是容易理解的.

虽然 $m+1$ 型 Fuzzy 集与 m 阶 Genuine 集之间可以建立一一对应，但 Demiric并不打算将 Fuzzy 集上的序关系与运算也照搬到 Genuine 集上，而是重新定义了新的序关系及运算.

为了在 Genuine 集上构造序关系及各种运算，我们先做如下定义：

定义 1.5.9　(Demiric, 1999)对给定的一个 m 阶 Genuine 集 A，定义一个 Fuzzy 集 $G(A)$，其隶属函数为 $G(A):X\to I$，即

$$G(A)(x)=\begin{cases}\sup\limits_{(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_m)\in I^m}\{A(x,\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_m)\wedge\varphi_1\wedge\varphi_2\wedge\cdots\wedge\varphi_m\}, & m>0\\ A(x), & m=0\end{cases}\quad \forall x\in X \tag{1.5.13}$$

有了 Fuzzy 集 $G(A)$，再利用 Fuzzy 集的运算，我们就可以定义 Genuine 集上的序关系与交、并、补等运算.

定义 1.5.10　(Demiric, 1999)设 $A,B\in G_m^X$，$\{A_i:i\in J\}\subseteq G_m^X$，则

(1)$A\subseteq^g B\Leftrightarrow G(A)\subseteq G(B)$；

(2)$A=^g B\Leftrightarrow G(A)=G(B)$；

(3)$B=^g A^{gc}\Leftrightarrow G(B)=(G(A))^c$.

另外，Demiric 还在 Genuine 集上对空集、全集等做了定义：

X 上的 Genuine 集 E 称为 m 阶空集(m th-order empty set)，是指其真函数为

$$E(x,\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_m)=0,\quad \forall x\in X,\forall\varphi_1,\forall\varphi_2,\cdots,\forall\varphi_m\in(0,1] \tag{1.5.14}$$

$$E(x,\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_m)\in(0,1],\quad \forall x\in X,\exists r\in\{1,2,\cdots,m\},\varphi_r=0 \tag{1.5.15}$$

简记为 $\varnothing_m^g$.

X 上的 Genuine 集 U 称为 m 阶全集(m th-order universe set)，是指其真函数为

$$U(x,1,1,\cdots,1)=1,\qquad \forall x\in X \tag{1.5.16}$$

$$U(x,\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_m)\in[0,1),\quad \forall x\in X,\exists r\in\{1,2,\cdots,m\},\varphi_r\neq 1 \tag{1.5.17}$$

简记为 X_m^g.

事实上，m 阶空集与 m 阶全集都不是唯一的.

上面给出了 Fuzzy 集几种流行的推广，这些 Fuzzy 集之间的关系如图1.5.3

所示.

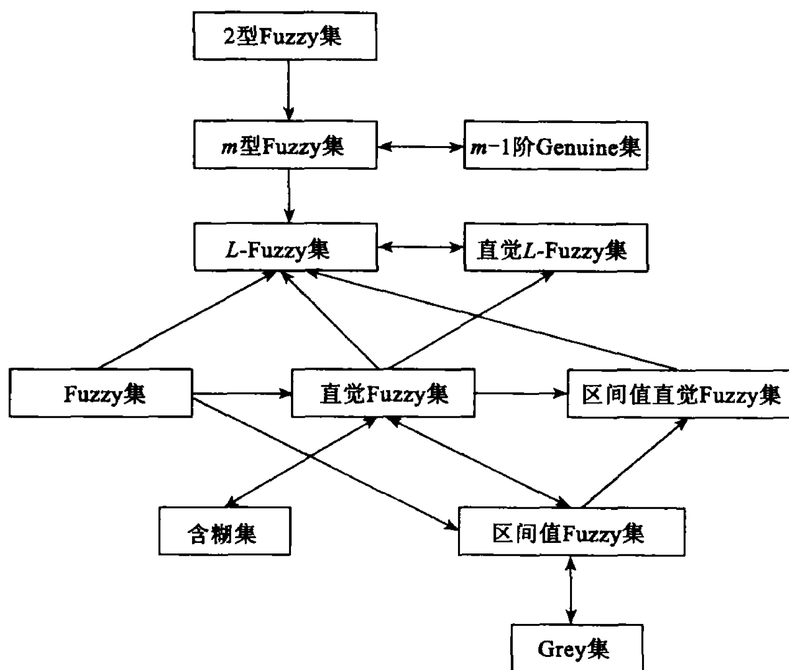


图 1.5.3 各类 Fuzzy 集的关系

关于 2 型 Fuzzy 集的研究主要在其运算、推广和应用上(Karnik, Mendel, 2001; Mendel, 2007;Mendel, Wu, 2007),还有考虑区间值的区间 2 型 Fuzzy 集(Wu, Mendel, 2007, 2008);区间值 Fuzzy 集比 2 型 Fuzzy 集在实际应用中更容易处理(Bigand, Colot, 2010; Bustince, Barrenechea, et al., 2009; Cornelis, Kerre, 2006; Liu, Wang, 2006; Vlachos, Sergiadis, 2007b; Zeng, W., Li, H., 2006.);对于 L-Fuzzy 集研究主要是在纯数学上,如序结构与拓扑(Hsueh, 1993; Kortelainen, 1997);直觉 Fuzzy 集在理论(Burillo, Bustince, 1996)和应用(Lin, Yuan, Xia, 2007; Liu, Wang, 2007; Vlachos, Sergiadis, 2007a)上都有研究.

与 Fuzzy 集相关的概念还有 Negoita 与 Ralescu (1975)所提出并证明与 L-Fuzzy集具有等价性的 L-Flou 集, Hirota (1977, 1981)所研究的随机集(Probabilistic Sets)、Soft 集(Molodtsov, 1999)、Genuine 集(Demiric, 1999)等. 关于 t-模的研究主要集中在 t-模的概念推广、构造和其他推广 Fuzzy 集上的 t-模等(Baczynski, Jayaram, 2008; Fodor, 1991; Klement, 1982; Klement,

Mesiar, Pap, 2004a,2004b,2004c; Mayor, Torrens, 1991; Peng, Sun, 1998; Türksen, 1986;Wang, 2006; 张文修,1984). 关于 Fuzzy 集的基数主要研究数量基数、整数基数和 Fuzzy 基数及其公理化定义(Baets, Janssens,Meyer,2006; Casasnovas,Torrens,2003;Delgado,Sanchez,et al., 2002). 关于 Fuzzy 集的 Fuzzy 度或 Fuzzy 熵可以参阅文献(De Luca, Termini, 1972; Shang, Jiang, 1997; 应明生,1984). 关于 Fuzzy 集的贴近度可以参阅文献(Chen, 1994; Chen, Chen, 2003; Deng, Shi, et al., 2004;Hung, Yang, 2004; Hyung, Song, et al., 1994; Khatibi, Montazer, 2009; Li, Cheng, 2002; Liang, Shi, 2003; Liu, 2005; Mitchell, 2003; Pappis, Karacapilidis, 1993; Pedrycz, 1997; Shang, Jiang, 1997; Szmidt, Kacprzyk, 2001a; Zwick, Carlstein, et al., 1987)关于 Fuzzy 算子的研究还有综合算子,如

$$(A\Theta B)(x)=[(A\cap B)(x)]^{1-r}[(A\cup B)(x)]^{r}$$

或

$$(1-r)[(A\cap B)(x)]+r[(A\cup B)(x)],$$

$r\in[0,1]$ (Zimmermann and Zysno, 1985);

Fuzzy 算子的敏感性,如

$$s_t=\int_0^1\int_0^1\left[\left|\frac{\partial(x\top y)}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial(x\top y)}{\partial y}\right|\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

或

$$s_t=\int_0^1\int_0^1\left[\left(\frac{\partial(x\top y)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial(x\top y)}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

等.

第2章 分解定理、表现定理与扩张原理

模糊集合的分解定理(decomposition theorem)、表现定理(representation theory)与扩张原理(extension principle)是模糊理论的三个基本定理与原理，这三个定理建立了模糊数学与经典数学之间的桥梁. 利用分解定理，可以将所研究的模糊对象分解为一系列与之相对应的经典问题来处理；由表现定理，可以通过求得的经典问题的解来研究模糊问题的求解方法；利用扩张原理，又可以将经典的方法进行推广，使所获得的结果更加接近实际. 本章先从 Fuzzy 集的截集出发，建立了 Fuzzy 集的分解定理、表现定理与扩张原理. 在这些理论的基础上，讨论了一类特殊的 Fuzzy 集——Fuzzy 数及其扩张运算、一类特殊的 Fuzzy 数——区间数及其扩张运算、Fuzzy 集的模扩张运算以及分布数的扩张运算. 这些扩张运算在不同的研究领域有着重要作用.

§2.1 Fuzzy 集的截集

在 Fuzzy 集合与普通集合相互转化中的一个重要概念是 α 水平截集，这一概念在 Fuzzy 决策中也经常用到. 为了使正题的引入更加自然，首先来看下面的例子.

例 2.1.1 在一次“优胜者”的选拔考试中，10位应试者及其成绩如表2.1.1所示.

表 2.1.1 **应试者考试成绩**

应试者	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
成绩/分	100	94	32	61	85	55	25	72	86	40

现按“择优录取”的原则来挑选.

设 Fuzzy 集 A 表示“优胜者”. 按各人成绩与最高分的比值作为属于 A 的隶属度

$$A=\frac{1.0}{x_1}+\frac{0.94}{x_2}+\frac{0.32}{x_3}+\frac{0.61}{x_4}+\frac{0.85}{x_5}+\frac{0.55}{x_6}+\frac{0.25}{x_7}+\frac{0.72}{x_8}+\frac{0.86}{x_9}+\frac{0.4}{x_{10}}$$

择优录取实际上就是要将 Fuzzy 集 A 转化为普通集合. 即先确定一个阈值 $\alpha(0\leqslant\alpha\leqslant 1)$，然后将隶属度 $A(x_i)\geqslant\alpha$ 的元素挑选出来. 因此，当 α 取 0.7、0.9时有

$$A_{0.7}=\{x_1,x_2,x_5,x_8,x_9\}$$

$$A_{0.9}=\{x_1,x_2\}$$

□

这样，可以将一个 Fuzzy 集转换成一个经典集，从而在 Fuzzy 集与经典集之间构筑起了相互联系的桥梁.

定义 2.1.1　若 $A\in\mathscr{F}(X)$，而 $\alpha\in[0,1]$，记

$$A_\alpha=\{x\in X\,|\,A(x)\geqslant\alpha\}\tag{2.1.1}$$

称 A_α 为 Fuzzy 集 A 的 α-截集（α-cut set），或称为 A 的 α-水平集（α-level set）. 而称

$$A_{\bar{\alpha}}=\{x\in X\,|\,A(x)>\alpha\}\tag{2.1.2}$$

为 A 的强 α-截集（strong α-cut set），或称为 A 的强 α-水平集或 α-开截集（strong α-level set）；α 称为截集水平（cut level）或阈值（threshold value）或置信水平（belief level）. 有时为了表达方便将 $A_{\bar{\alpha}}$ 用 $A_{\alpha+}$ 表示.

A_α 是经典集. 由于 Fuzzy 集的边界是模糊的，如果要把 Fuzzy 概念转化为数学语言，需要选取不同的置信水平 $\alpha(0\leqslant\alpha\leqslant 1)$ 来确定其隶属关系. α-截集就是将 Fuzzy 集转化为经典集的方法.

设 $A\in\mathscr{F}(X)$，则

$$A_{\bar{0}}=\{x\,|\,x\in X,A(x)>0\}=\mathrm{supp}A\tag{2.1.3}$$

$$A_1=\{x\,|\,x\in X,A(x)=1\}=\ker A\tag{2.1.4}$$

A 的支集 $A_{\bar{0}}$，核 A_1，边界 $A_{\bar{0}}\backslash A_1$ 以及截集 A_α 的示意图如图 2.1.1 所示.

例 2.1.2　取例 1.2.3 中的 $A=\{(a,1),(b,0.75),(c,0.5),(d,0.25),(e,0)\}$，$X=\{a,b,c,d,e\}$，有

$$A_1=\{a\},\ A_{0.7}=\{a,b\},\ A_{0.5}=\{a,b,c\},\ A_{0.2}=\{a,b,c,d\},\ A_0=X$$

$$A_{\bar{1}}=\varnothing,\ A_{\overline{0.7}}=\{a,b\},\ A_{\overline{0.5}}=\{a,b\},\ A_{\overline{0.2}}=\{a,b,c,d\},\ A_{\bar{0}}=\{a,b,c,d\}.$$

□

例 2.1.3　设 $A\in\mathscr{F}(\mathbf{R})$，且

$$A(x)=\begin{cases}x, & x\in[0,1]\\ 2-x, & x\in(1,2]\\ x-2, & x\in(2,3]\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

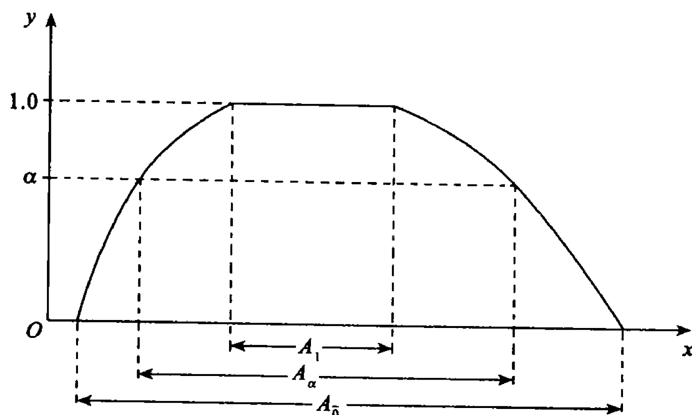


图 2.1.1 A_1, $A_{\bar{0}}$, A_α, $A_{\bar{0}} \backslash A_1$ 示意图

则 $A_\alpha = \{x \mid A(x) \geqslant \alpha\} = \begin{cases} \mathbf{R}, & \alpha = 0 \\ [\alpha, 2-\alpha] \cup [\alpha+2, 3], & 0 < \alpha \leqslant 1 \end{cases}$

其图形如图 2.1.2 所示.

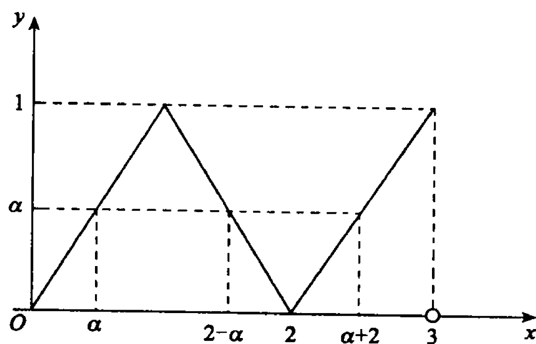


图 2.1.2

α-截集具有下列性质.

定理 2.1.1 设 $A, B \in \mathscr{F}(X)$, $\alpha, \beta \in [0,1]$, 则:

(1) $\alpha < \beta \Rightarrow A_{\bar{\beta}} \subseteq A_\beta \subseteq A_{\bar{\alpha}} \subseteq A_\alpha$;

(2) $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall \alpha \in [0,1], A_\alpha \subseteq B_\alpha$;

(3) $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall \alpha \in [0,1], A_{\bar{\alpha}} \subseteq B_{\bar{\alpha}}$;

(4) $A = B \Leftrightarrow \forall \alpha \in [0,1], A_\alpha = B_\alpha \Leftrightarrow \forall \alpha \in [0,1], A_{\bar{\alpha}} = B_{\bar{\alpha}}$.

证明 只证(2).

(i)设 $A \subseteq B$, 则 $\forall \alpha \in [0,1]$

$$x \in A_\alpha \Rightarrow A(x) \geqslant \alpha \Rightarrow B(x) \geqslant A(x) \geqslant \alpha \Rightarrow x \in B_\alpha$$

即 $A_\alpha \subseteq B_\alpha$.

(ii) 设 $\forall \alpha \in [0,1]$, $A_\alpha \subseteq B_\alpha$，如果 $A \subseteq B$ 不成立，则至少存在一点 $x_0 \in X$，使得

$$A(x_0) > B(x_0)$$

对于 $A(x_0) \geqslant \alpha_0 > B(x_0)$，有 $x_0 \in A_{\alpha_0}$，但 $x_0 \overline{\in} B_{\alpha_0}$. 这与假设矛盾. 因此 $A \subseteq B$. □

定理 2.1.2 设 $A \in \mathscr{F}(X)$，则 $\forall \alpha \in [0,1]$

$$A_\alpha = \bigcap_{\lambda < \alpha} A_{\bar{\lambda}} \tag{2.1.5}$$

$$A_{\bar{\alpha}} = \bigcup_{\lambda > \alpha} A_\lambda \tag{2.1.6}$$

证明 $\forall \alpha \in [0,1]$, $A_\alpha = \{x \mid A(x) \geqslant \alpha\} = \bigcap_{\lambda < \alpha} \{x \mid A(x) > \lambda\} = \bigcap_{\lambda < \alpha} A_{\bar{\lambda}}$

$$A_{\bar{\alpha}} = \{x \mid A(x) > \alpha\} = \bigcup_{\lambda > \alpha} \{x \mid A(x) \geqslant \lambda\} = \bigcup_{\lambda > \alpha} A_\lambda.$$

□

定理 2.1.3 设 $A, B \in \mathscr{F}(X)$，则 $\forall \alpha \in [0,1]$:

(1) $(A \times B)_\alpha = A_\alpha \times B_\alpha$;

(2) $(A \times B)_{\bar{\alpha}} = A_{\bar{\alpha}} \times B_{\bar{\alpha}}$.

证明 $\forall \alpha \in [0,1]$, $(x,y) \in (A \times B)_\alpha \Leftrightarrow (A \times B)(x,y) \geqslant \alpha$

$$\Leftrightarrow \min\{A(x), B(y)\} \geqslant \alpha \quad (\text{由定义 } 1.3.15)$$

$$\Leftrightarrow A(x) \geqslant \alpha, B(y) \geqslant \alpha \Leftrightarrow x \in A_\alpha, y \in B_\alpha$$

$$\Leftrightarrow (x,y) \in A_\alpha \times B_\alpha$$

即 $(A \times B)_\alpha = A_\alpha \times B_\alpha$，同理可证 $(A \times B)_{\bar{\alpha}} = A_{\bar{\alpha}} \times B_{\bar{\alpha}}$. □

定理 2.1.4 设 $A, B \in \mathscr{F}(X)$，则 $\forall \alpha \in [0,1]$:

(1) $(A \cup B)_\alpha = A_\alpha \cup B_\alpha$, $(A \cap B)_\alpha = A_\alpha \cap B_\alpha$;

(2) $(A \cup B)_{\bar{\alpha}} = A_{\bar{\alpha}} \cup B_{\bar{\alpha}}$, $(A \cap B)_{\bar{\alpha}} = A_{\bar{\alpha}} \cap B_{\bar{\alpha}}$.

证明 $\forall \alpha \in [0,1]$, $(A \cup B)_\alpha = \{x \mid (A \cup B)(x) \geqslant \alpha\}$

$$= \{x \mid A(x) \vee B(x) \geqslant \alpha\}$$

$$= \{x \mid A(x) \geqslant \alpha \text{ 或 } B(x) \geqslant \alpha\}$$

$$= \{x \mid A(x) \geqslant \alpha\} \cup \{x \mid B(x) \geqslant \alpha\}$$

$$= A_\alpha \cup B_\alpha.$$

同理可证其他各式. □

对于 $\mathscr{F}(X)$ 中的有限个 Fuzzy 集，上述结论仍然成立，即

$$\left(\bigcup_{t=1}^{n} A_t\right)_\alpha = \bigcup_{t=1}^{n} (A_t)_\alpha;\ \left(\bigcap_{t=1}^{n} A_t\right)_\alpha = \bigcap_{t=1}^{n} (A_t)_\alpha$$

$$\left(\bigcup_{t=1}^{n} A_t\right)_{\bar{\alpha}} = \bigcup_{t=1}^{n} (A_t)_{\bar{\alpha}};\ \left(\bigcap_{t=1}^{n} A_t\right)_{\bar{\alpha}} = \bigcap_{t=1}^{n} (A_t)_{\bar{\alpha}}$$

但是,对于无限个 Fuzzy 集,等号未必成立. 一般有如下性质.

定理 2.1.5 设 $\{A_t \mid t \in \Lambda\} \subseteq \mathscr{F}(X)$,则:

(1) $\bigcup_{t\in\Lambda} (A_t)_\alpha \subseteq \left(\bigcup_{t\in\Lambda} A_t\right)_\alpha$, $\bigcap_{t\in\Lambda} (A_t)_\alpha = \left(\bigcap_{t\in\Lambda} A_t\right)_\alpha$;

(2) $\left(\bigcup_{t\in\Lambda} A_t\right)_{\bar{\alpha}} = \bigcup_{t\in\Lambda} (A_t)_{\bar{\alpha}}$, $\left(\bigcap_{t\in\Lambda} A_t\right)_{\bar{\alpha}} \subseteq \bigcap_{t\in\Lambda} (A_t)_{\bar{\alpha}}$.

证明 (1) $\forall x \in X$, $x \in \bigcup_{t\in\Lambda} (A_t)_\alpha \Rightarrow \exists t_0 \in \Lambda$, $x \in (A_{t_0})_\alpha \Rightarrow A_{t_0}(x) \geqslant \alpha$

$$\Rightarrow \bigvee_{t\in\Lambda} A_t(x) \geqslant \alpha \Rightarrow x \in \left(\bigcup_{t\in\Lambda} A_t\right)_\alpha$$

$\forall x \in X$, $x \in \bigcap_{t\in\Lambda} (A_t)_\alpha \Leftrightarrow \forall t \in \Lambda, x \in (A_t)_\alpha \Leftrightarrow \forall t \in \Lambda, A_t(x) \geqslant \alpha$

$$\Leftrightarrow \bigwedge_{t\in\Lambda} A_t(x) \geqslant \alpha \Leftrightarrow \left(\bigcap_{t\in\Lambda} A_t\right)(x) \geqslant \alpha$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(\bigcap_{t\in\Lambda} A_t\right)_\alpha.$$

(2)类似(1)的证明方法可证. □

需要指出的是定理 2.1.5 中(1)的第一式与(2)的第二式未必有等号成立.

例 2.1.4 设 $A_n \in \mathscr{F}(X)$ $(n \in \mathbf{N})$,且

$$A_n(x) \equiv 0.5\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

则

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)(x) \equiv \frac{1}{2}$$

于是

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)_{0.5} = X$$

但 $\forall n \in \mathbf{N}$, $(A_n)_{0.5} = \varnothing$,从而 $\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n)_{0.5} = \varnothing$,因此

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n)_{0.5} \neq \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)_{0.5}.$$ □

定理 2.1.6 设 $\forall t \in \Lambda, \alpha_t \in [0,1]$, $\alpha \in [0,1]$, $A \in \mathscr{F}(X)$,则

(1) $A_{(\bigvee_{t\in\Lambda} \alpha_t)} = \bigcap_{t\in\Lambda} A_{\alpha_t}$, $A_{\overline{\bigwedge_{t\in\Lambda} \alpha_t}} = \bigcup_{t\in\Lambda} A_{\bar{\alpha}_t}$;

(2) $(A^c)_\alpha=(A_{\overline{1-\alpha}})^c$, $(A^c)_{\bar\alpha}=(A_{1-\alpha})^c$.

证明 (1) $\forall x\in X$, $x\in A_{(\bigvee_{t\in\Lambda}\alpha_t)}\Leftrightarrow A(x)\geqslant\bigvee_{t\in\Lambda}\alpha_t\Leftrightarrow\forall t\in\Lambda, A(x)\geqslant\alpha_t$

$$\Leftrightarrow\forall t\in\Lambda, x\in A_{\alpha_t}\Leftrightarrow x\in\bigcap_{t\in\Lambda}A_{\alpha_t}.$$

同理可证第二式.

(2)只证第一式,第二式的证明类似.

$$\forall x\in X,\ x\in(A^c)_\alpha\Leftrightarrow A^c(x)\geqslant\alpha\Leftrightarrow A(x)\leqslant 1-\alpha$$

$$\Leftrightarrow x\overline{\in}A_{\overline{1-\alpha}}\Leftrightarrow x\in(A_{\overline{1-\alpha}})^c.$$ □

一般地 $(A_\alpha)^c\neq(A^c)_\alpha$,下面的例子说明了这一点.

例 2.1.5 设 $X=\{a,b,c\}$, $A=\frac{0.5}{a}+\frac{0.7}{b}+\frac{0.8}{c}$, 则 $A_{0.6}=\{b,c\}$,于是得到 $(A_{0.6})^c=\{a\}$.

又因为 $A^c=\frac{0.5}{a}+\frac{0.3}{b}+\frac{0.2}{c}$, 故 $(A^c)_{0.6}=\varnothing$, 因此 $(A_{0.6})^c\neq(A^c)_{0.6}$.

□

对于定义 1.3.7 的模并与模交有类似的截集性质.

定理 2.1.7 设 $A,B\in\mathscr{F}(X)$, $\top$, $\bot$ 分别为 t-模与 t-余模, $\alpha\in[0,1]$, 则:

(1) $(A\cup_\bot B)_\alpha\supseteq A_\alpha\cup B_\alpha$, $(A\cap_\top B)_\alpha\subseteq A_\alpha\cap B_\alpha$;

(2) $(A\cup_\bot B)_{\bar\alpha}\supseteq A_{\bar\alpha}\cup B_{\bar\alpha}$, $(A\cap_\top B)_{\bar\alpha}\subseteq A_{\bar\alpha}\cap B_{\bar\alpha}$.

另外,对于截集还有如下定义.

定义 2.1.2 设 $A\in\mathscr{F}(X)$,而 $\alpha\in[0,1]$, 则称

$$[A]_\alpha=\begin{cases}A_\alpha, & 0<\alpha\leqslant 1\\ \overline{A_{\bar 0}}, & \alpha=0\end{cases}\tag{2.1.7}$$

为 A 的广义 α-截集(通常用 $\overline{M}$ 表示集合 M 的闭包).

例 2.1.6 设 A 为例 2.1.3 中的 Fuzzy 集,则

$[A]_0=\overline{(0,2)\cup(2,3)}=\overline{(0,2)}\cup\overline{(2,3)}=[0,2]\cup[2,3]=[0,3]$ □

显然, $\forall A\in\mathscr{F}(X)$,有

(1) $[A]_0\subseteq A_0=X$;

(2) $[A]_\alpha=A_\alpha(\alpha\in(0,1])$.

§ 2.2 分解定理

从截集的性质可知,当 α 从 1 下降趋向于零时, A_α 从 A 的核 $\ker A$ (可能为空集)逐渐向 A 的支集 $\operatorname{supp}A$ 扩展. 因此,我们可以将 Fuzzy 集 A 看做其边界

在 ker$A$ 和 supp$A$ 之间游移，即将 Fuzzy 集 A 看做经典集合族 $\{A_\alpha | \alpha \in [0,1]\}$ 的总体. 下面的分解定理反映了这一事实.

定义 2.2.1 设 $\alpha \in [0,1]$, $A \in \mathscr{F}(X)$，定义 $\alpha A \in \mathscr{F}(X)$，其隶属函数为

$$(\alpha A)(x) = \alpha \wedge A(x),\ x \in X \tag{2.2.1}$$

称 αA 为 α 与 A 的数积(scalar product).

当 A 为经典集时，$(\alpha A)(x) = \alpha \wedge \chi_A(x) = \begin{cases} \alpha, & x \in A \\ 0, & x \overline{\in} A \end{cases}$，而 αA 仍是 Fuzzy 集. 如图 2.2.1 所示.

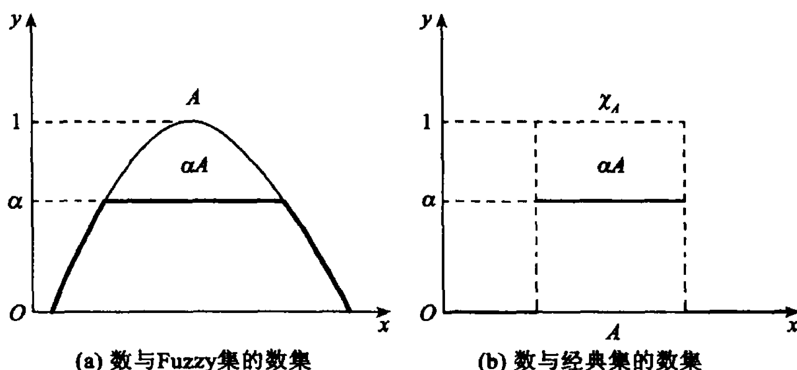


图 2.2.1 数集的隶属函数曲线

定理 2.2.1 设 $A, B \in \mathscr{F}(X)$，则有：

(1)若 $\alpha_1, \alpha_2 \in [0,1]$，则 $\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \Rightarrow \alpha_1 A \subseteq \alpha_2 A$；

(2) $A \subseteq B \Rightarrow \forall \alpha \in [0,1]$, $\alpha A \subseteq \alpha B$.

定理 2.2.2 (分解定理)设 $A \in \mathscr{F}(X)$，则

$$A = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} (\alpha A_\alpha) \tag{2.2.2}$$

$$A = \bigcup_{\alpha \in [0,1)} (\alpha A_{\overline{\alpha}}) \tag{2.2.3}$$

证明 只证第一式，第二式的证明是类似的.

如图 2.2.2 所示，因 A_α 是普通集合，且其特征函数

$$\chi_{A_\alpha}(x) = \begin{cases} 1, & A(x) \geqslant \alpha \\ 0, & A(x) < \alpha \end{cases}$$

于是，$\forall x \in X$，有

$$\begin{aligned}\left(\bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha A_\alpha\right)(x) &= \bigvee_{\alpha \in [0,1]} (\alpha A_\alpha)(x) = \bigvee_{\alpha \in [0,1]} (\alpha \wedge \chi_{A_\alpha}(x)) \\ &= \left(\bigvee_{0 \leqslant \alpha \leqslant A(x)} (\alpha \wedge \chi_{A_\alpha}(x))\right) \vee \left(\bigvee_{A(x) < \alpha \leqslant 1} (\alpha \wedge \chi_{A_\alpha}(x))\right)\end{aligned}$$

$$= \bigvee_{0 \leqslant \alpha \leqslant A(x)} \alpha = A(x)$$ □

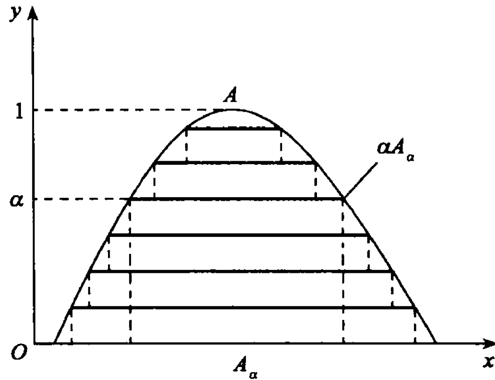


图 2.2.2　一个 Fuzzy 集的分解

由定理 2.2.1 的证明容易得到

$$A(x) = \bigwedge_{\alpha \in [0,1]} \left(\alpha \vee \chi_{A_\alpha}(x)\right) = \bigwedge_{\alpha \in [0,1]} \left(\alpha \vee \chi_{A_{\bar{\alpha}}}(x)\right). \qquad (2.2.4)$$

推论 2.2.1　设 $A \in \mathscr{F}(X)$，$\mathbf{Q}_{[0,1]}$ 为[0,1]中全体有理数之集，则：

(1)
$$A = \bigcup_{\alpha \in \mathbf{Q}_{[0,1]}} (\alpha A_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in \mathbf{Q}_{[0,1]}} (\alpha A_{\bar{\alpha}}) \qquad (2.2.5)$$

(2) $\forall x \in X$，有

$$A(x) = \bigvee \{\alpha \mid \alpha \in [0,1], x \in A_\alpha\} = \bigvee \{\alpha \mid \alpha \in [0,1], x \in A_{\bar{\alpha}}\} \qquad (2.2.6)$$

证明　(1)考虑到 $\mathbf{Q}_{[0,1]}$ 在[0,1]中稠密，故(1)的证明同定理 2.2.2 的证明步骤完全一样.

(2)由定理 2.2.2，$\forall x \in X$，有

$$A(x) = \bigvee_{\alpha \in [0,1]} (\alpha \wedge \chi_{A_\alpha}(x)) = \bigvee_{0 \leqslant \alpha \leqslant A(x)} \{\alpha\} = \bigvee \{\alpha \mid \alpha \in [0,1], x \in A_\alpha\}$$

后一式的证明是类似的. □

推论 2.2.1(2)表明若已知 Fuzzy 集 A 的所有截集，则可以求出 A.

例 2.2.1　设 $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$，并且 $\forall \alpha \in [0,1]$，Fuzzy 集 A 的截集为

$$A_\alpha = \begin{cases} \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}, & 0 \leqslant \alpha \leqslant 0.2 \\ \{x_1, x_2, x_3, x_4\}, & 0.2 < \alpha \leqslant 0.5 \\ \{x_1, x_3, x_4\}, & 0.5 < \alpha \leqslant 0.7 \\ \{x_1, x_4\}, & 0.7 < \alpha \leqslant 0.9 \\ \{x_4\}, & 0.9 < \alpha \leqslant 1.0 \end{cases}$$

则由推论 2.2.1(2),有 $A(x_1)=\bigvee\{\alpha\in[0,1]\mid x_1\in A_\alpha\}=0.9$. 同理

$$A(x_2)=0.5,\quad A(x_3)=0.7,\quad A(x_4)=1.0,\quad A(x_5)=0.2$$

故有

$$A=\frac{0.9}{x_1}+\frac{0.5}{x_2}+\frac{0.7}{x_3}+\frac{1.0}{x_4}+\frac{0.2}{x_5}.$$ □

定理 2.2.3 (广义分解定理)设 $A\in\mathscr{F}(X)$,若存在集值映射

$$H:[0,1]\to\mathscr{P}(X)$$
$$\alpha\mapsto H(\alpha)$$

使得 $\forall\alpha\in[0,1]$, $A_{\bar\alpha}\subseteq H(\alpha)\subseteq A_\alpha$,则:

(1) $A=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\alpha H(\alpha)$;

(2) $\alpha_1<\alpha_2\Rightarrow H(\alpha_1)\supseteq H(\alpha_2)$;

(3) $A_\alpha=\bigcap_{\beta<\alpha}H(\beta)$, $\alpha\in(0,1]$, $A_{\bar\alpha}=\bigcup_{\beta>\alpha}H(\beta)$, $\alpha\in[0,1)$.

证明 (1) $A_{\bar\alpha}\subseteq H(\alpha)\subseteq A_\alpha\Rightarrow\alpha A_{\bar\alpha}\subseteq\alpha H(\alpha)\subseteq\alpha A_\alpha$

$$\Rightarrow A=\bigcup_{\alpha\in[0,1)}\alpha A_{\bar\alpha}\subseteq\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\alpha H(\alpha)\subseteq\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\alpha A_\alpha=A$$
$$\Rightarrow A=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\alpha H(\alpha).$$

(2) 由定理 2.1.1(1)得到

$$\alpha_1<\alpha_2\Rightarrow H(\alpha_1)\supseteq A_{\bar\alpha_1}\supseteq A_{\alpha_2}\supseteq H(\alpha_2).$$

(3) $\forall\beta<\alpha$, $\alpha\in(0,1]$

$$H(\beta)\supseteq A_{\bar\beta}\supseteq A_\alpha\Rightarrow\bigcap_{\beta<\alpha}H(\beta)\supseteq A_\alpha,\ \alpha\in(0,1]$$

又有

$$\bigcap_{\beta<\alpha}H(\beta)\subseteq\bigcap_{\beta<\alpha}A_\beta=A_{(\bigvee_{\beta<\alpha}\beta)}=A_\alpha,\alpha\in(0,1]\text{(由定理 2.1.6(1))}$$

因此

$$A_\alpha=\bigcap_{\beta<\alpha}H(\beta).$$

同理可证另一式. □

上述分解定理说明 Fuzzy 集 A 不仅可以由截集 A_α(或 $A_{\bar\alpha}$)确定,而且还可以由更一般的集合族 $H(\alpha)$, $\alpha\in[0,1]$ 来确定,即 $H(\alpha)$ 不一定是 A_α 或 $A_{\bar\alpha}$,甚至可以介于它们之间. 由于 $H(\alpha)$ 的这种灵活特性,使得映射 $H(\alpha)$ 在实际中具有更广泛的应用.

分解定理也可以推广到 t-模中. 设 $\alpha\in[0,1]$ 和 $A\in\mathscr{F}(X)$, Fuzzy 集 $\alpha\top A$ 被定义为

$$(\alpha\top A)(x)=\alpha\top A(x),\ x\in X\tag{2.2.7}$$

定理 2.2.4 设 $A \in \mathscr{F}(X)$，则

$$A = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} (\alpha \top A_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in [0,1)} (\alpha \top A_{\bar{\alpha}}) \tag{2.2.8}$$

§2.3 表现定理

定义 2.3.1 设有映射 $H:[0,1] \to \mathscr{P}(X)$，而且满足

$$\forall \alpha_1, \alpha_2 \in [0,1], \forall \alpha_1 < \alpha_2 \Rightarrow H(\alpha_2) \subseteq H(\alpha_1)$$

称 H 是 X 上的一个集合套(nest of sets).

今后记 $\mathscr{N}(X)$为 X 上全体集合套之集.

例 2.3.1 设 $A \in \mathscr{F}(X)$，$\forall \alpha \in [0,1]$，令

$$H_1(\alpha) = A_\alpha = \{x \in X \mid A(x) \geqslant \alpha\}$$

$$H_2(\alpha) = A_{\bar{\alpha}} = \{x \in X \mid A(x) > \alpha\}$$

$$H_3(\alpha) \text{ 满足 } A_{\bar{\alpha}} \subseteq H_3(\alpha) \subseteq A_\alpha$$

根据定理 2.1.1 知，A_α 、$A_{\bar{\alpha}}$ 都是集合套. 同样由定理 2.2.3 知 $H_3(\alpha)$ 也是集合套. □

集合套 H 不是 Fuzzy 集，也不是经典集，只是当 α 取确定值时，$H(\alpha)$ 才成为经典集. 因此，对集合套规定如下运算.

定义 2.3.2 设 $\{H_t \mid t \in \Lambda\} \subseteq \mathscr{N}(X)$，分别称 $\bigcup_{t \in \Lambda} H_t$，$\bigcap_{t \in \Lambda} H_t$ 为族 $\{H_t \mid t \in \Lambda\}$ 的并和交. 其中

$$\left(\bigcup_{t \in \Lambda} H_t\right)(\alpha) \triangleq \bigcup_{t \in \Lambda} H_t(\alpha), \forall \alpha \in [0,1] \tag{2.3.1}$$

$$\left(\bigcap_{t \in \Lambda} H_t\right)(\alpha) \triangleq \bigcap_{t \in \Lambda} H_t(\alpha), \forall \alpha \in [0,1] \tag{2.3.2}$$

设 $H \in \mathscr{N}(X)$，称 H^c 为 H 的补，其中

$$(H^c)(\alpha) \triangleq (H(1-\alpha))^c, \ \forall \alpha \in [0,1] \tag{2.3.3}$$

下面定理表明，$\mathscr{N}(X)$对上述运算是封闭的.

定理 2.3.1 设 $H \in \mathscr{N}(X)$，$\{H_t \mid t \in \Lambda\} \subseteq \mathscr{N}(X)$，则

$$\bigcup_{t \in \Lambda} H_t \in \mathscr{N}(X), \ \bigcap_{t \in \Lambda} H_t \in \mathscr{N}(X), \ H^c \in \mathscr{N}(X).$$

证明 这里只证 $H^c \in \mathscr{N}(X)$，其余的由定义 2.3.2 易知.

设 $H \in \mathscr{N}(X)$，则 $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in [0,1]$

$$\alpha_1 < \alpha_2 \Rightarrow 1-\alpha_1 > 1-\alpha_2 \Rightarrow H(1-\alpha_1) \subseteq H(1-\alpha_2)$$

$$\Rightarrow (H(1-\alpha_2))^c \subseteq (H(1-\alpha_1))^c \Rightarrow H^c(\alpha_2) \subseteq H^c(\alpha_1)$$

故 $H^c \in \mathscr{N}(X)$. □

与在 $\mathscr{F}(X)$ 中定义序关系一样，$\mathscr{N}(X)$ 也可以进行类似的讨论.

定义 2.3.3 设 $H_1, H_2 \in \mathscr{N}(X)$，若 $\forall \alpha \in [0,1]$，有 $H_1(\alpha) \subseteq H_2(\alpha)$，则称 H_2 包含 H_1，或 H_1 被包含于 H_2，记为 $H_1 \subseteq H_2$ 或 $H_2 \supseteq H_1$；而 $\forall \alpha \in [0,1]$，又 $H_1(\alpha) = H_2(\alpha)$，则称 $H_1 = H_2$. 又记 $X \in \mathscr{N}(X)$，使得 $\forall \alpha \in [0,1]$，$X(\alpha) = X$；而且 $\varnothing \in \mathscr{N}(X)$，使得 $\forall \alpha \in [0,1]$，$\varnothing(\alpha) = \varnothing$.

容易验证，"$\subseteq$"是 $\mathscr{N}(X)$ 中的偏序关系. 并且直接验证即可得到以下定理.

定理 2.3.2 $\mathscr{N}(X)$ 中的并、交与补运算满足与 $\mathscr{F}(X)$ 中一样的运算规律. 特别地，下列各项成立：$\forall H, H_1, H_2, H_3 \in \mathscr{N}(X)$，则：

(1)有界性 $\varnothing \subseteq H \subseteq X$；

(2)分配律 $H_1 \cup (H_2 \cap H_3) = (H_1 \cup H_2) \cap (H_1 \cup H_3)$，

$H_1 \cap (H_2 \cup H_3) = (H_1 \cap H_2) \cup (H_1 \cap H_3)$；

(3)复原律 $(H^c)^c = H$；

(4)对偶律 $(H_1 \cup H_2)^c = H_1^c \cap H_2^c$.

从而 $(\mathscr{N}(X), \cup, \cap, c)$ 是一个完备的软代数.

与 $\mathscr{F}(X)$ 一样，在 $\mathscr{N}(X)$ 中，互补律也是不成立的.

例 2.3.2 设 $X = [-1,1]$，而 $H: [0,1] \to \mathscr{P}(X)$，使得

$$\forall \alpha \in [0,1], \quad H(\alpha) = [\alpha - 1, 1 - \alpha]$$

则 $H \in \mathscr{N}(X)$，且 $H \cup H^c \neq X, H \cap H^c \neq \varnothing$.

事实上，$\forall \alpha_1, \alpha_2 \in [0,1]$，

$$\begin{aligned} \alpha_1 < \alpha_2 &\Rightarrow \alpha_1 - 1 < \alpha_2 - 1, 1 - \alpha_2 < 1 - \alpha_1 \\ &\Rightarrow [\alpha_2 - 1, 1 - \alpha_2] \subseteq [\alpha_1 - 1, 1 - \alpha_1] \Rightarrow H(\alpha_2) \subseteq H(\alpha_1) \end{aligned}$$

即 $H \in \mathscr{N}(X)$. 又 $\forall \alpha \in [0,1]$，有

$$H^c(\alpha) = (H(1-\alpha))^c = ([-\alpha, \alpha])^c = [-1, -\alpha) \cup (\alpha, 1]$$

取 $\alpha = 0.6$，$H(0.6) = [-0.4, 0.4]$，$H^c(0.6) = [-1, -0.6) \cup (0.6, 1]$，得

$$(H \cup H^c)(0.6) = [-1, -0.6) \cup [-0.4, 0.4] \cup (0.6, 1] \neq X$$

又取 $\alpha = 0.3$，$H(0.3) = [-0.7, 0.7]$，$H^c(0.3) = [-1, -0.3) \cup (0.3, 1]$，这时

$$\begin{aligned} (H \cap H^c)(0.3) &= [-0.7, 0.7] \cap ([-1, -0.3) \cup (0.3, 1]) \\ &= [-0.7, -0.3) \cup (0.3, 0.7] \neq \varnothing. \end{aligned}$$ □

定理 2.3.3 （表现定理 I）设 $H \in \mathscr{N}(X)$，记

$$A = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha H(\alpha) \tag{2.3.4}$$

则 $A \in \mathscr{F}(X)$，而且 $\forall \alpha \in [0,1]$，有：

(1) $\alpha \neq 0 \Rightarrow A_\alpha = \bigcap\limits_{\lambda<\alpha} H(\lambda)$;

(2) $\alpha \neq 1 \Rightarrow A_{\bar{\alpha}} = \bigcup\limits_{\lambda>\alpha} H(\lambda)$.

证明 $\forall \alpha \in [0,1]$，由于 $H(\alpha) \in \mathscr{P}(X)$，则由数与集合乘积的定义知 $\alpha H(\alpha) \in \mathscr{F}(X)$，故

$$A = \bigcup_{\alpha\in[0,1]} (\alpha H(\alpha)) \in \mathscr{F}(X).$$

按广义分解定理，若满足条件 $A_{\bar{\alpha}} \subseteq H(\alpha) \subseteq A_\alpha$，便可得(1)和(2)，下面证明上述条件成立.

事实上，$\forall \alpha\in[0,1]$，若 $\alpha \neq 1$

$$x \in A_{\bar{\alpha}} \Rightarrow A(x) > \alpha \Rightarrow (\bigvee_{\lambda\in[0,1]} \lambda H(\lambda)(x)) > \alpha \Rightarrow (\bigvee_{\lambda\in[0,1]} (\lambda \wedge H(\lambda)(x))) > \alpha$$

$$\Rightarrow (\exists \lambda_0 \in [0,1])(\lambda_0 \wedge H(\lambda_0)(x) > \alpha)$$

$$\Rightarrow \lambda_0 > \alpha, H(\lambda_0)(x) = 1 \Rightarrow x \in H(\lambda_0) \subseteq H(\alpha)$$

若 $\alpha = 1$, $A_{\bar{\alpha}} = \varnothing$

$$x \in H(\alpha) \Rightarrow H(\alpha)(x) = 1$$

$$\Rightarrow (\bigvee_{\lambda\in[0,1]} (\lambda \wedge H(\lambda)(x)) \geqslant \alpha \wedge H(\alpha)(x) = \alpha$$

$$\Rightarrow A(x) \geqslant \alpha \Rightarrow x \in A_\alpha$$

因此，$\forall \alpha \in [0,1]$，$A_{\bar{\alpha}} \subseteq H(\alpha) \subseteq A_\alpha$. □

推论 2.3.1 设 $H \in \mathscr{N}(X)$，记

$$A = \bigcup_{\alpha\in[0,1]} (\alpha H(\alpha)) \tag{2.3.5}$$

则(1) $\forall \alpha \in [0,1], A_{\bar{\alpha}} \subseteq H(\alpha) \subseteq A_\alpha$;

(2) $\forall x \in X, A(x) = \bigvee \{\alpha \in [0,1] \mid x \in H(\alpha)\}$.

证明 (1)在定理 2.3.3 的证明中已证. 对于(2)，$\forall x \in X$，由推论 2.2.1 推出

$$A(x) = \bigvee \{\alpha \in [0,1] \mid x \in A_\alpha\} = \bigvee \{\alpha \in [0,1] \mid x \in A_{\bar{\alpha}}\}$$

利用(1)，得

$$A(x) = \bigvee \{\alpha \in [0,1] \mid x \in A_{\bar{\alpha}}\} \leqslant \bigvee \{\alpha \in [0,1] \mid x \in H(\alpha)\}$$

$$\leqslant \bigvee \{\alpha \in [0,1] \mid x \in A_\alpha\} = A(x)$$

即(2)成立. □

例 2.3.3 设 $X = [-1,1]$，而 $H:[0,1] \to \mathscr{P}(X)$，使得

$$\forall \alpha \in [0,1], \quad H(\alpha) = [\alpha - 1, 1 - \alpha]$$

则由例 2.3.2 知 $H \in \mathscr{N}(X)$. $\forall x \in X$，由推论 2.3.1 得

$$A(x) = \bigvee_{x\in H(\alpha)} \{\alpha\}$$

当 $-1 \leqslant x \leqslant 0$ 时，$H(\alpha)$ 中包含 x 的最大的 α 满足：$\alpha-1=x$，即 $\alpha=1+x$，此时 $A(x)=1+x$；当 $0<x\leqslant 1$ 时，$H(\alpha)$ 中包含 x 的最大的 α 满足：$1-\alpha=x$，即 $\alpha=1-x$，此时 $A(x)=1-x$. 其曲线如图 2.3.1 所示.

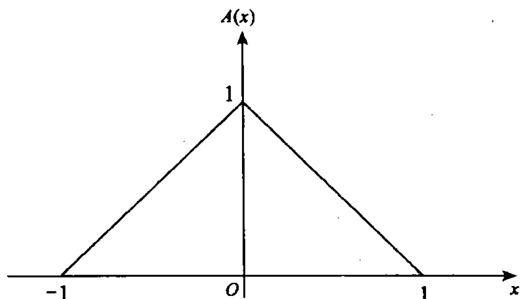


图 2.3.1

定理 2.3.4 （表现定理 II）令

$$\varphi: \mathcal{N}(X) \to \mathscr{F}(X)$$
$$H \mapsto \varphi(H) = \bigcup_{\alpha\in[0,1]} \alpha H(\alpha)$$

则 φ 是从$(\mathcal{N}(X), \cup, \cap, c)$ 到$(\mathscr{F}(X), \cup, \cap, c)$ 上的同态满射，并且 $\forall \alpha \in [0,1]$，有：

(1) $\varphi(H)_{\bar{\alpha}} \subseteq H(\alpha) \subseteq \varphi(H)_\alpha$；

(2) $\varphi(H)_\alpha = \bigcap\limits_{\lambda<\alpha} H(\lambda)$；

(3) $\varphi(H)_{\bar{\alpha}} = \bigcup\limits_{\lambda>\alpha} H(\lambda)$.

证明 (1)、(2)、(3)的证明直接由定理 2.3.3 即得，下证 φ 是同态满射.

1)证明 φ 是满射.

任取 $A \in \mathscr{F}(X)$，定义 $H:[0,1] \to \mathscr{P}(X)$，使得

$$\forall \alpha \in [0,1], \quad H(\alpha) = A_\alpha$$

由例 2.3.1 知 $H \in \mathcal{N}(X)$，而且由广义分解定理得

$$A = \bigcup_{\alpha\in[0,1]} \alpha H(\alpha)$$

这样，$\varphi(H)=A$，即 φ 是满射.

2)证明 φ 保持" $\cup$ "、" $\cap$ "运算.

对于集合套族 $\{H_t \mid t \in T\}$，$\forall \alpha \in [0,1)$，考虑到(3)，有

$$\left(\varphi\left(\bigcup_{t\in T} H_t\right)\right)_{\bar{\alpha}} = \bigcup_{\lambda>\alpha}\left(\bigcup_{t\in T} H_t\right)(\lambda) = \bigcup_{\lambda>\alpha}\left(\bigcup_{t\in T} H_t(\lambda)\right)$$

$$=\bigcup_{t\in T}\left(\bigcup_{\lambda>\alpha}H_t(\lambda)\right)=\bigcup_{t\in T}(\varphi(H_t))_{\bar{\alpha}}$$

$$=\left(\bigcup_{t\in T}\varphi(H_t)\right)_{\bar{\alpha}}\quad\text{(由定理 2.1.5(2))}$$

且显见当 $\alpha=1$ 时，上式仍然成立．则由分解定理得

$$\varphi\left(\bigcup_{t\in T}H_t\right)=\bigcup_{t\in T}\varphi(H_t)$$

同理可证

$$\varphi\left(\bigcap_{t\in T}H_t\right)=\bigcap_{t\in T}\varphi(H_t).$$

3)证明 φ 保持"c"运算．

设 $H\in\mathcal{N}(X)$，$\forall\alpha\in(0,1]$，由(2)、(3)与定理 2.1.6(2)有

$$(\varphi(H^c))_\alpha=\bigcap_{\lambda<\alpha}H^c(\lambda)=\bigcap_{\lambda<\alpha}(H(1-\lambda))^c$$

$$=\left(\bigcup_{1-\lambda>1-\alpha}H(1-\lambda)\right)^c=\left(\bigcup_{\lambda>1-\alpha}H(\lambda)\right)^c$$

$$=((\varphi(H))_{\overline{1-\alpha}})^c=((\varphi(H))^c)_\alpha.$$

综上所述，φ 是同态满射．□

分解定理说明一个 Fuzzy 集可以由一些集合套表示，而从表现定理可见，每个集合套表示了一个 Fuzzy 集．

定理 2.3.5　设 $\{A_t\,|\,t\in T\}\subseteq\mathcal{F}(X)$，则：

(1) $\bigcup\limits_{t\in T}A_t=\bigcup\limits_{\alpha\in[0,1]}\alpha\left(\bigcup\limits_{t\in T}(A_t)_\alpha\right)$；

(2) $\bigcap\limits_{t\in T}A_t=\bigcup\limits_{\alpha\in[0,1]}\alpha\left(\bigcap\limits_{t\in T}(A_t)_\alpha\right)$．

证明　(1)令 $H_t\in\mathcal{N}(X)$，$H_t(\alpha)=(A_t)_\alpha$．根据表现定理 II，有

$$\varphi(H_t)=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\alpha H_t(\alpha)=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\alpha(A_t)_\alpha=A_t,\ \forall t\in T$$

并且

$$\bigcup_{t\in T}A_t=\bigcup_{t\in T}\varphi(H_t)=\varphi\left(\bigcup_{t\in T}H_t\right)=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\alpha\left(\bigcup_{t\in T}H_t\right)(\alpha)$$

$$=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\alpha\left(\bigcup_{t\in T}H_t(\alpha)\right)=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\alpha\left(\bigcup_{t\in T}(A_t)_\alpha\right)$$

类似地可以证明(2)．□

定理 2.3.6　设 $\{A_t\,|\,t\in T\}\subseteq\mathcal{F}(X)$，则 $\forall\alpha\in[0,1]$：

(1) $\left(\bigcup\limits_{t\in T}A_t\right)_\alpha=\bigcap\limits_{\lambda<\alpha}\left(\bigcup\limits_{t\in T}(A_t)_\lambda\right)$；

(2) $\left(\bigcap_{t\in T} A_t\right)_{\bar{\alpha}} = \bigcup_{\lambda>\alpha}\left(\bigcup_{t\in T}(A_t)_{\bar{\lambda}}\right)$.

证明 (1)令 $H_t \in \mathcal{N}(X)$, $H_t(\alpha)=(A_t)_\alpha$, 由定理 2.3.5 推得

$$\bigcup_{t\in T} A_t = \varphi\left(\bigcup_{t\in T} H_t\right)$$

再根据表现定理 II, $\forall \alpha \in [0,1]$ 有

$$\left(\bigcup_{t\in T} A_t\right)_\alpha = \left(\varphi\left(\bigcup_{t\in T} H_t\right)\right)_\alpha = \bigcap_{\lambda<\alpha}\left(\bigcup_{t\in T} H_t\right)(\lambda) = \bigcap_{\lambda<\alpha}\left(\bigcup_{t\in T} H_t(\lambda)\right)$$

同理可证(2). □

由于 φ 是满射而不是单射,可以有许多不同的集合套 H 对应同一个 Fuzzy 集 A, 所以为了进一步刻画($\mathcal{F}(X)$, $\cup$, $\cap$, c) 的结构,必须将 $\mathcal{N}(X)$ 中具有某类性质的元素划做一类而视为一个元素.

定义 2.3.4 设 $H_1, H_2 \in \mathcal{N}(X)$, 若 $\varphi(H_1)=\varphi(H_2)$, 则称 H_1 与 H_2 是 φ 等价集合套,此时记为 $H_1 \sim_\varphi H_2$.

易知 $\sim_\varphi$ 是 $\mathcal{N}(X)$ 上的等价关系,而且由表现定理 II 与分解定理,下述定理是显然的.

定理 2.3.7 设 $H_1, H_2 \in \mathcal{N}(X)$, 则下列各项等价:

(1) $H_1 \sim_\varphi H_2$;

(2) $\forall \alpha \in (0,1]$, $\bigcap_{\lambda<\alpha} H_1(\lambda) = \bigcap_{\lambda<\alpha} H_2(\lambda)$;

(3) $\forall \alpha \in [0,1)$, $\bigcup_{\lambda>\alpha} H_1(\lambda) = \bigcup_{\lambda>\alpha} H_2(\lambda)$.

定理 2.3.8 设 $H_1, H_2 \in \mathcal{N}(X)$, $\{H_t \mid t \in T\} \subseteq \mathcal{N}(X)$, $\{H'_t \mid t \in T\} \subseteq \mathcal{N}(X)$, 而且 $H_1 \sim_\varphi H_2$, $\forall t \in T$, $H_t \sim_\varphi H'_t$, 则有:

(1) $H_1^c \sim_\varphi H_2^c$;

(2) $\bigcup_{t\in T} H_t \sim_\varphi \bigcup_{t\in T} H'_t$, $\bigcap_{t\in T} H_t \sim_\varphi \bigcap_{t\in T} H'_t$.

由于 $\sim_\varphi$ 是 $\mathcal{N}(X)$ 上的等价关系,于是得到商集

$$N(X)/\sim_\varphi = \{[H]_\varphi \mid H \in \mathcal{N}(X)\} \tag{2.3.6}$$

其中 $[H]_\varphi = \{H_1 \in \mathcal{N}(X) \mid H_1 \sim_\varphi H\}$. 在不混淆的情况下将 $[H]_\varphi$ 记为 $[H]$.

设 $H \in \mathcal{N}(X)$, $\{H_t \mid t \in T\} \subseteq \mathcal{N}(X)$, 分别定义并、交、补运算如下

$$\bigcup_{t\in T} [H_t] = \left[\bigcup_{t\in T} H_t\right] \tag{2.3.7}$$

$$\bigcap_{t\in T} [H_t] = \left[\bigcap_{t\in T} H_t\right] \tag{2.3.8}$$

$$[H]^c = [H^c] \tag{2.3.9}$$

定理 2.3.9　映射 $\varphi':\mathcal{N}(X)/\sim_\varphi\to\mathcal{F}(X)$，$[H]\mapsto\varphi'([H])\triangleq\varphi(H)$ 是代数系$(\mathcal{N}(X),/\sim_\varphi,\cup,\cap,c)$ 与代数系$(\mathcal{F}(X),\cup,\cap,c)$ 之间的同构映射.

证明　由表现定理 II，φ' 是同态满射. 下面只需证明 φ' 是单射.

事实上，设 $[H_1],[H_2]\in\mathcal{N}(X)/\sim_\varphi$，则

$$[H_1]\neq[H_2]\Rightarrow H_1/\sim_\varphi H_2\Rightarrow\varphi(H_1)\neq\varphi(H_2)\Rightarrow\varphi'([H_1])\neq\varphi'([H_2])$$

即 φ' 是单射. 这样，φ' 是同构映射. □

由定理 2.3.9，Fuzzy 集在同构意义下为集合套的一个等价类，这为用经典的方法来研究$(\mathcal{F}(X),\cup,\cap,c)$ 的代数结构开辟了一条新途径.

设 $F\in\mathcal{N}(X)$，称集合套 F 为 X 上一个晕集(或称集轮)，如果满足条件

$$F(0)=X,\quad F(\bigvee_{t\in T}\lambda_t)=\bigcap_{t\in T}F(\lambda_t)$$

X 上全体晕集组成的集合记为 $\mathcal{L}(X)$.

设 $\underline{F}\in\mathcal{N}(X)$，称集合套 $\underline{F}$ 为 X 上一个开晕集(或称开集轮)，如果满足条件

$$\underline{F}(1)=\varnothing,\quad \underline{F}(\bigwedge_{t\in T}\lambda_t)=\bigcup_{t\in T}\underline{F}(\lambda_t)$$

X 上全体开晕集组成的集合记为$\underline{\mathcal{L}}(X)$.

例 2.3.4　设 $A\in\mathcal{F}(X)$，构作映射

$$F:[0,1]\to P(X),\quad \alpha\mapsto F(\alpha)\triangleq A_\alpha$$

$$\underline{F}:[0,1]\to P(X),\quad \alpha\mapsto\underline{F}(\alpha)\triangleq A_{\bar{\alpha}}$$

易知 $F\in\mathcal{L}(X)$，$\underline{F}\in\underline{\mathcal{L}}(X)$. □

定理 2.3.10　$\forall\ [H]\in\mathcal{N}(X)/\sim_\varphi$，有

(1)存在唯一的晕集 $F_H\in[H]$，使

$$F_H(\eta)=\bigcap_{\alpha\in[0,\eta)}H(\alpha),\eta\in(0,1] \tag{2.3.10}$$

(2)存在唯一的开晕集 $\underline{F}_H\in[H]$，使

$$\underline{F}_H(\eta)=\bigcup_{\alpha\in(\eta,1]}H(\alpha),\eta\in[0,1) \tag{2.3.11}$$

证明　只证(1)，(2)的证明是类似的. 事实上，由表现定理 II 知 $\varphi(H)\in\mathcal{F}(X)$. 注意到例 2.3.4，存在 $F_H\in\mathcal{L}(X)$，使

$$F_H(\eta)=(\varphi(H))_\eta=\bigcap_{\lambda\in[0,\eta)}H(\lambda)$$

唯一性是显然的. 现证 $F_H\in[H]$，事实上

$$(\varphi(F_H))_\eta=\bigcap_{\lambda\in[0,\eta)}F_H(\lambda)=\bigcap_{\lambda\in[0,\eta)}\Big(\bigcap_{v\in[0,\lambda)}H(v)\Big)=\bigcap_{\lambda\in[0,\eta)}H(\lambda)=(\varphi(H))_\eta$$

因此，$F_H\in[H]$. 从而(1)成立. □

定理 2.3.11

(1)$(\mathscr{N}(X)/\sim_\varphi, \bigcup, \bigcap, c) \cong (\mathscr{L}(X), \bigcup, \bigcap, c)$;

(2)$(\mathscr{N}(X)/\sim_\varphi, \bigcup, \bigcap, c) \cong (\underline{\mathscr{L}}(X), \bigcup, \bigcap, c)$.

证明 构作映射 f 和 $\underline{f}$

$$f: \mathscr{N}(X)/\sim_\varphi \to \mathscr{L}(X), [H] \mapsto f([H]) \triangleq F_H$$

$$\underline{f}: \mathscr{N}(X)/\sim_\varphi \to \underline{\mathscr{L}}(X), [H] \mapsto \underline{f}([H]) \triangleq \underline{F}_H$$

容易验证, f 和 $\underline{f}$ 均是同构映射. □

推论 2.3.2 $(\mathscr{L}(X), \bigcup, \bigcap, c) \cong (\mathscr{F}(X), \bigcup, \bigcap, c)$.

证明 取 $g \triangleq \varphi' \circ f^{-1}$ (φ' 与 f 如前所述),则

$$g: \mathscr{L}(X) \to \mathscr{F}(X), F \mapsto g(F) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha F(\alpha)$$

是 $\mathscr{L}(X)$ 到 $\mathscr{F}(X)$ 的同构映射. □

推论 2.3.3 $(\underline{\mathscr{L}}(X), \bigcup, \bigcap, c) \cong (\mathscr{F}(X), \bigcup, \bigcap, c)$.

证明 取 $g \triangleq \varphi' \circ \underline{f}^{-1}$ (φ' 与 $\underline{f}$ 如前所述),则

$$\underline{g}: \underline{\mathscr{L}}(X) \to \mathscr{F}(X), \underline{F} \mapsto \underline{g}(\underline{F}) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha \underline{F}(\alpha)$$

是 $\underline{\mathscr{L}}(X)$ 到 $\mathscr{F}(X)$ 的同构映射. □

§ 2.4 扩张原理

研究集合 X 与 Y 之间的关系是经典集合论最基本的论题. 自然,研究 $\mathscr{F}(X)$ 与 $\mathscr{F}(Y)$ 的对应关系应是模糊集合论中的重要内容. 下面的扩张原理就是通过 X 与 Y 的映射来研究 $\mathscr{F}(X)$ 与 $\mathscr{F}(Y)$ 的对应关系.

2.4.1 一元扩张原理

设有映射
$$f: X \to Y$$
$$x \mapsto y = f(x)$$

由上述映射可以诱导出一个新映射,仍记做 f, 即
$$f: \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(Y)$$
$$A \mapsto B = f(A)$$

其中 $f(A) \triangleq \{y \in Y \mid \exists x \in X, 使 f(x) = y\}$, 称 $f(A)$ 为 A 的像,如图 2.4.1 (a)所示.

对于单元素 $\{x\}$, 约定为 $f(\{x\})$, 简记为 $f(x)$.

定理 2.4.1 设 $f: X \to Y$, 而 $A \in \mathscr{P}(X)$,则 $\forall y \in Y$, 对于诱导映射 f 有

$$f(A)(y)=\begin{cases}\bigvee\limits_{f(x)=y} A(x), & f^{-1}(y)\neq\varnothing\\ 0, & f^{-1}(y)=\varnothing\end{cases}=\begin{cases}\bigvee\limits_{x\in f^{-1}(y)} A(x), & f^{-1}(y)\neq\varnothing\\ 0, & f^{-1}(y)=\varnothing\end{cases}\tag{2.4.1}$$

证明　对 $y\in Y$，若 $f^{-1}(y)=\varnothing$，则 $\forall x\in A, y\neq f(x)$，即有 $y\,\overline{\in}\, f(A)$，从而 $f(A)(y)=0$；若 $f^{-1}(y)\neq\varnothing$，下面分两种情形来证明：

情形 I，存在 $x_0\in A$，使 $f(x_0)=y$，则 $y\in f(A)$，$f(A)(y)=1$，这时

$$1\geqslant\bigvee_{x\in f^{-1}(y)} A(x)\geqslant A(x_0)=1\Rightarrow f(A)(y)=\bigvee_{x\in f^{-1}(y)} A(x).$$

情形 II，$\forall x\in A$，$f(x)\neq y$，则 $y\,\overline{\in}\, f(A)$，$f(A)(y)=0$，这时若 $x\in f^{-1}(y)$，则 $x\,\overline{\in}\, A$，故

$$\bigvee_{x\in f^{-1}(y)} A(x)=0\Rightarrow f(A)(y)=\bigvee_{x\in f^{-1}(y)} A(x)$$

这样总有

$$f(A)(y)=\begin{cases}\bigvee\limits_{x\in f^{-1}(y)} A(x), & f^{-1}(y)\neq\varnothing\\ 0, & f^{-1}(y)=\varnothing\end{cases}$$

定理得证.　□

同样由 $f:X\to Y$ 可以定义 $f^{-1}:\mathscr{P}(Y)\to\mathscr{P}(X)$ 如下

$$B\to f^{-1}(B)=\{x\in X\mid f(x)\in B\}\tag{2.4.2}$$

称 $f^{-1}(B)$ 为 B 的逆像，如图 2.4.1(b)所示.

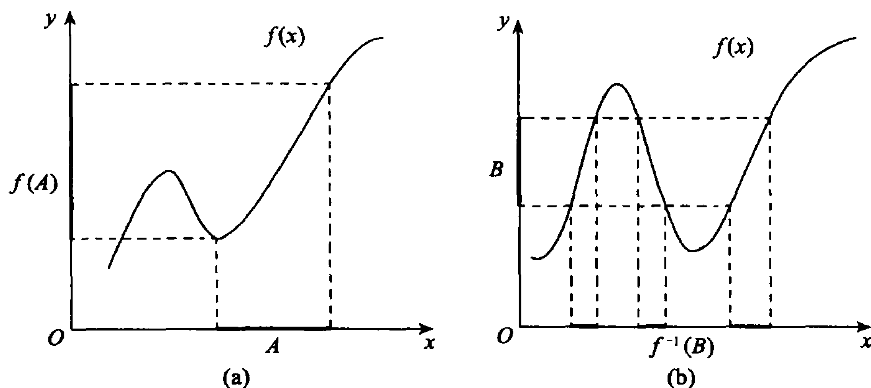


图 2.4.1　经典扩张原理示意图

同样也可以得到下面的定理，其证明是容易的.

定理 2.4.2　设 $f:X\to Y$，而 $B\in\mathscr{P}(Y)$，则 $\forall x\in X$，有

$$f^{-1}(B)(x)=B(f(x))\triangleq B\circ f(x) \tag{2.4.3}$$

像与逆像还有下列性质：

性质 2.4.1 $f^{-1}(f(A))\supseteq A$，当 f 为单射时取等式；

性质 2.4.2 $f(f^{-1}(B))\subseteq B$，当 f 为满射时取等式.

定理 2.4.1 与定理 2.4.2 是经典扩张原理，将 $f:X\to Y$ 与 $f^{-1}:Y\to X$ 分别扩张为 $\mathscr{P}(X)\to\mathscr{P}(Y)$ 以及 $\mathscr{P}(Y)\to\mathscr{P}(X)$ 的映射. 由此，可以将它们分别扩张为 Fuzzy 集之间的映射.

定义 2.4.1 （扩张原理 I，Zadeh，1965，1975）设有映射 $f:X\to Y$，则由该映射可以诱导出两个如下映射，分别记为 f 与 f^{-1}

$$f:\mathscr{F}(X)\to\mathscr{F}(Y),\ A\mapsto f(A)$$

$$f^{-1}:\mathscr{F}(Y)\to\mathscr{F}(X),\ B\mapsto f^{-1}(B)$$

其中

$$f(A)(y)=\begin{cases}\bigvee\limits_{f(x)=y}A(x), & f^{-1}(y)\neq\varnothing\\ 0, & f^{-1}(y)=\varnothing\end{cases} \tag{2.4.4}$$

$$f^{-1}(B)(x)=B(f(x)) \tag{2.4.5}$$

称 $f(A)$ 是 A 在 f 下的像，而 $f^{-1}(B)$ 是 B 关于 f 的逆像. 如图 2.4.2 所示.

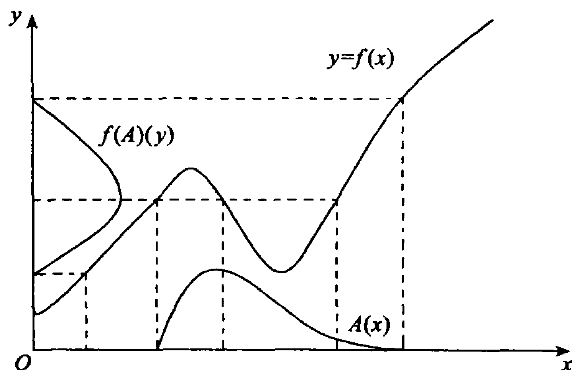


图 2.4.2 Fuzzy 扩张原理示意图

特别地，设 $f:X\to Y$ 是一一对应的，则应有

$$f(A)(y)=\begin{cases}A(x), & f^{-1}(y)\neq\varnothing\\ 0, & f^{-1}(y)=\varnothing\end{cases} \tag{2.4.6}$$

如图 2.4.3 所示.

例 2.4.1 设 $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$，$Y=\{a,b,c,d\}$，而

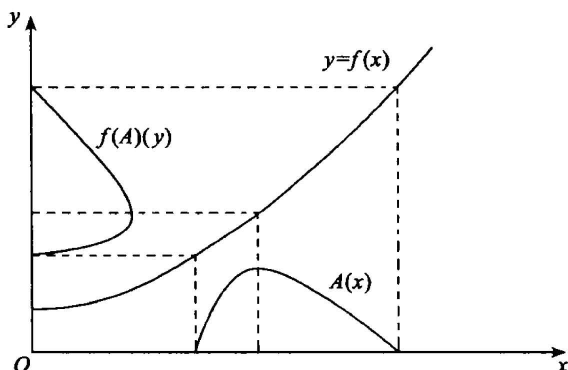


图 2.4.3　Fuzzy 扩张原理的一个特例

$$f(x)=\begin{cases} a, & x\in\{x_1,x_2,x_3\} \\ b, & x\in\{x_4,x_5\} \\ c, & x=x_6 \end{cases}$$

$$A=\frac{1.0}{x_1}+\frac{0.5}{x_2}+\frac{0.9}{x_3}+\frac{0.3}{x_4}+\frac{0.8}{x_6}$$

则由扩张原理 I，$B=f(A)\in\mathscr{F}(Y)$，且由 $f^{-1}(a)\neq\varnothing$，得

$$f(A)(a)=\bigvee_{f(x)=a}A(x)=A(x_1)\vee A(x_2)\vee A(x_3)=1.0\vee 0.5\vee 0.9=1.0$$

同理 $f(A)(b)=A(x_4)\vee A(x_5)=0.3$，$f(A)(c)=A(x_6)=0.8$. 而 $f^{-1}(d)=\varnothing$，则 $f(A)(d)=0$. 从而

$$B=f(A)=\frac{1.0}{a}+\frac{0.3}{b}+\frac{0.8}{c}$$

又 $\forall x\in X$，$f^{-1}(B)(x)=B(f(x))$，故

$$f^{-1}(B)(x_1)=B(a)=1.0,\ f^{-1}(B)(x_2)=B(a)=1.0$$
$$f^{-1}(B)(x_3)=B(a)=1.0,\ f^{-1}(B)(x_4)=B(b)=0.3$$
$$f^{-1}(B)(x_5)=B(b)=0.3,\ f^{-1}(B)(x_6)=B(c)=0.8$$

所以

$$f^{-1}(B)=\frac{1.0}{x_1}+\frac{1.0}{x_2}+\frac{1.0}{x_3}+\frac{0.3}{x_4}+\frac{0.3}{x_5}+\frac{0.8}{x_6}.$$ □

在例 2.4.1 中，论域 X 是有限集，下面给出一个 X 是无限集的实例.

例 2.4.2　设 $X=\mathbf{R}$，$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，$f(x)=x^2+1$，而且 $A\in\mathscr{F}(X)$

$$A(x)=\begin{cases} 1+\frac{1}{2}x, & -2<x\leqslant 0 \\ 1-x, & 0<x\leqslant 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其曲线如图 2.4.4 所示.

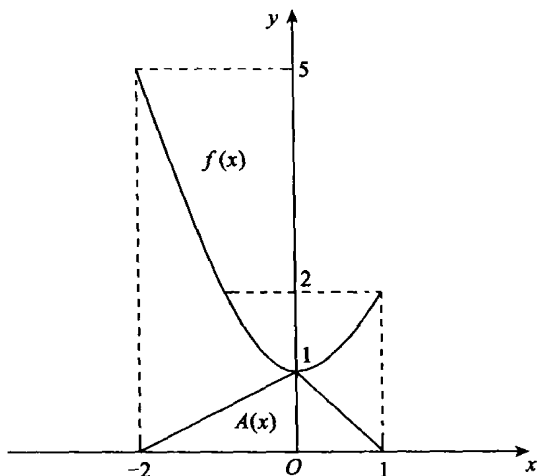


图 2.4.4 Fuzzy 集 A 与实函数 f 示意图

当 $x \leqslant -2$ 或 $x \geqslant 1$ 时，$A(x)=0$，所以 $y \geqslant 5 \Rightarrow f(A)(y)=0$，又

$$y < 1 \Rightarrow f^{-1}(y)=\varnothing \Rightarrow f(A)(y)=0$$

$$y=1 \Rightarrow f^{-1}(1)=\{0\} \Rightarrow f(A)(1)=A(0)=1$$

当 $1<y<5$ 时，由 $f(x)=y$ 得，$x_1=-\sqrt{y-1}$，$x_2=\sqrt{y-1}$，则

$$2<y<5 \Rightarrow f(A)(y)=A(x_1) \vee A(x_2)=A(x_1) \vee 0=1-\frac{1}{2}\sqrt{y-1}$$

$$1<y \leqslant 2 \Rightarrow f(A)(y)=A(x_1) \vee A(x_2)$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\sqrt{y-1}\right) \vee (1-\sqrt{y-1})=1-\frac{1}{2}\sqrt{y-1}$$

从而

$$f(A)(y)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{2}\sqrt{y-1}, & 1 \leqslant y \leqslant 5 \\ 0, & \text{其他}\end{cases}.$$ □

例 2.4.3 设 $(X, \leqslant)$ 是偏序集，$N: X \to X$ 是 X 上的伪补(参见定义 1.3.3)，则对于 $A \in \mathscr{F}(X)$，N 的扩张运算记为 $A^{\tilde{N}}$，我们有 $A^{\tilde{N}}(x)=A(N(x))$. 事实上由扩张原理我们得到 $A^{\tilde{N}}(x)=\bigvee_{N(y)=x} A(y)=\bigvee_{y=N(x)} A(y)=A(N(x))$. 值得注意的是 $A^{\tilde{N}}$ 与 A 的伪补 A^N 是不同的(参见定义 1.3.7). 容易验证：对所有 $A, B \in \mathscr{F}(X)$

$$A^{\tilde{N}\tilde{N}}=A, \quad A^{N\tilde{N}}=A^{\tilde{N}N}, \quad A^{NN}=A$$

$$(A \cup B)^{\tilde{N}} = A^{\tilde{N}} \cup B^{\tilde{N}}, \quad A^{\tilde{N}} \cap B^{\tilde{N}} = A^{\tilde{N}} \cap B^{\tilde{N}}.$$ □

定理 2.4.3　设 $f: X \to Y$，以及 $A, B \in \mathscr{F}(X)$，$\{A_t \mid t \in T\} \subseteq \mathscr{F}(X)$，则有：

(1) $f(A) = \varnothing \Leftrightarrow A = \varnothing$；

(2) $A \subseteq B \Rightarrow f(A) \subseteq f(B)$；

(3) $f\left(\bigcap_{t \in T} A_t\right) \subseteq \bigcap_{t \in T} f(A_t)$；

(4) $f\left(\bigcup_{t \in T} A_t\right) = \bigcup_{t \in T} f(A_t)$.

证明　(1)若 $A = \varnothing$，由扩张原理 I，显见 $f(A) = f(\varnothing) = \varnothing$. 反之，设 $f(A) = \varnothing$，则 $\forall x \in X$，记 $y = f(x)$，有

$$A(x) \leqslant \bigvee_{f(t)=y} A(t) = f(A)(y) = 0$$

故 $A = \varnothing$.

(2) $$A \subseteq B \Rightarrow \forall x \in X, A(x) \leqslant B(x)$$
$$\Rightarrow \forall y \in Y, \bigvee_{f(x)=y} A(x) \leqslant \bigvee_{f(x)=y} B(x)$$
$$\Rightarrow \forall y \in Y, f(A)(y) \leqslant f(B)(y) \Rightarrow f(A) \subseteq f(B).$$

(3)由(2)易证.

(4)任取 $y \in Y$，若 $f^{-1}(y) = \varnothing$，由于 $\forall t \in T, f(A_t) = \varnothing$，则

$$f\left(\bigcup_{t \in T} A_t\right) = \bigcup_{t \in T} f(A_t) = \varnothing$$

又若 $f^{-1}(y) \neq \varnothing$，则由扩张原理 I，得

$$f\left(\bigcup_{t \in T} A_t\right)(y) = \bigvee_{x \in f^{-1}(y)} \left(\bigcup_{t \in T} A_t\right)(x) = \bigvee_{x \in f^{-1}(y)} \bigvee_{t \in T} A_t(x)$$
$$= \bigvee_{t \in T} \bigvee_{x \in f^{-1}(y)} A_t(x) = \bigvee_{t \in T} f(A_t)(y) = \left(\bigcup_{t \in T} f(A_t)\right)(y)$$

从而 $f\left(\bigcup_{t \in T} A_t\right) = \bigcup_{t \in T} f(A_t)$，(4)得证. □

定理 2.4.4　设 $f: X \to Y$，$A \in \mathscr{F}(X)$，$B \in \mathscr{F}(Y)$，则 $\forall \alpha \in [0,1]$，有

$$f(A)_{\bar{\alpha}} = f(A_{\bar{\alpha}}) \tag{2.4.7}$$

$$f(A_\alpha) \subseteq f(A)_\alpha \tag{2.4.8}$$

$$f^{-1}(B)_{\bar{\alpha}} = f^{-1}(B_{\bar{\alpha}}) \tag{2.4.9}$$

$$f^{-1}(B)_\alpha = f^{-1}(B_\alpha) \tag{2.4.10}$$

证明　只证第一式，其他类似证明. 由扩张原理 I，我们有

$$y \in f(A)_{\bar{\alpha}} \Leftrightarrow f(A)(y) > \alpha \Leftrightarrow \bigvee_{x \in f^{-1}(y)} A(x) > \alpha$$
$$\Leftrightarrow \exists x_0 \in X,\ f(x_0) = y,\ A(x_0) > \alpha$$
$$\Leftrightarrow \exists x_0 \in f^{-1}(y),\ x_0 \in A_{\bar{\alpha}}$$
$$\Leftrightarrow y \in f(A_{\bar{\alpha}})$$

从而 $f(A)_{\bar{\alpha}} = f(A_{\bar{\alpha}})$. □

应特别注意的是，$f(A)_\alpha = f(A_\alpha)$ 并不一定成立，这一点由下面的例子即可以看出.

例 2.4.4 设 $f:[0,1] \to [0,1]$，使得 $\forall x \in [0,1]$，有

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

而 $A \in \mathscr{F}([0,1])$，使 $A(x) = 1 - x(x \in [0,1])$，$\forall y \in [0,1]$，由扩张原理 I，有

$$f(A)(y) = \begin{cases} \bigvee_{f(x)=1} A(x), & y = 1 \\ \bigvee_{f(x)=0} A(x), & y = 0 \\ 0, & 0 < y < 1 \end{cases} = \begin{cases} \bigvee_{n \in \mathbf{N}} \left(1 - \frac{1}{n}\right), & y = 1 \\ \bigvee_{f(x)=0} (1 - x), & y = 0 \\ 0, & 0 < y < 1 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 1, & y = 0 \text{ 或 } 1 \\ 0, & 0 < y < 1 \end{cases}$$

取 $\alpha = 1$，则 $f(A)_1 = \{0,1\}$，但 $f(A_1) = \{f(0)\} = \{0\}$，这样，$f(A)_1 \neq f(A_1)$. □

定理 2.4.5 设 $f: X \to Y$，$A \in \mathscr{F}(X)$，则 $\forall \alpha \in [0,1]$，等式

$$f(A)_\alpha = f(A_\alpha) \tag{2.4.11}$$

成立当且仅当 $\forall y \in Y$，存在 $x_0 \in f^{-1}(y)$，使得 $f(A)(y) = A(x_0)$.

证明 必要性：任取 $y \in Y$，令 $\alpha = f(A)(y)$，则 $\alpha \in [0,1]$，而且 $y \in f(A)_\alpha = f(A_\alpha)$，即存在 $x_0 \in A_\alpha$，$y = f(x_0)$，故 $x_0 \in f^{-1}(y)$，满足 $A(x_0) \geqslant \alpha$，从而

$$A(x_0) \geqslant f(A)(y) = \bigvee_{x \in f^{-1}(y)} A(x) \geqslant A(x_0)$$

即 $f(A)(y) = A(x_0)$. 必要性得证.

充分性：任取 $\alpha \in [0,1]$，则有

$$y \in f(A)_\alpha \Leftrightarrow f(A)(y) \geqslant \alpha$$
$$\Leftrightarrow \exists x_0 : x_0 \in f^{-1}(y), A(x_0) = f(A)(y) \geqslant \alpha$$
$$\Leftrightarrow \exists x_0 \in X, f(x) = y, x_0 \in A_\alpha$$
$$\Leftrightarrow y \in f(A_\alpha)$$

从而 $f(A)_\alpha = f(A_\alpha)$. □

定理 2.4.6　设 $f:X\to Y$, $A\in\mathscr{F}(X)$, $B\in\mathscr{F}(Y)$,则:

(1)
$$f(A)=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\alpha f(A_{\bar{\alpha}})=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\alpha f(A_{\alpha})\tag{2.4.12}$$

(2)
$$f^{-1}(B)=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\alpha f^{-1}(B_{\bar{\alpha}})=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\alpha f^{-1}(B_{\alpha})\tag{2.4.13}$$

证明　由定理 2.4.4 与分解定理,只需证(1)的第二式,其余的是显然的. 任取 $y\in Y$, 若 $f^{-1}(y)\neq\varnothing$, 则

$$f(A)(y)=\bigvee_{x\in f^{-1}(y)}A(x)=\bigvee_{x\in f^{-1}(y)}\bigvee_{\alpha\in[0,1]}(\alpha\wedge A_{\alpha}(x))$$

$$=\bigvee_{\alpha\in[0,1]}\bigvee_{x\in f^{-1}(y)}(\alpha\wedge A_{\alpha}(x))=\bigvee_{\alpha\in[0,1]}\left(\alpha\wedge\left(\bigvee_{x\in f^{-1}(y)}A_{\alpha}(x)\right)\right)$$

$$=\bigvee_{\alpha\in[0,1]}(\alpha\wedge f(A_{\alpha})(y))=\left(\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\alpha f(A_{\alpha})\right)(y)$$

又若 $f^{-1}(y)=\varnothing$, 则 $f(A)(y)=0=f(A_{\alpha})(y)(\alpha\in[0,1])$, 从而

$$f(A)(y)=\left(\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\alpha f(A_{\alpha})\right)(y)=0$$

由此
$$\forall y\in Y,\ f(A)(y)=\left(\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\alpha f(A_{\alpha})\right)(y)$$

故
$$f(A)=\left(\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\alpha f(A_{\alpha})\right).$$
□

定理 2.4.7　设 $f:X\to Y$, 则:

(1)若 $A\in\mathscr{F}(X)$,则

$$f(A)=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\alpha f(H_A(\alpha))\tag{2.4.14}$$

其中 $H_A\in\mathscr{N}(X)$且 $A_{\bar{\alpha}}\subseteq H_A(\alpha)\subseteq A_{\alpha}$.

(2)若 $B\in\mathscr{F}(Y)$,则

$$f^{-1}(B)=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\alpha f^{-1}(H_B(\alpha))\tag{2.4.15}$$

其中 $H_B\in\mathscr{N}(Y)$且 $B_{\bar{\alpha}}\subseteq H_B(\alpha)\subseteq B_{\alpha}$.

证明(1)$A_{\bar{\alpha}}\subseteq H_A(\alpha)\subseteq A_{\alpha}\Rightarrow f(A_{\bar{\alpha}})\subseteq f(H_A(\alpha))\subseteq f(A_{\alpha})$

$$\Rightarrow f(A)=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\alpha f(A_{\bar{\alpha}})\subseteq\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\alpha f(H_A(\alpha))\subseteq\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\alpha f(A_{\alpha})=f(A)$$

所以
$$f(A)=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\alpha f(H_A(\alpha)).$$

(2) 同理可证. □

定理 2.4.8　$f:X\to Y$, 以及 $A,B\in\mathscr{F}(Y)$, $\{B_t\mid t\in T\}\subseteq\mathscr{F}(Y)$,则:

(1) $f^{-1}(\varnothing)=\varnothing$;

(2) f 是满射, $f^{-1}(B)=\varnothing\Rightarrow B=\varnothing$;

(3) $A \subseteq B \Rightarrow f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B)$;

(4) $f^{-1}\left(\bigcup_{t\in T} A_t\right)=\bigcup_{t\in T} f^{-1}(A_t)$;

(5) $f^{-1}\left(\bigcap_{t\in T} A_t\right)=\bigcap_{t\in T} f^{-1}(A_t)$;

(6) $(f^{-1}(B))^c = f^{-1}(B^c)$.

证明 只证(2)、(6),其余易证.

(2) $\forall y \in Y$, 由于 f 是满射,则存在 $x \in X$, $f(x)=y$, 从而

$$B(y)=B(f(x))=f^{-1}(B)(x)=0 \Rightarrow B=\varnothing.$$

(6)任取 $x \in X$, 有

$$(f^{-1}(B))^c(x)=1-f^{-1}(B)(x)=1-B(f(x))=B^c(f(x))$$
$$=(B^c \circ f)(x)=f^{-1}(B^c)(x)$$

即
$$(f^{-1}(B))^c=f(B^c).$$
□

定理 2.4.9 (复合映射的扩张原理)给定映射 $f:X\rightarrow Y, g:Y\rightarrow Z$; $g\circ f: X\rightarrow Z$ 是 f 与 g 的复合映射: $(g\circ f)(x) \triangleq g(f(x))$.

(1)若 $A \in \mathscr{F}(X)$,则

$$(g\circ f)(A)=g(f(A))=\bigcup_{\alpha\in[0,1]} \alpha g(f(A_\alpha)) \tag{2.4.16}$$

(2)若 $D \in \mathscr{F}(Z)$,则

$$(g\circ f)^{-1}(D)=f^{-1}(g^{-1}(D))=\bigcup_{\alpha\in[0,1]} \alpha f^{-1}(g^{-1}(D_\alpha)) \tag{2.4.17}$$

证明 只证(1),(2)的证明是类似的. 事实上

$$(g\circ f)(A_\alpha)=\{z\in Z \mid (\exists x\in A_\alpha)((g\circ f)(x)=g(f(x))=z)\}$$
$$=\{z\in Z \mid (\exists x\in A_\alpha)(f(x)=y, g(y)=z)\}$$
$$=\{z\in Z \mid (\exists y\in f(A_\alpha))(g(y)=z)\}$$
$$=g(f(A_\alpha))$$

于是
$$(g\circ f)(A)=\bigcup_{\alpha\in[0,1]} \alpha(g\circ f)(A_\alpha)=\bigcup_{\alpha\in[0,1]} \alpha g(f(A_\alpha))$$

由定理 2.4.6 及定理 2.4.4,便有

$$f(A)=\bigcup_{\alpha\in[0,1]} \alpha f(A_\alpha)$$
$$(f(A))_{\bar{\alpha}} \subseteq f(A_\alpha) \subseteq (f(A))_\alpha$$

再由定理 2.4.7 有

$$g(f(A))=\bigcup_{\alpha\in[0,1]} \alpha g(f(A_\alpha))=(g\circ f)(A).$$
□

定理 2.4.10 (1) $\forall A\in \mathscr{F}(X)$, $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$, 当 f 为单射时取等式;

(2) $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$，当 f 为满射时取等式.

证明　(1) $f^{-1}(f(A))(x) = f(A)(f(x)) = \bigvee_{f(t)=f(x)} A(t) \geqslant A(x)$

显然，当 f 为单射时，等号成立.

(2) $$f(f^{-1}(B))(y) = \bigvee_{f(x)=y} f^{-1}(B)(x) = \bigvee_{f(x)=y} B(f(x))$$
$$= \begin{cases} B(y), & (\exists x \in X)(f(x) = y) \\ 0, & (\forall x \in X)(f(x) \neq y) \end{cases}$$
$$\leqslant B(y)$$

显然，当 f 为满射时，等式成立. □

2.4.2　多元扩张原理

定义 2.4.2　(扩张原理 II)设 $f: X = \prod_{i=1}^{n} X_i \to Y = \prod_{i=1}^{m} Y_i$，

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mapsto f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = y = (y_1, y_2, \cdots, y_m) \quad (2.4.18)$$

则 f 可以诱导出

$$f: \prod_{i=1}^{n} \mathscr{F}(X_i) \to \mathscr{F}(Y)$$

$$(A_1, A_2, \cdots, A_n) \mapsto f(A_1, A_2, \cdots, A_n) \triangleq f(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n) \quad (2.4.19)$$

$$f^{-1}: \prod_{j=1}^{m} \mathscr{F}(Y_j) \to \mathscr{F}(X)$$

$$(B_1, B_2, \cdots, B_m) \mapsto f^{-1}(B_1, B_2, \cdots, B_m) \triangleq f^{-1}(B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_m) \quad (2.4.20)$$

显然，当 $n=1$ 时，定义 2.4.2 即为扩张原理 I.

由定义 1.3.15 与扩张原理 I 不难推出以下定理.

定理 2.4.11　(Nguyen's Theorem, 1978) 设 $f: X = \prod_{i=1}^{n} X_i \to Y = \prod_{i=1}^{m} Y_i$，则 $\forall y \in Y$，对于定义 2.4.2 中两个诱导函数 f 和 f^{-1} 有

$$f(A_1, A_2, \cdots, A_n)(y) = \begin{cases} \bigvee_{f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = y} \left(\bigwedge_{i=1}^{n} A_i(x_i) \right), & f^{-1}(y) \neq \varnothing \\ 0, & f^{-1}(y) = \varnothing \end{cases}, \ A_i \in \mathscr{F}(X_i) \quad (2.4.21)$$

$\forall x \in X$，有

$$f^{-1}(B_1, B_2, \cdots, B_m)(x) = \bigwedge_{j=1}^{m} B_j(y_j), (y_1, y_2, \cdots, y_m) = f(x), \ B_j \in \mathscr{F}(Y_j) \quad (2.4.22)$$

例 2.4.5 设论域为 $\mathbf{Z}$，且

$$\tilde{2}=\text{“近似于 2”}=\frac{0.4}{1}+\frac{1}{2}+\frac{0.7}{3},\ \tilde{3}=\text{“近似于 3”}=\frac{0.5}{2}+\frac{1}{3}+\frac{0.6}{4}$$

而 $f:\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}\rightarrow\mathbf{Z}$，$f(x_1,x_2)=x_1 * x_2$，$*\in\{+,-,\cdot,\div\}$，则

$$f(\tilde{2},\tilde{3})\triangleq\tilde{2}*\tilde{3}\in\mathscr{F}(\mathbf{Z})$$

$$\forall x\in\mathbf{Z},\ (\tilde{2}+\tilde{3})(x)=\bigvee_{x_1+x_2=x}(\tilde{2}(x_1)\wedge\tilde{3}(x_2))$$

从而

$$(\tilde{2}+\tilde{3})(3)=\tilde{2}(1)\wedge\tilde{3}(2)=0.4\wedge 0.5=0.4$$

$$\begin{aligned}(\tilde{2}+\tilde{3})(4)&=(\tilde{2}(1)\wedge\tilde{3}(3))\vee(\tilde{2}(2)\wedge\tilde{3}(2))\\&=(0.4\wedge 1)\vee(1\wedge 0.5)=0.5\end{aligned}$$

$$(\tilde{2}+\tilde{3})(5)=(\tilde{2}(1)\wedge\tilde{3}(4))\vee(\tilde{2}(2)\wedge\tilde{3}(3))\vee(\tilde{2}(3)\wedge\tilde{3}(2))=1$$

$$(\tilde{2}+\tilde{3})(6)=(\tilde{2}(2)\wedge\tilde{3}(4))\vee(\tilde{2}(3)\wedge\tilde{3}(3))=0.7.$$

$$(\tilde{2}+\tilde{3})(7)=\tilde{2}(3)\wedge\tilde{3}(4)=0.6$$

故

$$\tilde{2}+\tilde{3}=\frac{0.4}{3}+\frac{0.5}{4}+\frac{1}{5}+\frac{0.7}{6}+\frac{0.6}{7}$$

同理

$$\tilde{2}-\tilde{3}=\frac{0.4}{-3}+\frac{0.6}{-2}+\frac{1}{-1}+\frac{0.7}{0}+\frac{0.5}{1}$$

$$\tilde{2}\cdot\tilde{3}=\frac{0.4}{2}+\frac{0.4}{3}+\frac{0.5}{4}+\frac{1}{6}+\frac{0.6}{8}+\frac{0.7}{9}+\frac{0.6}{12}$$

$$\tilde{2}\div\tilde{3}=\frac{0.7}{1}$$

□

值得注意的是例 2.4.5 中的运算可以看成是整数运算的推广．例如，设 $\tilde{m}\triangleq\frac{1}{m}$，$\tilde{n}\triangleq\frac{1}{n}\in\mathscr{F}(\mathbf{Z})$，则由扩张原理 II 得，$\tilde{m}+\tilde{n}=\frac{1}{m+n}\triangleq\widetilde{m+n}$．特别地，设 $\tilde{1}=\frac{1}{1}$，则 $\tilde{1}+\tilde{1}=\frac{1}{2}\triangleq\tilde{2}$，$\tilde{1}+\tilde{2}=\frac{1}{3}\triangleq\tilde{3}$ 等．

由二元扩张原理可以给出实数上 Fuzzy 集的二元运算的扩张运算．

定义 2.4.3 设 $A,B\in\mathscr{F}(\mathbf{R})$，而 $*$ 为 $\mathbf{R}$ 上的二元运算，其扩张运算为

$$(A*B)(z)=\bigvee_{z=x*y}(A(x)\wedge B(y)) \tag{2.4.23}$$

分别称 $A+B,A-B,A\cdot B,A\div B$ 为 A 与 B 的扩张加法，扩张减法，扩张乘法，扩张除法（extended addition, subtraction, multiplication, division）．其中 $\forall z\in\mathbf{R}$，

$$(A+B)(z)=\bigvee_{x+y=z}(A(x)\wedge B(y))=\bigvee_{x\in\mathbf{R}}(A(x)\wedge B(z-x)) \tag{2.4.24}$$

$$(A-B)(z)=\bigvee_{x-y=z}(A(x)\wedge B(y))=\bigvee_{x\in\mathbf{R}}(A(x)\wedge B(x-z)) \tag{2.4.25}$$

$$(A\cdot B)(z)=\bigvee_{xy=z}(A(x)\wedge B(y))$$
$$=\begin{cases}\bigvee_{x\in\mathbf{R}\setminus\{0\}}\left(A(x)\wedge B\left(\frac{z}{x}\right)\right), & z\neq 0(\Rightarrow x\neq 0)\\ (A(0)\wedge ht(B))\vee(B(0)\wedge ht(A)), & z=0\end{cases} \tag{2.4.26}$$

$$(A\div B)(z)=\bigvee_{x\div y=z}(A(x)\wedge B(y))=\bigvee_{y\neq 0}(A(yz)\wedge B(y)) \tag{2.4.27}$$

定义 2.4.4 设 $A,B\in\mathscr{F}(\mathbf{R})$，则

$$(A\ \tilde{\vee}\ B)(z)=\bigvee_{z=x\vee y}(A(x)\wedge B(y)) \tag{2.4.28}$$

$$(A\ \tilde{\wedge}\ B)(z)=\bigvee_{z=x\wedge y}(A(x)\wedge B(y)) \tag{2.4.29}$$

分别称为扩张极大运算与扩张极小运算或 MAX 与 MIN (extended maximum and minimum operation).

图 2.4.5 与图 2.4.6 分别示意了扩张极大运算与扩张极小运算.

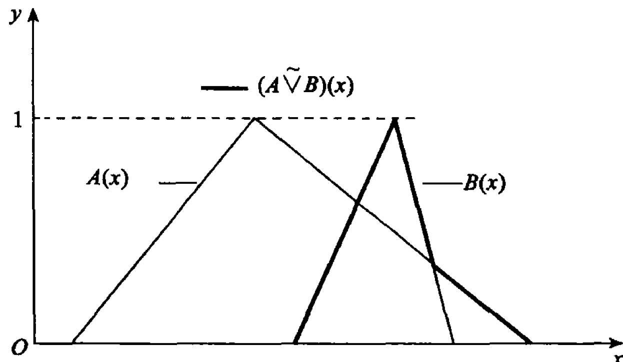


图 2.4.5 Fuzzy 集 A 与 B 的扩张极大运算 $A\ \tilde{\vee}\ B$

下面我们定义几个辅助一元运算并讨论这些运算的性质与其他运算的关系.

定义 2.4.5 设 $A\in\mathscr{F}(\mathbf{R})$，则定义 $\mathbf{R}$ 上的两个 Fuzzy 集 A^L 和 A^R 如下

$$A^L(x)=\bigvee_{y\leqslant x}A(y) \tag{2.4.30}$$

$$A^R(x)=\bigvee_{y\geqslant x}A(y) \tag{2.4.31}$$

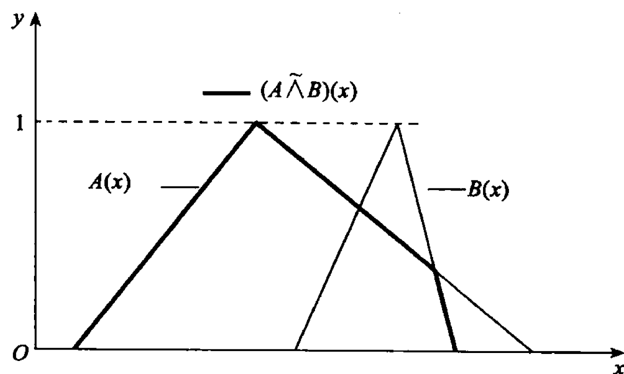


图 2.4.6 Fuzzy 集 A 与 B 的扩张极小运算 $A\ \widetilde{\wedge}\ B$

注意 A^L 是单调不减的，A^R 是单调不增的. 图 2.4.7 示意了这两个 Fuzzy 集.

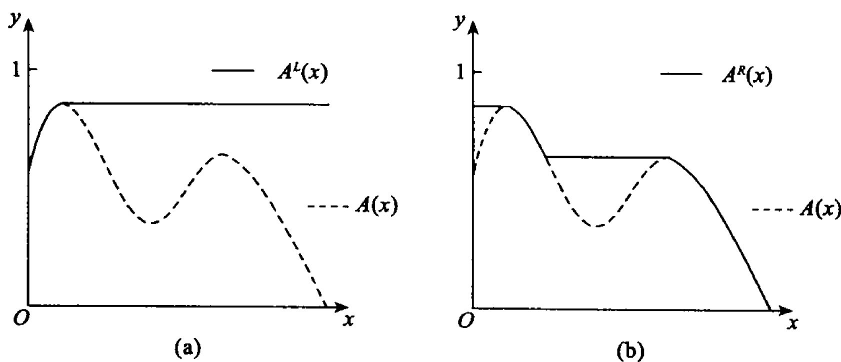


图 2.4.7 Fuzzy 集 A^L 和 A^R 的示意图

由定义 2.4.5 易验证下面的结论.

定理 2.4.12 设 $A,B \in \mathscr{F}(\mathbf{R})$，则：

(1) $A \subseteq A^L, A \subseteq A^R$;

(2) $(A^L)^L = A^L, (A^R)^R = A^R$;

(3) $(A^L)^R = (A^R)^L$;

(4) $(A^{\tilde{N}})^L = (A^R)^{\tilde{N}}, (A^{\tilde{N}})^R = (A^L)^{\tilde{N}}$;

(5) $(A \cup B)^L = A^L \cup B^L, (A \cup B)^R = A^R \cup B^R$;

(6) $(A \cap B)^L \subseteq A^L \cap B^L, (A \cap B)^R \subseteq A^R \cap B^R$;

(7) $A \subseteq B \Rightarrow A^L \subseteq B^L, A^R \subseteq B^R$.

定理 2.4.13　设 $A,B \in \mathscr{F}(\mathbf{R})$，则：

(1) $A \tilde{\vee} B = (A \cap B^L) \cup (A^L \cap B) = (A \cup B) \cap (A^L \cap B^L)$；

(2) $A \tilde{\wedge} B = (A \cap B^R) \cup (A^R \cap B) = (A \cup B) \cap (A^R \cap B^R)$.

证明　设 $A,B \in \mathscr{F}(\mathbf{R})$，则

$$(A \tilde{\vee} B)(x) = \bigvee_{y \vee z = x} (A(y) \wedge B(z))$$

$$= \left(\bigvee_{x \vee z = x} (A(x) \wedge B(z)) \right) \vee \left(\bigvee_{y \vee x = x} (A(y) \wedge B(x)) \right)$$

$$= \left(A(x) \wedge \left(\bigvee_{z \leqslant x} B(z) \right) \right) \vee \left(\left(\bigvee_{y \leqslant x} A(y) \right) \wedge B(x) \right)$$

$$= \left((A \cap B^L) \cup (A^L \cap B) \right)(x)$$

所以 $A \tilde{\vee} B = (A \cap B^L) \cup (A^L \cap B)$. 又

$$\begin{aligned}(A \cap B^L) \cup (A^L \cap B) &= ((A \cap B^L) \cup A^L) \cap ((A \cap B^L) \cup B) \\ &= ((A \cup A^L) \cap (B^L \cup A^L)) \cap ((A \cup B) \cap (B^L \cup B)) \\ &= (A^L \cap (B^L \cup A^L)) \cap ((A \cup B) \cap B^L) \\ &= A^L \cap ((A \cup B) \cap B^L) \\ &= (A^L \cap B^L) \cap (A \cup B).\end{aligned}$$

用类似的方法可以验证第二式.　□

由定理 2.4.12 与定理 2.4.13 直接得到下列结论.

定理 2.4.14　设 $A,B \in \mathscr{F}(\mathbf{R})$，则：

(1) $A \tilde{\vee} A = A$, $A \tilde{\wedge} A = A$；

(2) $A \tilde{\vee} B = B \tilde{\vee} A$, $A \tilde{\wedge} B = B \tilde{\wedge} A$；

(3) $A \tilde{\vee} \mathbf{R} = A^L$, $A \tilde{\wedge} \mathbf{R} = A^R$；

(4) $A \tilde{\vee} \varnothing = A \tilde{\wedge} \varnothing = \varnothing$；

(5) $(A \tilde{\vee} B)^{\tilde{N}} = A^{\tilde{N}} \tilde{\wedge} B^{\tilde{N}}, (A \tilde{\wedge} B)^{\tilde{N}} = A^{\tilde{N}} \tilde{\vee} B^{\tilde{N}}$；

(6) $A^L \tilde{\vee} B^L = A^L \cap B^L = A^L \tilde{\vee} B = A \tilde{\vee} B^L$；

(7) $A^R \tilde{\wedge} B^R = A^R \cap B^R = A^R \tilde{\wedge} B = A \tilde{\wedge} B^R$；

(8) $A \supseteq B \Rightarrow A \tilde{\vee} B = A \cap B^L$, $A \tilde{\wedge} B = A \cap B^R$.

定理 2.4.15　设 $A,B \in \mathscr{F}(\mathbf{R})$，则

(1) $(A \tilde{\vee} B)^L = A^L \tilde{\vee} B^L$, $(A \tilde{\wedge} B)^R = A^R \tilde{\wedge} B^R$；

(2) $(A \tilde{\vee} B)^R = A^R \tilde{\vee} B^R$, $(A \tilde{\wedge} B)^L = A^L \tilde{\wedge} B^L$.

证明 (1) 由定理2.4.14(6)知 $A^L \tilde{\vee} B^L = A^L \cap B^L$，这样对于第一式，我们只需证明 $(A \tilde{\vee} B)^L = A^L \cap B^L$. 事实上

$$(A \tilde{\vee} B)^L(x) = \bigvee_{y \leqslant x} (A \tilde{\vee} B)(y) = \bigvee_{y \leqslant x} \left(\bigvee_{u \vee v = y} (A(u) \wedge B(v)) \right)$$

$$= \bigvee_{u \vee v \leqslant x} (A(u) \wedge B(v)) = \left(\bigvee_{u \leqslant x} A(u) \right) \wedge \left(\bigvee_{v \leqslant x} B(v) \right)$$

所以

$$(A \tilde{\vee} B)^L = A^L \cap B^L.$$

由第一式与定理2.4.12(4)可以推出

$$(A \tilde{\wedge} B)^R = (A \tilde{\wedge} B)^{\tilde{N}\tilde{N}R} = (A^{\tilde{N}} \tilde{\vee} B^{\tilde{N}})^{\tilde{N}R} = (A^{\tilde{N}} \tilde{\vee} B^{\tilde{N}})^{L\tilde{N}}$$

$$= (A^{\tilde{N}L} \tilde{\vee} B^{\tilde{N}L})^{\tilde{N}} = (A^{R\tilde{N}} \tilde{\vee} B^{R\tilde{N}})^{\tilde{N}} = (A^R \tilde{\vee} B^R)^{\tilde{N}\tilde{N}} = A^R \tilde{\vee} B^R.$$

(2) 类似(1)可以证明. □

由上面的结论还可以直接验证下面的定理.

定理 2.4.16 设 $A, B \in \mathscr{F}(\mathbf{R})$，则：

(1) $A \tilde{\vee} (B \tilde{\vee} C) = (A \tilde{\vee} B) \tilde{\vee} C$;

(2) $A \tilde{\wedge} (B \tilde{\wedge} C) = (A \tilde{\wedge} B) \tilde{\wedge} C$.

类似定理2.4.4、定理2.4.5与定理2.4.6，我们易证多元扩张的下列性质.

定理 2.4.17 设 $f: \prod_{i=1}^{n} X_i \to Y$, $A_i \in \mathscr{F}(X_i)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$，则：

(1) $\forall \alpha \in [0,1]$, $f(A_1, A_2, \cdots, A_n)_{\bar{\alpha}} = f((A_1)_{\bar{\alpha}}, (A_2)_{\bar{\alpha}}, \cdots, (A_n)_{\bar{\alpha}})$;

(2) $f(A_1, A_2, \cdots, A_n) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha f((A_1)_\alpha, (A_2)_\alpha, \cdots, (A_n)_\alpha)$

$$= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha f((A_1)_{\bar{\alpha}}, (A_2)_{\bar{\alpha}}, \cdots, (A_n)_{\bar{\alpha}});$$

(3) $\forall \alpha \in [0,1]$, $f(A_1, A_2, \cdots, A_n)_\alpha = f((A_1)_\alpha, (A_2)_\alpha, \cdots, (A_n)_\alpha)$ 当且仅当 $\forall y \in Y$，存在 $(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0) \in \prod_{i=1}^{n} X_i$, $y = f(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$，使

$$f(A_1, A_2, \cdots, A_n)(y) = \bigwedge_{i=1}^{n} A_i(x_i^0). \tag{2.4.32}$$

定理 2.4.18 设 $f: \prod_{i=1}^{n} X_i \to Y$, $A_i, B_i \in \mathscr{F}(X_i)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$，则有

$$\forall i = 1, 2, \cdots, n, A_i \subseteq B_i \Rightarrow f(A_1, A_2, \cdots, A_n) \subseteq f(B_1, B_2, \cdots, B_n) \tag{2.4.33}$$

下面几节我们将研究实数域 **R** 上的特殊 Fuzzy 集及其扩张运算.

§2.5 区间数及其运算

许多实际问题所涉及的数据，或本身带有 Fuzzy 性或希望用带 Fuzzy 性的

数字进行刻画，这就促使人们去研究"Fuzzy 数". 为了方便起见先讨论区间数及其运算与序关系.

设 $A=[\underline{a},\overline{a}]$ 是有界闭区间，如果 $\underline{a},\overline{a}\in\mathbf{R}$，则称 $A=[\underline{a},\overline{a}]$ 为区间数；如果 $\underline{a},\overline{a}\in[0,1]$，则称 $A=[\underline{a},\overline{a}]$ 为区间值. 实数集 $\mathbf{R}$ 上的全体区间数记为 $I_{\mathbf{R}}$，$[0,1]$上的全体区间值记为 $I_{[0,1]}$. 即

$$I_{\mathbf{R}}=\{[\underline{a},\overline{a}]\mid\underline{a}\leqslant\overline{a},\underline{a},\overline{a}\in\mathbf{R}\}\tag{2.5.1}$$

$$I_{[0,1]}=\{[\underline{a},\overline{a}]\mid 0\leqslant\underline{a}\leqslant\overline{a}\leqslant 1\}\tag{2.5.2}$$

特别地，记

$$I_{\mathbf{R}}^{+}=\{[\underline{a},\overline{a}]\mid 0\leqslant\underline{a}\leqslant\overline{a},\underline{a},\overline{a}\in\mathbf{R}\}$$

$$I_{\mathbf{R}}^{-}=\{[\underline{a},\overline{a}]\mid\underline{a}\leqslant\overline{a}\leqslant 0,\underline{a},\overline{a}\in\mathbf{R}\}.$$

当 $\underline{a}=\overline{a}$ 时，记 $[\underline{a},\overline{a}]=\{a\}=a$.

为了应用方便，区间数还有其他表示形式. 设 $[\underline{a},\overline{a}]\in I_{\mathbf{R}}$，则 $m(A)=\frac{1}{2}(\underline{a}+\overline{a})$ 与 $w(A)=\frac{1}{2}(\overline{a}-\underline{a})$ 分别称为 $[\underline{a},\overline{a}]$ 的中心与半径. 将 $[\underline{a},\overline{a}]$ 表示为 $A=\langle m(A),w(A)\rangle$，即

$$\langle m(A),w(A)\rangle=[m(A)-w(A),m(A)+w(A)].$$

2.5.1 一元运算

定理 2.5.1 设 $f:[0,1]\to[0,1]$ 为连续函数，则由经典扩张原理

$$\begin{aligned}f([\underline{a},\overline{a}])&=\{y\mid y=f(x),x\in[\underline{a},\overline{a}]\}\\&=\Big[\bigwedge_{x\in[\underline{a},\overline{a}]}f(x),\ \bigvee_{x\in[\underline{a},\overline{a}]}f(x)\Big],\ \forall[\underline{a},\overline{a}]\in I_{[0,1]}.\end{aligned}\tag{2.5.3}$$

于是得到区间值的某些一元扩张运算：$\forall[\underline{a},\overline{a}]\in I_{[0,1]}$，则：

(1) $[\underline{a},\overline{a}]$ 的补 $[\underline{a},\overline{a}]^c=[1-\overline{a},1-\underline{a}]$（也记为 $\neg[\underline{a},\overline{a}]$）（基于 $f(x)=1-x$）；

(2) $[\underline{a},\overline{a}]$ 的数乘 $k[\underline{a},\overline{a}]=[k\underline{a},k\overline{a}]$，$k\in[0,1]$　（基于 $f(x)=kx$）；

(3) $[\underline{a},\overline{a}]$ 的 r 次方 $[\underline{a},\overline{a}]^r=[\underline{a}^r,\overline{a}^r]$　（基于 $f(x)=x^r$，$r>0$）；

(4)数的 $[\underline{a},\overline{a}]$ 次方 $m^{[\underline{a},\overline{a}]}=[m^{\overline{a}},m^{\underline{a}}]$，$m\in[0,1]$　（基于 $f(x)=m^x$）；

(5) $[\underline{a},\overline{a}]$ 的 $[\underline{a},\overline{a}]$ 次方

$$[\underline{a},\overline{a}]^{[\underline{a},\overline{a}]}=\begin{cases}[\overline{a}^{\overline{a}},\underline{a}^{\underline{a}}], & [\underline{a},\overline{a}]\subseteq\left[0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right]\\[\underline{a},\overline{a}], & [\underline{a},\overline{a}]\subseteq\left(\frac{1}{\mathrm{e}},1\right]\\\left[\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{\frac{1}{\mathrm{e}}},\underline{a}^{\underline{a}}\vee\overline{a}^{\overline{a}}\right], & \frac{1}{\mathrm{e}}\in(\underline{a},\overline{a})\end{cases}$$

该扩张运算基于

$$f(x)=\begin{cases}1, & x=0\\x^x, & 0<x\leqslant 1\end{cases}.$$

例 2.5.1 设 $[\underline{a},\overline{a}]=[0.3,0.8]$，则

$$\sqrt{[0.3,0.8]^c}=\sqrt{[0.2,0.7]}=[\sqrt{0.2},\sqrt{0.7}]=[0.447,0.837]$$

$$0.5^{[0.3,0.8]}=[0.5^{0.8},0.5^{0.3}]=[0.574,0.812]$$

$$[0.3,0.8]^{[0.3,0.8]}=\left[\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}},0.3^{0.3}\vee 0.8^{0.8}\right]=[0.695,0.697\vee 0.837]$$
$$=[0.695,0.837].$$ □

2.5.2 四则运算

定理 2.5.2 若 $[\underline{a},\overline{a}],[\underline{b},\overline{b}]\in I_{\mathbf{R}}$，$*\in\{+,-,\cdot,\div\}$，则由经典扩张原理可得：

(1) $[\underline{a},\overline{a}]+[\underline{b},\overline{b}]=[\underline{a}+\underline{b},\overline{a}+\overline{b}]$；

(2) $[\underline{a},\overline{a}]-[\underline{b},\overline{b}]=[\underline{a}-\overline{b},\overline{a}-\underline{b}]$；

(3) $[\underline{a},\overline{a}]\cdot[\underline{b},\overline{b}]=[\min\{\underline{a}\,\underline{b},\underline{a}\overline{b},\overline{a}\underline{b},\overline{a}\overline{b}\},\max\{\underline{a}\,\underline{b},\underline{a}\,\overline{b},\overline{a}\underline{b},\overline{a}\,\overline{b}\}]$；

(4) $[\underline{a},\overline{a}]\div[\underline{b},\overline{b}]=[\underline{a},\overline{a}]\times\left[\frac{1}{\overline{b}},\frac{1}{\underline{b}}\right]$，$0\overline{\in}[\underline{b},\overline{b}]$.

特别地，$[\underline{a},\overline{a}],[\underline{b},\overline{b}]\in I_{\mathbf{R}}^{+}$.

(3′) $[\underline{a},\overline{a}]\cdot[\underline{b},\overline{b}]=[\underline{a}\,\underline{b},\overline{a}\,\overline{b}]$；

(4′) $[\underline{a},\overline{a}]\div[\underline{b},\overline{b}]=\left[\frac{\underline{a}}{\overline{b}},\frac{\overline{a}}{\underline{b}}\right]$，$0\overline{\in}[\underline{b},\overline{b}]$.

例 2.5.2 设 $A=[-1,2]$，$B=[3,4]$，则

$$[-1,2]+[3,4]=[2,6]$$
$$[-1,2]-[3,4]=[-5,-1]$$
$$[-1,2]\cdot[3,4]=[-4,8]$$
$$[-1,2]\div[3,4]=\left[-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right].$$ □

由四则运算易推出下面的性质.

定理 2.5.3 设 $A,B\in I_{\mathbf{R}}$，则：

(1) $m(A+B)=m(A)+m(B)$，$w(A+B)=w(A)+w(B)$；

(2) $m(A-B)=m(A)-m(B)$，$w(A-B)=w(A)+w(B)$.

2.5.3 区间数的序关系

在 $I_{\mathbf{R}}$ 上引入关系 $\leqslant_{LR}$：$[\underline{a},\overline{a}]\leqslant_{LR}[\underline{b},\overline{b}]\Leftrightarrow\underline{a}\leqslant\underline{b},\overline{a}\leqslant\overline{b}$. 对应序关系 $\leqslant_{LR}$ 有运算 $\vee$，$\wedge$

$$[\underline{a},\overline{a}] \vee [\underline{b},\overline{b}] = [\underline{a} \vee \underline{b}, \overline{a} \vee \overline{b}] \tag{2.5.4}$$

$$[\underline{a},\overline{a}] \wedge [\underline{b},\overline{b}] = [\underline{a} \wedge \underline{b}, \overline{a} \wedge \overline{b}] \tag{2.5.5}$$

显然有 $[\underline{a},\overline{a}] \leqslant_{LR} [\underline{b},\overline{b}] \Leftrightarrow [\underline{a},\overline{a}] \vee [\underline{b},\overline{b}] = [\underline{b},\overline{b}] \Leftrightarrow [\underline{a},\overline{a}] \wedge [\underline{b},\overline{b}] = [\underline{a},\overline{a}]$

在不产生混淆的情况下，以后将 $\leqslant_{LR}$ 简记为 $\leqslant$.

设 $[\underline{a}_t,\overline{a}_t] \in I_{\mathbf{R}}(t \in T)$，则定义

$$\bigvee_{t\in T} [\underline{a}_t,\overline{a}_t] = [\bigvee_{t\in T} \underline{a}_t, \bigvee_{t\in T} \overline{a}_t] \tag{2.5.6}$$

$$\bigwedge_{t\in T} [\underline{a}_t,\overline{a}_t] = [\bigwedge_{t\in T} \underline{a}_t, \bigwedge_{t\in T} \overline{a}_t] \tag{2.5.7}$$

对于区间还有下列序关系

$\leqslant_{mw}$: $m(A) \leqslant m(B)$ 并且 $w(A) \geqslant w(B)$ (Ishibuchi, Tanaka, 1990);

$\leqslant_{cw}$: $m(A) \leqslant m(B)$ 并且 $w(A) \leqslant w(B)$ (Das et al., 1999);

$\leqslant_{Lm}$: $m(A) \leqslant m(B)$ 并且 $\underline{a} \leqslant \underline{b}$ (Ishibuchi, Tanaka, 1990);

$\leqslant_{Rm}$: $m(A) \leqslant m(B)$ 并且 $\overline{a} \leqslant \overline{b}$ (Das et al., 1999).

这些序关系有下列性质.

定理 2.5.4 设 $A, B \in I_{\mathbf{R}}$，则：

(1) $A \leqslant_{LR} B$, $m(B) \leqslant m(A) \Rightarrow A = B$;

(2) $A \leqslant_{Lm} B \Leftrightarrow A \leqslant_{LR} B$ 或 $A \leqslant_{mw} B$ (Ishibuchi, Tanaka, 1990);

(3) $A \leqslant_{Rm} B \Leftrightarrow A \leqslant_{LR} B$ 或 $A \leqslant_{cw} B$ (Das et al., 1999).

证明 设 $A = [\underline{a},\overline{a}], B = [\underline{b},\overline{b}] \in I_{\mathbf{R}}$，则：

(1) $A \leqslant_{LR} B$, $m(B) \leqslant m(A) \Rightarrow \underline{a} \leqslant \underline{b}, \overline{a} \leqslant \overline{b}, \underline{b} + \overline{b} \leqslant \underline{a} + \overline{a}$

$$\Rightarrow \underline{a} \leqslant \underline{b} \leqslant \underline{a}, \overline{a} \leqslant \overline{b} \leqslant \overline{a} \Rightarrow A = B.$$

(2) $A \leqslant_{Lm} B \Rightarrow \underline{a} \leqslant \underline{b}, m(A) \leqslant m(B) \Rightarrow \begin{cases} A \leqslant_{LR} B, & \overline{a} \leqslant \overline{b} \\ A \leqslant_{mw} B, & \overline{a} > \overline{b} \end{cases}$

反之亦然.

(3)类似(2)可证. □

显然 $\leqslant_{LR}$, $\leqslant_{mw}$, $\leqslant_{cw}$, $\leqslant_{Lm}$ 和 $\leqslant_{Rm}$ 都是 $I_{\mathbf{R}}$ 上的偏序关系，不是全序. 但在实际应用中，有时要利用区间数的全序关系. 下面给出一个新的序关系.

定义 2.5.1 (Hu and Wang, 2006a)设 $A, B \in I_{\mathbf{R}}$，定义 $A \preceq B$ 当且仅当 $m(A) < m(B)$ 或当 $m(A) = m(B)$ 时，$w(A) \geqslant w(B)$. $A \prec B$ 当且仅当 $A \preceq B$ 并且 $A \neq B$.

由定义容易得到以下定理.

定理 2.5.5 (Hu and Wang, 2006a) $(I_{\mathbf{R}}, \preceq)$ 是一个全序集，即

(1)自反性 $A \preceq A$, $\forall A \in I_{\mathbf{R}}$;

(2)反对称性 $A \preceq B, B \preceq A \Rightarrow A = B,\ \forall A,B \in I_{\mathbf{R}}$；

(3)传递性 $A \preceq B, B \preceq C \Rightarrow A \preceq C,\ \forall A,B,C \in I_{\mathbf{R}}$；

(4)可比性 $\forall A,B \in I_{\mathbf{R}}$，$A \preceq B$ 或 $B \preceq A$.

关于序关系 $\preceq$ 定义的合理性，可以给出如下说明：

(1)序关系 $\preceq$ 是实数序关系 $\leqslant$ 在区间上的推广，即 $[a,a] \preceq [b,b]$ 等价于 $a \leqslant b,\ \forall a,b \in \mathbf{R}$；

(2)若 $\underline{a} \leqslant \underline{b}, \overline{a} \leqslant \overline{b}$，即 $[\underline{a},\overline{a}] \leqslant [\underline{b},\overline{b}]$，则 $[\underline{a},\overline{a}] \preceq [\underline{b},\overline{b}]$；

(3)当 $\underline{a} \leqslant \underline{b}, \overline{a} \leqslant \overline{b}$ 不成立时，$[\underline{a},\overline{a}]$，$[\underline{b},\overline{b}]$ 按 $\leqslant$ 不能比较，但按 $\preceq$ 可以比较，分两种情形：①若 $m(A) < m(B)$，实际上 $\preceq$ 以区间的中心按普通实数序关系比较"大小"，中心小区间就小；②若 $m(A) = m(B)$，即中心相等，按普通集包含关系比较大小. 若 $[\underline{b},\overline{b}] \subseteq [\underline{a},\overline{a}]$，实际上 $[\underline{b},\overline{b}]$ 的半径 $w(B)$（或宽度 $2w(B)$）小于或等于 $[\underline{a},\overline{a}]$ 的半径 $w(A)$（或宽度 $2w(A)$）. 在这种情形下，我们认为不确定性程度小的区间为"大". 如图 2.5.1 所示 .

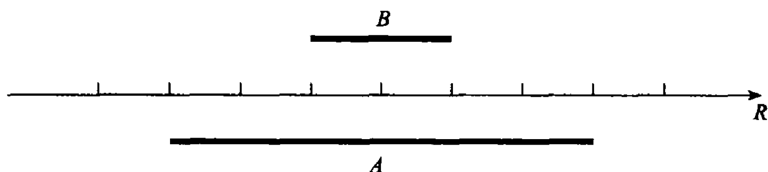


图 2.5.1　A 的不确定性程度大于 B

由定理 2.5.5 易得下列性质.

定理 2.5.6　设 $A,B,C \in I_{\mathbf{R}}$，则：

(1) $A \preceq B \Leftrightarrow A + C \preceq B + C$；

(2) $A \preceq B \Leftrightarrow A - C \preceq B - C$.

定义 2.5.2　(Chanas, Kuchta, 1996a, b)设 $A = [\underline{a},\overline{a}] \in I_{\mathbf{R}}$ 并且 $0 \leqslant t_0 \leqslant t_1 \leqslant 1$. 区间 A 的 t_0, t_1-截区间(t_0, t_1-cut interval)是下面的区间

$$A/_{t_0,t_1} \triangleq [\underline{a} + t_0(\overline{a} - \underline{a}), \underline{a} + t_1(\overline{a} - \underline{a})]. \tag{2.5.8}$$

定义 2.5.3　(Hu and Wang, 2006b) 设 $A = [\underline{a},\overline{a}], [\underline{b},\overline{b}] \in I_{\mathbf{R}}$，$0 \leqslant t_0 \leqslant t_1 \leqslant 1$ 并且 R 是 $I_{\mathbf{R}}$ 上的偏序关系，则关系 $R/_{t_0,t_1}$ 和 $R'/_{t_0,t_1}$ 定义如下

$A\,R/_{t_0,t_1}\,B \triangleq A/_{t_0,t_1}\,R\,B/_{t_0,t_1}$ 和 $A\,R'/_{t_0,t_1}\,B \triangleq A/_{t_0,t_1}\,R\,B/_{t_0,t_1}$ 且 $A/_{t_0,t_1} \neq B/_{t_0,t_1}$

其中 $A/_{t_0,t_1}$ 和 $B/_{t_0,t_1}$ 分别是 A 和 B 的 t_0, t_1-截区间.

定理 2.5.7　设 $A,B \in I_{\mathbf{R}}$，$0 \leqslant t_0 \leqslant t_1 \leqslant 1$. 则：

(1) $A \leqslant_{LR}/_{0,1} B \Leftrightarrow A \leqslant_{LR} B$，$A \leqslant_{Lm}/_{0,1} B \Leftrightarrow A \leqslant_{Lm} B$，$A \leqslant_{Rm}/_{0,1} B \Leftrightarrow A$

$\leqslant_{Rm} B$，$A \leqslant_{mw} /_{0,1} B \Leftrightarrow A \leqslant_{mw} B$，$A \leqslant_{cw} /_{0,1} B \Leftrightarrow A \leqslant_{cw} B$；

(2) $A \leqslant_{LR} /_{t_0,(t_0+t_1)/2} B \Leftrightarrow A \leqslant_{Lm} /_{t_0,t_1} B$；

(3) $A \leqslant_{Lm} /_{t_0,t_1} B \Leftrightarrow A \leqslant_{LR} /_{t_0,t_1} B$ 或 $A \leqslant_{mw} /_{t_0,t_1} B$；

(4) $A \leqslant_{Rm} /_{t_0,t_1} B \Leftrightarrow A \leqslant_{LR} /_{t_0,t_1} B$ 或 $A \leqslant_{cw} /_{t_0,t_1} B$.

定理 2.5.8　设 $A,B \in I_{\mathbf{R}}$，$0 \leqslant t_0 \leqslant t_1 \leqslant 1$. 则：

(1) $A \leqslant_{LR} B \Rightarrow A \preceq B$，$A \leqslant_{LR} /_{t_0,t_1} B \Rightarrow A \preceq /_{t_0,t_1} B$；

(2) $A \leqslant_{mw} B \Rightarrow A \preceq B$，$A \leqslant_{mw} /_{t_0,t_1} B \Rightarrow A \preceq /_{t_0,t_1} B$；

(3) $A \leqslant_{Lm} B \Rightarrow A \preceq B$，$A \leqslant_{Lm} /_{t_0,t_1} B \Rightarrow A \preceq /_{t_0,t_1} B$；

(4) $A \preceq /_{0,1} B \Leftrightarrow A \preceq B$.

证明　设 $A = [\underline{a},\overline{a}]$，$B = [\underline{b},\overline{b}] \in I$，则

$$
\begin{aligned}
A \leqslant_{LR} B &\Leftrightarrow \underline{a} \leqslant \underline{b} \wedge \overline{a} \leqslant \overline{b} \\
&\Rightarrow (m(A) < m(B)) \vee (m(A) = m(B) \wedge w(A) = w(B)) \\
&\Rightarrow A \preceq B
\end{aligned}
$$

其他可以类似证明.　□

2.5.4　区间数的 Fuzzy 序关系

对于区间数，我们还可以通过一些模糊度量的方法来讨论其序关系.

定义 2.5.4　(Kundu，1995) 设 $A,B \in I_{\mathbf{R}}$，则

$$
\mathrm{Left}(A,B) = \max\{0, P_{AB}(x < y) - P_{AB}(x > y)\} \qquad (2.5.9)
$$

称为 A 与 B 的 Fuzzy 左关系(fuzzy leftness relationship). 其中 $P_{AB}(x < y)$ ($P_{AB}(x > y)$) 为 $x < y$ ($x > y$) 的概率并且 $x \in A$ 与 $y \in B$ 在 A 和 B 上独立服从均匀分布. 同理可以定义 A 与 B 的 Fuzzy 右关系(fuzzy rightness relationship).

$$
\mathrm{Right}(A,B) = P_{AB}(x > y) - P_{AB}(x < y) \qquad (2.5.10)
$$

例 2.5.3　设 $A = [0,2]$，$B = [1,4]$，$C = [-1,3]$，则

$$
\delta_A(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2-0}, & x \in [0,2] \\ 0, & \text{其他} \end{cases}, \quad \delta_B(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4-1}, & x \in [1,4] \\ 0, & \text{其他} \end{cases},
$$

$$
\delta_C(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3-(-1)}, & x \in [-1,3] \\ 0, & \text{其他} \end{cases}
$$

A 与 B 的关系如图 2.5.2 所示.

由定义 2.5.4 得

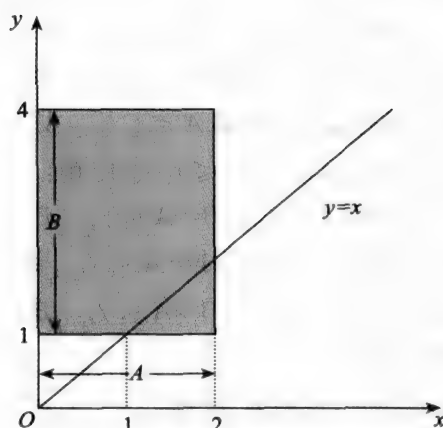


图 2.5.2 A 与 B 的关系

$$P_{AB}(x<y)=\iint\limits_{u<v,(u,v)\in A\times B}\delta_A(u)\delta_B(v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_1^4\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\mathrm{d}y+\int_1^2\mathrm{d}x\int_x^4\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\mathrm{d}y=\frac{11}{12}$$

$$P_{AB}(x>y)=1-P_{AB}(x<y)=\frac{1}{12}$$

$$\mathrm{Left}(A,B)=\max\{0,P_{AB}(x<y)-P_{AB}(x>y)\}=\frac{5}{6}\approx 0.83$$

其他同理计算. 由此它们的 Fuzzy 左关系如表 2.5.1 所示.

表 2.5.1 **A 与 B 的 Fuzzy 左关系**

	A	B	C
A	0.00	0.83	0.00
B	0.00	0.00	0.00
C	0.00	0.67	0.00

定义 2.5.5 (Sengupta, pal, 2000)区间的可接受性函数(acceptability function) $S:I_{\mathbf{R}}\times I_{\mathbf{R}}\to\mathbf{R}$ 定义为

$$S(A \otimes B)=\frac{m(B)-m(A)}{w(B)+w(A)} \tag{2.5.11}$$

其中 $w(B)+w(A)\neq 0$. $S(A \otimes B)$可以解释为“第一个区间 A 次于第二个区间 B（或 B 优于 A）的可接受程度(grade of acceptability)”. 这里，术语“次于”（或“优于”）类似于“小于”（或“大于”）.

从定义 2.5.5 容易看到

$$S(A \otimes B)\begin{cases}<0, & m(A)>m(B)\\ =0, & m(A)=m(B)\\ >0,<1, & m(A)<m(B),\ \bar{a}>\underline{b}\\ \geqslant 1, & m(A)<m(B),\ \bar{a}\leqslant\underline{b}\end{cases}$$

并且 $$S(A \otimes B)=-S(B \otimes A).$$

$S(A \otimes B)\leqslant 0$ 表示“A 次于 B”不被接受. 如果 $0<S(A \otimes B)<1$，那么决策者以 0 到 1(不含 0 和 1)的满意度接受“A 次于 B”. 如果 $S(A \otimes B)\geqslant 1$，决策者是绝对满意“$A$ 次于 B”. 换句话说，决策者接受 $A \otimes B$.

例 2.5.4 设

$$A=[120,180]=\langle 150,30\rangle$$
$$B=[130,210]=\langle 170,40\rangle$$
$$C=[120,220]=\langle 170,50\rangle$$

则 $S(A \otimes B)=0.28$, $S(A \otimes C)=0.25$, $S(B \otimes C)=0$. □

§2.6 Fuzzy 数及其扩张运算

2.6.1 凸 Fuzzy 集

设 X 为向量空间，所谓经典集合 $A\in\mathscr{P}(X)$是凸的，是指

$$\forall x_1,x_2\in A,\forall\lambda\in[0,1]\Rightarrow \lambda x_1+(1-\lambda)x_2\in A.$$

注意 $\varnothing$ 与 X 是凸集. 上式用 A 的特征函数表述：$\forall x_1,x_2\in A,\forall\lambda\in[0,1]$，有

$$\chi_A(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\geqslant \chi_A(x_1)\wedge\chi_A(x_2) \tag{2.6.1}$$

从而很容易定义凸 Fuzzy 集.

定义 2.6.1 设 X 为向量空间，$A\in\mathscr{F}(X)$，称 A 是凸 Fuzzy 集(convex fuzzy set)，如果 $\forall x_1,x_2\in X,\forall\lambda\in[0,1]$，有

$$A(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\geqslant A(x_1)\wedge A(x_2) \tag{2.6.2}$$

将式(2.6.2)中的“$\geqslant$”改为“$>$”，则称 A 是严格凸 Fuzzy 集(strict convex

fuzzy set).

若 $X=\mathbf{R}$，则式(2.6.2)等价于

$$\forall x_1,x_2,x\in\mathbf{R},x_1\leqslant x\leqslant x_2,A(x)\geqslant A(x_1)\wedge A(x_2).$$

关于凸 Fuzzy 集的图形如图 2.6.1 所示.

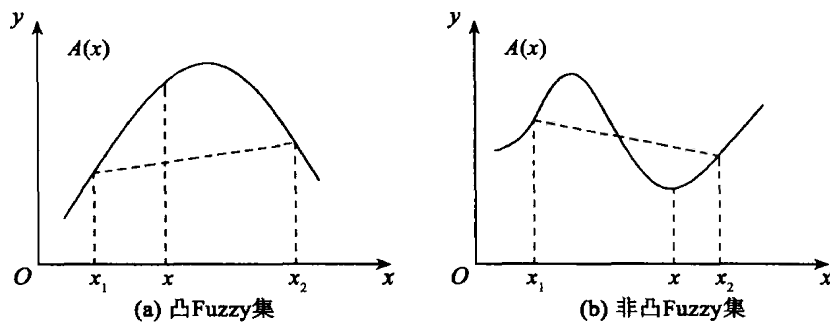


图 2.6.1

值得注意的是，若 A 为凸 Fuzzy 集，但 $A(x)$ 并不一定是凸函数.

例 2.6.1 如图 2.6.2 所示，设 Fuzzy 集 A 的隶属函数为

$$A(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x\geqslant 1\\ 1, & 0<x<1\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$$

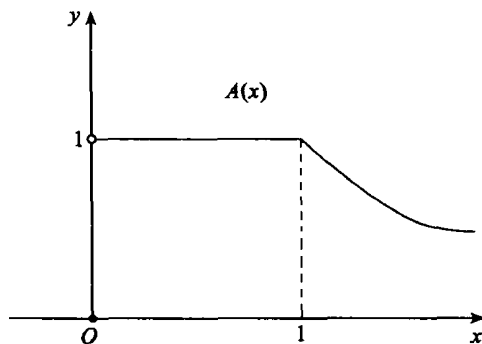


图 2.6.2 Fuzzy 集 A 的隶属函数示意图

则 A 是凸 Fuzzy 集. 事实上，$\forall x_1,x_2\in\mathbf{R}$，$\forall\lambda\in[0,1]$.

若 $x_1 \leqslant 0$ 或 $x_2 \leqslant 0$，则

$$A(x_1) \wedge A(x_2) = 0 \leqslant A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)$$

若 $x_1 > 0, x_2 > 0$，则由于 $A(x)$ 在 $x > 0$ 时是不增的，而且

$$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \leqslant x_1 \vee x_2$$

则有 $A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geqslant A(x_1 \vee x_2) = A(x_1) \wedge A(x_2)$. 总之有

$$A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geqslant A(x_1) \wedge A(x_2)$$

即 A 为凸 Fuzzy 集. 容易验证 A 不是严格凸 Fuzzy 集.

我们还可以验证 $A(x)$ 不是凸函数. 事实上，当

$$x_1 \in [0,1], \quad x_2 \in (1, +\infty), \quad \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \in [0,1],$$

那么

$$1 = f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > \frac{1}{2}f(x_1) + \frac{1}{2}f(x_2) \neq 1$$

当 $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$，则

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{1}{2}f(x_1) + \frac{1}{2}f(x_2).$$ □

定理 2.6.1　设 $A \in \mathscr{F}(X)$，则 A 为凸 Fuzzy 集，当且仅当 $\forall \alpha \in [0,1]$，截集 A_α 为凸集.

证明　设 A 为凸 Fuzzy 集，任取 $\alpha \in [0,1]$，并设 $x_1, x_2 \in A_\alpha$，$\lambda \in [0,1]$，由定义得

$$A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geqslant A(x_1) \wedge A(x_2) \geqslant \alpha$$

即 $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in A_\alpha$，故 A_α 为凸集.

反之，若 $\forall \alpha \in [0,1]$，截集 A_α 为凸集，任取 $x_1, x_2 \in X$，记

$$\alpha = A(x_1) \wedge A(x_2)$$

则 $x_1, x_2 \in A_\alpha$，因 A_α 为凸集，故 $\forall \lambda \in [0,1]$，$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in A_\alpha$，因此

$$A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geqslant \alpha = A(x_1) \wedge A(x_2)$$

即 A 是凸 Fuzzy 集. □

定理 2.6.2　(1) 设 $A, B \in \mathscr{F}(X)$，且 A, B 是凸(严格凸)Fuzzy 集，则 $A \cap B$ 也是凸(严格凸)Fuzzy 集.

(2) 设 $A, B \in \mathscr{F}(\mathbf{R})$，且 A, B 是凸(严格凸)Fuzzy 集，则 $A + B$ 也是凸(严格凸)Fuzzy 集.

证明　(1) 设 A, B 是凸 Fuzzy 集，则 $\forall x_1, x_2 \in X, \forall \lambda \in [0,1]$，有

$$\begin{aligned}(A \cap B)(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) &= A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \wedge B(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \\ &\geqslant A(x_1) \wedge A(x_2) \wedge B(x_1) \wedge B(x_2)\end{aligned}$$

$$\geqslant (A(x_1) \wedge B(x_1)) \wedge (A(x_2) \wedge B(x_2))$$

$$\geqslant (A \cap B)(x_1) \wedge (A \cap B)(x_2)$$

故 $A \cap B$ 为凸 Fuzzy 集. 若 A,B 是严格凸 Fuzzy 集,则同理可证 $A \cap B$ 为严格凸 Fuzzy 集.

(2) 设 A,B 是凸 Fuzzy 集,则对于 $x < y < z$, 下证

$$(A+B)(y) \geqslant (A+B)(x) \wedge (A+B)(z)$$

任取 $\varepsilon > 0$, 则存在 $x_1,x_2,z_1,z_2 \in \mathbf{R}$ 使得 $x_1 + x_2 = x$, $z_1 + z_2 = z$ 并且满足

$$A(x_1) \wedge B(x_2) \geqslant (A+B)(x) - \varepsilon$$

$$A(z_1) \wedge B(z_2) \geqslant (A+B)(z) - \varepsilon$$

设 $y=\alpha x+(1-\alpha)z$, $\alpha \in [0,1]$. 令 $x'=\alpha x_1+(1-\alpha)z_1$ 和 $z'=\alpha x_2+(1-\alpha)z_2$, 则 $x'+z'=y$. 于是我们有

$$(A+B)(y) \geqslant A(x') \wedge B(z') \geqslant A(x_1) \wedge A(z_1) \wedge B(x_2) \wedge B(z_2)$$

$$\geqslant [(A+B)(x)-\varepsilon] \wedge [(A+B)(z)-\varepsilon]$$

$$\geqslant [(A+B)(x) \wedge (A+B)(z)]-\varepsilon$$

由此而知 $A+B$ 是凸 Fuzzy 集. 若 A,B 是严格凸 Fuzzy 集,则同理可证 $A+B$ 也是严格凸 Fuzzy 集. □

定理 2.6.3 设 $A \in \mathscr{F}(\mathbf{R})$,则 A 是凸 Fuzzy 集的充分必要条件是 A 满足下列条件之一:

(1) $A(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的单调不减函数;

(2) $A(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的单调不增函数;

(3)存在 $x_0 \in \mathbf{R}$, 使 $A(x)$ 在 $(-\infty,x_0)$ 内单调不减,在 $(x_0,+\infty)$ 内单调不增,而且

$$A(x_0) \geqslant \Big(\bigvee_{x<x_0} A(x)\Big) \wedge \Big(\bigvee_{x>x_0} A(x)\Big) \tag{2.6.3}$$

证明 必要性:设 $A \in \mathscr{F}(\mathbf{R})$是凸 Fuzzy 集,则记

$$z_0 = ht(A) = \bigvee_{x\in \mathbf{R}} A(x)$$

那么 $z_0 \in [0,1]$. 下面分两种情形来证明.

情形 I,设有 $x_0 \in \mathbf{R}$, 使 $z_0 = A(x_0)$. $\forall x',x'' \in \mathbf{R}$, $x' < x'' < x_0$, 由于 A 是凸 Fuzzy 集,则

$$A(x'') \geqslant A(x') \wedge A(x_0) = A(x')$$

从而 $A(x)$ 在 $(-\infty,x_0)$ 内单调不减. 同理可证 $A(x)$ 在 $(x_0,+\infty)$ 内单调不增. 又 $\forall x_1,x_2 \in \mathbf{R}$, $x_1 < x_0 < x_2$, 有 $A(x_0) \geqslant A(x_1) \wedge A(x_2)$. 由此易得条件(3)为真.

情形 II,若 $\forall x \in \mathbf{R}$, $A(x) < z_0$. 按下列步骤构造数列 $\{x_n | n \in \mathbf{N}\}$

$$\begin{cases} x_1 \in \mathbf{R}, & A(x_1) > z_0 - \frac{1}{2} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ x_2 \in \mathbf{R}, & A(x_2) > \left(z_0 - \frac{1}{2^2}\right) \vee A(x_1) \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ x_n \in \mathbf{R}, & A(x_n) > \left(z_0 - \frac{1}{2^n}\right) \vee A(x_{n-1}) \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \end{cases}$$

则易知数列 $\{A(x_n) \mid n \in \mathbf{N}\}$ 严格单调增，而且 $\lim\limits_{n \to +\infty} A(x_n) = z_0$.

若点列 $\{x_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ 存在聚点 $x_0 \in \mathbf{R}$，则任取 $x', x'' \in \mathbf{R}$，$x' < x'' < x_0$. 则存在 $k \in \mathbf{N}$，使 $x_k > x''$，而且 $A(x_k) > A(x')$，从而 $x' < x'' < x_k$. 由 A 为凸 Fuzzy 集，得

$$A(x'') \geqslant A(x') \wedge A(x_k) = A(x')$$

故 $A(x)$ 在 $(-\infty, x_0)$ 内单调不减. 同理可证 $A(x)$ 在 $(x_0, +\infty)$ 内单调不增. 又 $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}, x_1 < x_0 < x_2$，有 $A(x_0) \geqslant A(x_1) \wedge A(x_2)$，故容易证明 $A(x_0) \geqslant \left(\bigvee\limits_{x < x_0} A(x)\right) \wedge \left(\bigvee\limits_{x > x_0} A(x)\right)$，这样条件(3)成立.

若点列 $\{x_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ 不存在聚点，则必存在子列 $\{x_{n_k} \mid k \in \mathbf{N}\}$，使

$$\lim_{k \to +\infty} x_{n_k} = +\infty，\text{或者} \lim_{k \to +\infty} x_{n_k} = -\infty$$

这里不妨设 $\lim\limits_{k \to +\infty} x_{n_k} = +\infty$，则 $\forall x', x'' \in \mathbf{R}$，$x' < x''$，存在 $k' \in \mathbf{N}$，使 $x' < x'' < x_{n_{k'}}$，且 $A(x_{n_{k'}}) > A(x')$，从而由 A 为凸 Fuzzy 集，得

$$A(x'') \geqslant A(x') \wedge A(x_{n_{k'}}) = A(x')$$

即 $A(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调不减，此时条件(2)成立. 如果 $\lim\limits_{k \to +\infty} x_{n_k} = -\infty$，则同理可证条件(1)为真.

综上所述，必要性得证.

充分性：设 Fuzzy 集 A 满足条件(3)，则 $\forall x', x, x'' \in \mathbf{R}$，$x' < x < x''$. 若 $x', x'' \in (-\infty, x_0]$，由 $A(x)$ 在 $(-\infty, x_0)$ 内单调不减可知，$A(x') \leqslant A(x)$，即

$$A(x) \geqslant A(x') \wedge A(x'')$$

同理可证，当 $x', x'' \in [x_0, +\infty)$ 时，$A(x) \geqslant A(x') \wedge A(x'')$. 而若 $x' \in (-\infty, x_0)$，$x'' \in (x_0, +\infty)$，则

$$x \in (-\infty, x_0) \Rightarrow A(x) \geqslant A(x') \Rightarrow A(x) \geqslant A(x') \wedge A(x'')$$

$$x \in (x_0, +\infty) \Rightarrow A(x) \geqslant A(x'') \Rightarrow A(x) \geqslant A(x') \wedge A(x'')$$

$$x=x_0 \Rightarrow A(x_0) \geqslant \left(\bigvee_{x<x_0} A(x)\right) \wedge \left(\bigvee_{x>x_0} A(x)\right) \geqslant A(x') \wedge A(x'')$$

故此时也有 $$A(x) \geqslant A(x') \wedge A(x'').$$

总之，有 $A(x) \geqslant A(x') \wedge A(x'')$. 即当条件(3)成立时，$A$ 为凸 Fuzzy 集. 以同样的步骤可以证明，当条件(1)或(2)为真时，A 也为凸 Fuzzy 集. 故充分性得证. □

定理 2.6.4 设 $A \in \mathscr{F}(\mathbf{R})$，则 A 是凸的当且仅当 $A=A^L \cap A^R$.

证明 假设 $A=A^L \cap A^R$ 并且 $x \leqslant y \leqslant z$. 因为 $A^L(y) \geqslant A^L(x)$ 和 $A^R(y) \geqslant A^R(x)$，我们得到

$$\begin{aligned} A(y) \wedge A(x) \wedge A(z) &= (A^L \cap A^R)(y) \wedge (A^L \cap A^R)(x) \wedge (A^L \cap A^R)(z) \\ &= A^L(y) \wedge A^R(y) \wedge A^L(x) \wedge A^R(x) \wedge A^L(z) \wedge A^R(z) \\ &= A^L(x) \wedge A^R(x) \wedge A^L(z) \wedge A^R(z) \\ &= A(x) \wedge A(z) \end{aligned}$$

于是 $$A(y) \geqslant A(x) \wedge A(z).$$

假设 f 是凸的，则对所有 $x \leqslant y \leqslant z$，$A(y) \geqslant A(x) \wedge A(z)$. 由此得到

$$A(y) \geqslant A^L(y) \wedge A^R(y) = (A^L \cap A^R)(y)$$

即 $A \supseteq A^L \cap A^R$. 又总有 $A \subseteq A^L \cap A^R$，于是 $A=A^L \cap A^R$. □

定理 2.6.5 设 $A \in \mathscr{F}(\mathbf{R})$，则 A 是凸的当且仅当 $A=B \cap C$，其中 $B \in \mathscr{F}(\mathbf{R})$单调不减，$C \in \mathscr{F}(\mathbf{R})$单调不增.

证明 如果 A 是凸的，则由定理 2.6.4 取 $B=A^L$，$C=A^R$. 反之，设 $A=B \cap C$，其中 $B \in \mathscr{F}(\mathbf{R})$单调不减，$C \in \mathscr{F}(\mathbf{R})$单调不增. 则对 $x \leqslant y \leqslant z$

$$\begin{aligned} &((B \cap C)(y)) \wedge ((B \cap C)(x)) \wedge ((B \cap C)(z)) \\ &= B(y) \wedge C(y) \wedge B(x) \wedge C(x) \wedge B(z) \wedge C(z) \\ &= B(x) \wedge C(x) \wedge B(z) \wedge C(z) \end{aligned}$$

于是 $(B \cap C)(y) \geqslant ((B \cap C)(x)) \wedge ((B \cap C)(z))$，即 $B \cap C$ 是凸的. □

定理 2.6.6 设 $A,B \in \mathscr{F}(\mathbf{R})$，且 A 与 B 是凸的，则 $A^{\tilde{N}}$，$A \tilde{\vee} B$ 与 $A \tilde{\wedge} B$ 也是凸的.

证明 如果 A 是凸的，则 $A=A^L \cap A^R$. 又

$$A^{\tilde{N}}=(A^L \cap A^R)^{\tilde{N}}=A^{L\tilde{N}} \cap A^{R\tilde{N}}=A^{\tilde{N}L} \cap A^{\tilde{N}R},$$

所以 $A^{\tilde{N}}$ 是凸的. 如果 A 与 B 是凸的，则

$$\begin{aligned} A \tilde{\vee} B &= (A^L \cap B) \cup (A \cap B^L) \\ &= (A^L \cap B^L \cap B^R) \cup (A^L \cap A^R \cap B^L) \\ &= (A^L \cap B^L) \cap (A^R \cup B^R) \end{aligned}$$

由定理 2.6.5 知 $A \tilde{\vee} B$ 是凸的. 因为 $(A \tilde{\wedge} B)^{\tilde{N}} = A^{\tilde{N}} \tilde{\vee} B^{\tilde{N}}$ 是凸的，所以 $A \tilde{\wedge} B$ 也是凸的. □

2.6.2 Fuzzy 数

定义 2.6.2 实数域 $\mathbf{R}$ 上的 Fuzzy 集 $A \in \mathcal{F}(\mathbf{R})$ 称为 $\mathbf{R}$ 上的一个 Fuzzy 数(fuzzy number)，如果 $\forall \alpha \in (0,1]$，A_α 是有限闭区间.

若 $\text{supp}A$ 为有界集，则称 Fuzzy 数 A 为有界 Fuzzy 数(bounded fuzzy number). 若 $\text{supp}A \subseteq [0, +\infty)$ 则称 Fuzzy 数 A 为正 Fuzzy 数(positive fuzzy number). 若 $\text{supp}A \subseteq (-\infty, 0]$ 则称 Fuzzy 数 A 为负 Fuzzy 数(negative fuzzy number). 全体 Fuzzy 数记为 $\tilde{\mathbf{R}}$，全体正 Fuzzy 数记为 $\tilde{\mathbf{R}}^+$，全体负 Fuzzy 数记为 $\tilde{\mathbf{R}}^-$.

从定义 2.6.2 可知：Fuzzy 数 A 是正规的，即存在 $x_0 \in \mathbf{R}$，使 $A(x_0) = 1$. Dubois 和 Prade 介绍了 Fuzzy 数，他们的定义中还要求满足 $A(x_0) = 1$ 的 x_0 是唯一存在的，即要求截集 $A_1 = \{x_0\}$. 定义 2.6.2 中的 Fuzzy 数不要求这一条件成立，这样定义的 Fuzzy 数可以将区间数作为特殊的 Fuzzy 数.

例 2.6.2 设 $A \in \mathcal{F}(\mathbf{R})$，且

$$A(x) = \begin{cases} 1, & x = a \\ 0, & x \neq a \end{cases}$$

则 $A(a) = 1$ 且 $\forall \alpha \in (0,1]$，$A_\alpha = [a, a]$，即 A 是 Fuzzy 数，且表示了普通数 a，即 Fuzzy 数可以视为普通数的推广. □

例 2.6.3 设 $A \in \mathcal{F}(\mathbf{R})$，且

$$A(x) = \exp\left(-\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2\right), \sigma > 0$$

如图 2.6.3 所示，易证 A 也是 Fuzzy 数，称为正态 Fuzzy 数(normal fuzzy number)或 Gaussian Fuzzy 数. 在不混淆的情况下，记 A 为 (a, σ).

例 2.6.4 设 $A \in \mathcal{F}(\mathbf{R})$，且

$$A(x) = \begin{cases} \dfrac{x-a}{b-a}, & a \leqslant x \leqslant b \\ 1, & b < x \leqslant c \\ \dfrac{d-x}{d-c}, & c < x \leqslant d \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

如图 2.6.4 所示，易证 A 也是 Fuzzy 数，称为梯形 Fuzzy 数(trapezoidal fuzzy number)，也称 Fuzzy 区间，简记为 $< a, b, c, d >$.

特别地 A 为

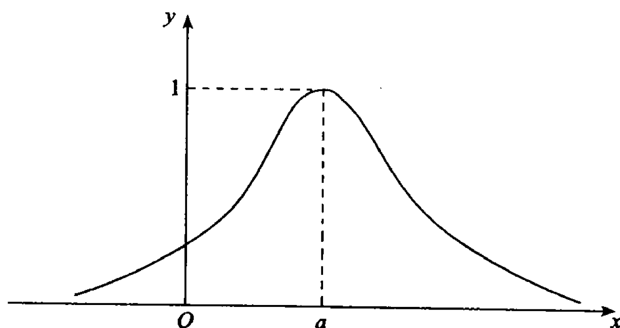


图 2.6.3 正态 Fuzzy 数

$$A(x)=\begin{cases}\dfrac{x-a}{b-a}, & a\leqslant x\leqslant b\\ \dfrac{c-x}{c-b}, & b<x\leqslant c\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

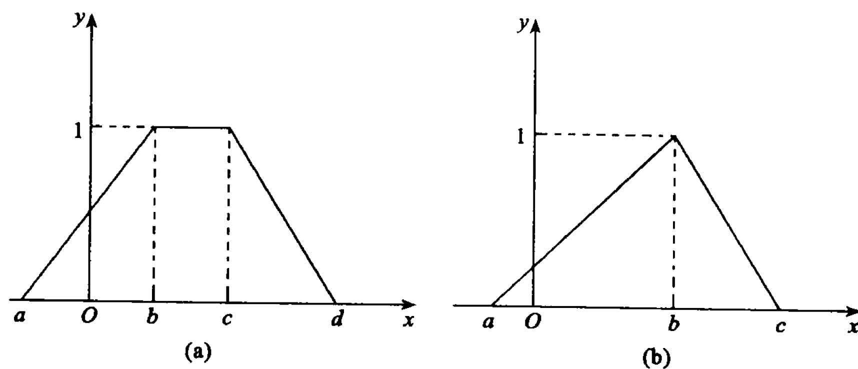


图 2.6.4 梯形 Fuzzy 数与三角 Fuzzy 数

称为三角形Fuzzy数(triangular fuzzy number)或三角 Fuzzy 数,简记为 $<a,b,c>$.

若 $b-a=c-b\triangleq d$, 则称 A 为对称的三角 Fuzzy 数,其隶属函数为

$$d\neq 0,\ A(x)=\begin{cases}1-\dfrac{|x-b|}{d}, & b-d\leqslant x\leqslant b+d\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$d=0,\ A(x)=\begin{cases}1, & x=b\\ 0, & x\neq b\end{cases}$$

这时 A 简记为 $< b,d >$.

梯形 Fuzzy 数也称为 Fuzzy 区间. 图 2.6.5 是实数、区间数与 Fuzzy 数、Fuzzy 区间的一个比较.

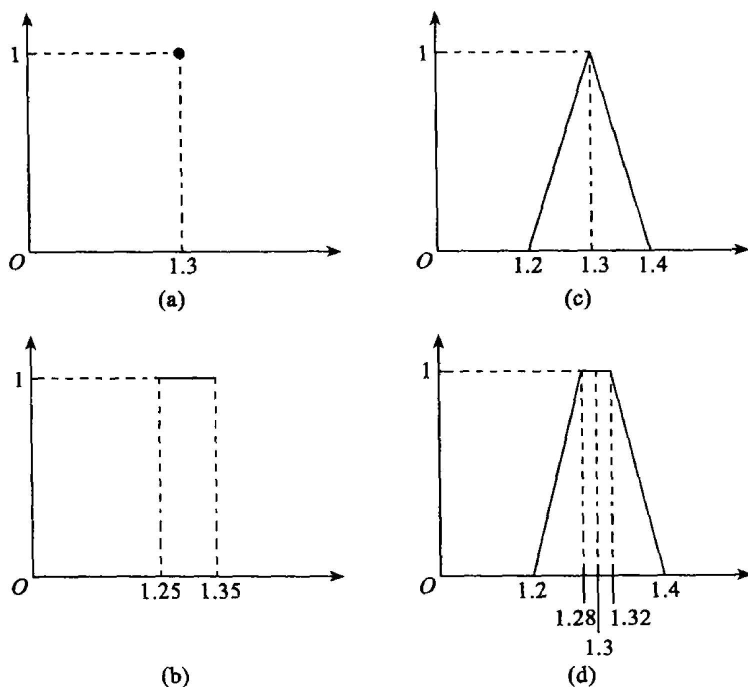


图 2.6.5　实数、区间数与 Fuzzy 数、Fuzzy 区间的一个比较

定理 2.6.7　设 $A \in \widetilde{\mathbf{R}}$, 则 A 是凸 Fuzzy 集.

证明　由于 $A_\alpha(\alpha \in (0,1])$ 是闭区间, 且 $A_0=\mathbf{R}$, 即 $\forall \alpha \in [0,1]$, A_α 是凸集, 根据定理 2.6.1 即证得 A 是凸 Fuzzy 集. □

定理 2.6.8　$A \in \widetilde{\mathbf{R}}$ 当且仅当

$$A(x)=\begin{cases}1, & x \in [m,n] \\ L(x), & x < m \\ R(x), & x > n\end{cases} \tag{2.6.4}$$

其中 $L(x)$ 为单调增函数, 右连续, $0 \leqslant L(x) < 1$ 且 $\lim\limits_{x \to -\infty} L(x)=0$, $R(x)$ 为单调减函数, 左连续, $0 \leqslant R(x) < 1$ 且 $\lim\limits_{x \to +\infty} R(x)=0$.

证明　(1) 设 $A \in \widetilde{\mathbf{R}}$

(i) A 正规 $\Rightarrow A_1=[m,n]\neq\varnothing$

$$A(x)\begin{cases}=1, & x\in[m,n]\\ <1, & x\overline{\in}[m,n]\end{cases}$$

(ii)当 $x<m$ 时，令 $L(x)\triangleq A(x)$，则 $0\leqslant L(x)<1$.

$\forall x_1\leqslant x_2<m$，由 $A\in\widetilde{\mathbf{R}}$ 得

$$A(x_2)\geqslant A(x_1)\wedge A(m)=A(x_1)$$

所以 $L(x)=A(x)(x<m)$ 为单调增函数.

现证 $L(x)$ 右连续，假若不然，则存在 $x_0<m$，$\lim\limits_{n\to x_0^+}L(x)=a>L(x_0)$（单调有界函数右极限存在），于是 $\forall x\in(x_0,m)$ 有 $L(x)\geqslant a$ 而 $L(x_0)<a$，取 α 满足 $L(x_0)<\alpha<a$，于是 $\forall x\in(x_0,m)$ 有 $x\in A_\alpha$，而 $x_0\overline{\in}A_\alpha$. 取 $x_n=x_0+\dfrac{m-x_0}{n+1}$，我们有 $x_n\in A_\alpha$ 而 $x_0=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\overline{\in}A_\alpha$，这与 A_α 是闭区间矛盾.

现证 $\lim\limits_{x\to-\infty}L(x)=0$，假若不然，$\lim\limits_{x\to-\infty}L(x)=\alpha>0$. 由于 $L(x)$ 是单调增函数，因而 $\forall x<m$，$A(x)=L(x)\geqslant\alpha$. 于是 A_α 不是闭区间，这与 A 是 Fuzzy 数矛盾.

同理当 $x>n$ 时，令 $R(x)\triangleq A(x)$，则 $R(x)$ 为单调减函数，左连续，$0\leqslant R(x)<1$ 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}R(x)=0$.

(2)设

$$A(x)=\begin{cases}1, & x\in[m,n]\\ L(x), & x<m\\ R(x), & x>n\end{cases}$$

(i) $A_1=[m,n]\neq\varnothing$，故 A 是正规的.

(ii) $\forall\alpha\in(0,1)$，令 $m_\alpha=\wedge\{x\mid L(x)\geqslant\alpha\}$，$n_\alpha=\vee\{x\mid R(x)\geqslant\alpha\}$，由于 $\lim\limits_{x\to-\infty}L(x)=0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}R(x)=0$，因而 m_α，n_α 为有限数. 下证 $A_\alpha=[m_\alpha,n_\alpha]$ $([m_\alpha,n_\alpha]\supseteq[m,n])$.

$\forall x\in[m_\alpha,n_\alpha]$，若 $x\in[m,n]$，则 $A(x)=1\geqslant\alpha$；若 $x\in(m_\alpha,m)$，则 $m_\alpha<x<m$. 由于 $m_\alpha=\wedge\{x\mid L(x)\geqslant\alpha\}$，必然存在 $x_1<x$，$L(x_1)\geqslant\alpha$. 根据 $L(x)$ 是单调增函数知 $A(x)=L(x)\geqslant L(x_1)\geqslant\alpha$；又因为 $L(x)$ 右连续，所以 $L(m_\alpha)=\lim\limits_{x\to m_\alpha^+}L(x)\geqslant\alpha$. 因此 $[m_\alpha,m)\subseteq A_\alpha$. 同理可证 $(n,n_\alpha]\subseteq A_\alpha$，于是

$$[m_\alpha,n_\alpha]\subseteq A_\alpha.$$

另一方面，$\forall x\overline{\in}[m_\alpha,n_\alpha]$

$$\Rightarrow\left.\begin{cases}x<m_\alpha=\wedge\ \{x\,|\,L(x)\geqslant\alpha\Rightarrow A(x)=L(x)<\alpha\\ \text{或 } x>n_\alpha=\vee\ \{x\,|\,R(x)\geqslant\alpha\}\Rightarrow A(x)=R(x)<\alpha\end{cases}\right\}\Rightarrow x\,\overline{\in}\,A_\alpha$$

于是 $[m_\alpha,n_\alpha]=A_\alpha$. 由于 $\alpha\in(0,1]$, A_α 都是闭区间,所以 A 是 Fuzzy 数. □

Fuzzy 数 A 可以记为 $A=([m_A,n_A],L_A,R_A)$. 为了给出一些特殊的 Fuzzy 数，我们先讨论一类函数.

设函数 $L:(-\infty,+\infty)\to[0,1]$ 满足

(1) $L(x)=L(-x)$;

(2) $L(0)=1$;

(3) $L(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上不增.

这样函数的全体记为 $\mathscr{L}$. $\mathscr{L}$ 中常用函数如下.

(1) $L(x)=\begin{cases}1, & x\in[-1,1]\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$;

(2) $L(x)=\max\{0,1-|x|^p\}$, $p>0$;

(3) $L(x)=\dfrac{1}{1+|x|^p}$, $p>0$;

(4) $L(x)=\exp(-|x|^p)$, $p>0$.

下面给出一些特殊的 Fuzzy 数.

(1) LR 型 Fuzzy 数(LR type of fuzzy numbers, Dubois and Prade, 1980)

LR 型 Fuzzy 数 A 的隶属函数为

$$A(x)=\begin{cases}L\left(\dfrac{m-x}{\alpha}\right), & x\leqslant m\\ R\left(\dfrac{x-m}{\beta}\right), & x\geqslant m\end{cases}\tag{2.6.5}$$

其中 $L,R\in\mathscr{L}$, $m\in\mathbf{R}$, $\alpha,\beta>0$, 记为 $(m,\alpha,\beta)_{LR}$. 并且约定当 $\alpha=\beta=0$ 时, LR 型 Fuzzy 数退化为普通实数,即 $(m,0,0)_{LR}=m$. 所有 LR 型 Fuzzy 数构成的集记为 $\widetilde{\mathbf{R}}_{LR}$.

若取 $L(x)=R(x)=\max\{0,1-|x|\}$, 则 LR 型 Fuzzy 数 $(m,\alpha,\beta)_{LR}$ 即为三角 Fuzzy 数 $<m-\alpha,m,m+\beta>$.

若取 $L(x)=\exp(-|x|^p)$ 和 $R(x)=\dfrac{1}{1+|x|^p}$, $p>0$, 则

$$A(x)=\begin{cases}\exp\left(-\left|\dfrac{x-m}{\alpha}\right|^p\right), & x\leqslant m\\ \dfrac{1}{1+\left|\dfrac{m-x}{\beta}\right|^p}, & x>m\end{cases}$$

是 LR 型 Fuzzy 数.

(2)对称 Fuzzy 数(symmetric fuzzy number)

对称 Fuzzy 数 A 的隶属函数为

$$A(x)=L\left(\frac{x-a}{\alpha}\right),\alpha>0 \tag{2.6.6}$$

其中 $L\in\mathscr{L}$,记为 $(a,\alpha)_L$. 并且约定当 $\alpha=0$ 时,对称型 Fuzzy 数退化为普通实数,即 $(a,0)_L=a$. 所有对称 Fuzzy 数构成的集记为 $\widetilde{\mathbf{R}}_L$. 显然 $\widetilde{\mathbf{R}}_L\subset\widetilde{\mathbf{R}}_{LR}\subset\widetilde{\mathbf{R}}$.

定义 2.4.3 已给出了 Fuzzy 数的四则运算.

例 2.6.5 设有 Fuzzy 数 $\tilde{2}$.

$$\tilde{2}=\int_1^2\frac{x-1}{x}+\int_2^3\frac{3-x}{x}=<1,2,3>$$

故 $\forall z\in\mathbf{R}$, 有

$$\tilde{2}(z-x)=\begin{cases}z-x-1, & z-2\leqslant x\leqslant z-1\\ 3-z+x, & z-3\leqslant x<z-2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

关于 $\tilde{2}(x)$ 与 $\tilde{2}(z-x)$ 的曲线如图 2.6.6 所示.

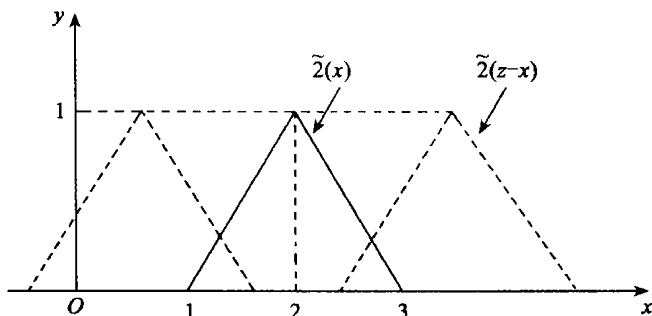


图 2.6.6 Fuzzy 数 $\tilde{2}$ 及其平移

$\forall z\in\mathbf{R}$, 有

$$(\tilde{2}+\tilde{2})(z)=\bigvee_{x\in\mathbf{R}}(\tilde{2}(x)\wedge\tilde{2}(z-x))$$

故当 $[z-2,z-1]\cap[1,2]=\varnothing$ 且 $[z-3,z-2]\cap[2,3]=\varnothing$ 时, $(\tilde{2}+\tilde{2})(z)=0$. 下面分两种情形来计算 $(\tilde{2}+\tilde{2})(z)$ 的值.

情形 I, $[z-2,z-1]\cap[1,2]\neq\varnothing$, 此时有 $2\leqslant z\leqslant 4$, 且直线 $y=x-1$

与 $y=z-x-1$ 的交点是 $(x,y)=\left(\frac{z}{2},\frac{z}{2}-1\right)$，故此时

$$(\tilde{2}+\tilde{2})(z)=\bigvee_{x\in\mathbf{R}}(\tilde{2}(x)\wedge\tilde{2}(z-x))=\frac{z}{2}-1$$

情形 II，$[2,3]\cap[z-3,z-2]\neq\varnothing$，此时有 $4\leqslant z\leqslant 6$，且直线 $y=3-x$ 与 $y=3-z+x$ 的交点是 $(x,y)=\left(\frac{z}{2},3-\frac{z}{2}\right)$，从而此时

$$(\tilde{2}+\tilde{2})(z)=\bigvee_{x\in\mathbf{R}}(\tilde{2}(x)\wedge\tilde{2}(z-x))=3-\frac{z}{2}$$

总之有

$$\tilde{2}+\tilde{2}(z)=\begin{cases}\frac{z}{2}-1, & 2\leqslant z\leqslant 4\\ 3-\frac{z}{2}, & 4<z\leqslant 6\\ 0, & 其他\end{cases}$$

即

$$\tilde{2}+\tilde{2}=\int_2^4\frac{\frac{z}{2}-1}{z}+\int_4^6\frac{3-\frac{z}{2}}{z}=<2,4,6>$$

同理

$$\tilde{2}-\tilde{2}=\int_{-2}^0\frac{\frac{z}{2}+1}{z}+\int_0^2\frac{1-\frac{z}{2}}{z}=<-2,0,2>$$

$$\tilde{2}\cdot\tilde{2}=\int_1^4\frac{\sqrt{z}-1}{z}+\int_4^9\frac{3-\sqrt{z}}{z}$$

$$\tilde{2}\div\tilde{2}=\int_{\frac{1}{3}}^1\frac{3-\frac{4}{z+1}}{z}+\int_1^3\frac{\frac{4}{z+1}-1}{z}$$

图 2.6.7 是运算结果的示意图.

由例 2.6.5 知：一般来说，$A-A=0, A\div A=1$ 不一定成立. 这就是说，Fuzzy 数的四则运算与实数的四则运算有着本质的区别. 但 Fuzzy 数的四则运算是实数四则运算的扩张.

由定理 2.4.17(3) 可得以下定理.

定理 2.6.9　设 $A,B\in\tilde{\mathbf{R}}$，则 $\forall\alpha\in(0,1]$

$$(A+B)_\alpha=A_\alpha+B_\alpha \tag{2.6.7}$$

$$(A-B)_\alpha=A_\alpha-B_\alpha \tag{2.6.8}$$

$$(A\cdot B)_\alpha=A_\alpha\cdot B_\alpha \tag{2.6.9}$$

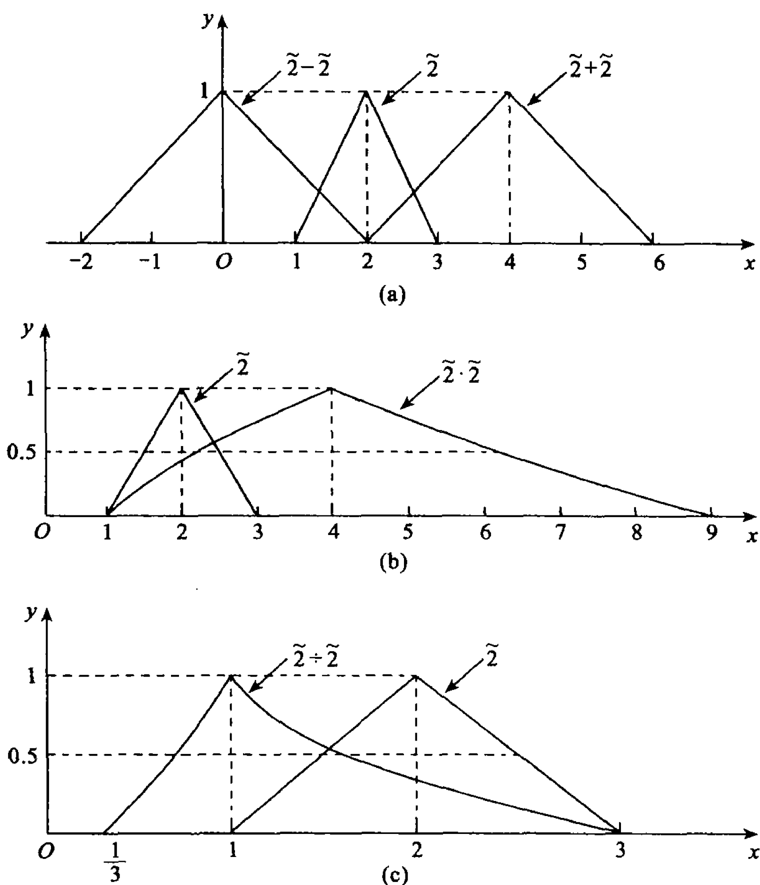


图 2.6.7 Fuzzy 数的运算示意图

$$(A \div B)_\alpha = A_\alpha \div B_\alpha \tag{2.6.10}$$

图 2.6.8 是 Fuzzy 数 $A=\langle -1,1,3\rangle$和 $B=\langle 1,3,5\rangle$的扩张四则运算与截集运算关系示意图.

定理 2.6.10 若 $A,B \in \tilde{\mathbf{R}}$, 则 $A+B, A-B, A\cdot B \in \tilde{\mathbf{R}}$.

若 $B \in \tilde{\mathbf{R}}^+$ 或 $B \in \tilde{\mathbf{R}}^-$, 则 $A \div B \in \tilde{\mathbf{R}}$.

证明 由定理 2.6.9 与区间数的扩张四则运算即证. □

一般说来,若 $A,B \in \tilde{\mathbf{R}}$, $A \div B$ 未必是正规的, $A_\alpha \div B_\alpha$ 未必是闭区间.

例 2.6.6 设 $A \in \tilde{\mathbf{R}}$, 令

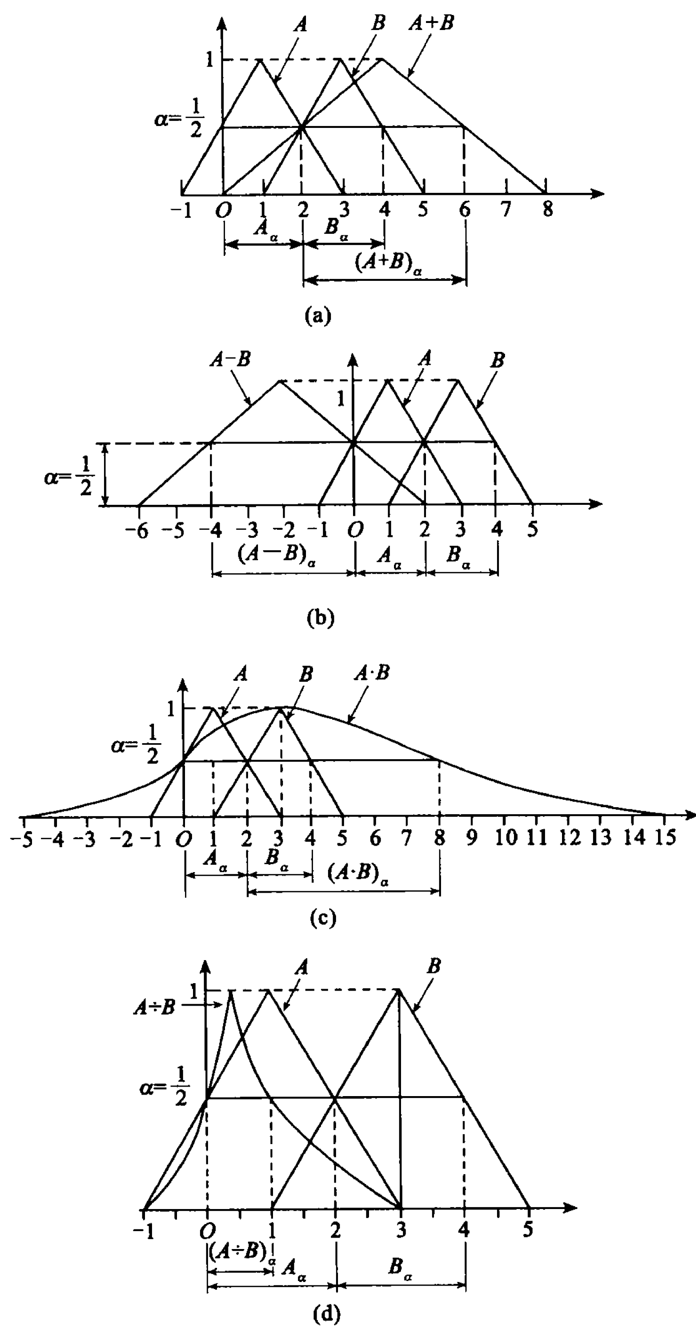


图 2.6.8　Fuzzy 数 $A=<-1,1,3>$ 和 $B=<1,3,5>$ 的扩张四则运算与截集运算关系示意图

$$B(x)=\begin{cases}1, & x=0\\ 0, & x\neq 0\end{cases}$$

则 $\forall z\in\mathbf{R}$, $(A\div B)(z)=\bigvee\limits_{x\div y=z}(A(x)\wedge B(y))=\bigvee\limits_{y\neq 0}(A(yz)\wedge B(y))=\bigvee\limits_{y\neq 0}(A(yz)\wedge 0)=0$, 即

$$(A\div B)(z)=0,\ \forall z\in\mathbf{R}.$$ □

例 2.6.7 令

$$A(x)=\begin{cases}1, & x=1\\ 0, & x\neq 1\end{cases}$$

$$B(x)=\begin{cases}1, & x\in[-1,1]\\ 0, & x\overline{\in}[-1,1]\end{cases}$$

则 $A_\alpha=[1,1]$, $B_\alpha=[-1,1](\alpha>0)$. 于是

$$A_\alpha\div B_\alpha=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)\ (\alpha>0).$$ □

利用分解定理与定理 2.6.9 可以推出 LR 型 Fuzzy 数的数乘与加法运算的简单公式,这在应用中经常用到.

定理 2.6.11 设 $(a,\alpha,\beta)_{LR},(b,\gamma,\delta)_{LR}\in\widetilde{\mathbf{R}}_{LR}$, $k\in\mathbf{R}$, 则

(1) $k\cdot(a,\alpha,\beta)_{LR}=\begin{cases}(ka,k\alpha,k\beta)_{LR}, k\geqslant 0\\ (ka,-k\beta,-k\alpha)_{RL}, k<0\end{cases}$,

特别地, $-(a,\alpha,\beta)_{LR}=(-a,\beta,\alpha)_{RL}$;

(2) $(a,\alpha,\beta)_{LR}+(b,\gamma,\delta)_{LR}=(a+b,\alpha+\gamma,\beta+\delta)_{LR}$;

(3) $(a,\alpha,\beta)_{LR}-(b,\gamma,\delta)_{RL}=(a-b,\alpha+\delta,\beta+\gamma)_{LR}$.

证明 (1) $k\cdot(a,\alpha,\beta)_{LR}=\bigcup\limits_{\lambda}\lambda[k\cdot(a,\alpha,\beta)_{LR}]_\lambda$

$$=\bigcup_{\lambda}\lambda([k]_\lambda\cdot[(a,\alpha,\beta)_{LR}]_\lambda)$$

$$=\bigcup_{\lambda}\lambda(k[a-\alpha L^{-1}(\lambda),a+\beta R^{-1}(\lambda)])$$

$$=\begin{cases}\bigcup\limits_{\lambda}\lambda[ka-k\alpha L^{-1}(\lambda),ka+k\beta R^{-1}(\lambda)],\ k\geqslant 0\\ \bigcup\limits_{\lambda}\lambda[ka+k\beta R^{-1}(\lambda),ka-k\alpha L^{-1}(\lambda)],\ k<0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\bigcup\limits_{\lambda}\lambda[(ka,k\alpha,k\beta)_{LR}]_\lambda,\ k\geqslant 0\\ \bigcup\limits_{\lambda}\lambda[(ka,-k\beta,-k\alpha)_{RL}]_\lambda,\ k<0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}(ka,k\alpha,k\beta)_{LR},k\geqslant 0\\ (ka,-k\beta,-k\alpha)_{RL},\ k<0\end{cases}$$

(2) $(a,\alpha,\beta)_{LR}+(b,\gamma,\delta)_{LR}=\bigcup\limits_{\lambda}\lambda\,[(a,\alpha,\beta)_{LR}+(b,\gamma,\delta)_{LR}]_{\lambda}$

$$
\begin{aligned}
&=\bigcup_{\lambda}\lambda([(a,\alpha,\beta)_{LR}]_{\lambda}+[(b,\gamma,\delta)_{LR}]_{\lambda})\\
&=\bigcup_{\lambda}\lambda([a-\alpha L^{-1}(\lambda),a+\beta R^{-1}(\lambda)]\\
&\quad+[b-\gamma L^{-1}(\lambda),b+\delta R^{-1}(\lambda)])\\
&=\bigcup_{\lambda}\lambda([a+b-(\alpha+\gamma)L^{-1}(\lambda),a+b+(\beta+\delta)R^{-1}(\lambda)])\\
&=\bigcup_{\lambda}\lambda((a+b,\alpha+\gamma,\beta+\delta)_{LR})_{\lambda}\\
&=(a+b,\alpha+\gamma,\beta+\delta)_{LR}.
\end{aligned}
$$

(3) 类似(2)可证. □

推论 2.6.1 设 $(a,\alpha)_L$, $(b,\beta)_L\in\widetilde{\mathbf{R}}_L$, 则 $k\cdot(a,\alpha)_L$, $(a,\alpha)_L+(b,\beta)_L\in\widetilde{\mathbf{R}}_L$, 并且

(1) $k\cdot(a,\alpha)_L=(ka,|k|\alpha)_L$;

(2) $(a,\alpha)_L+(b,\beta)_L=(a+b,\alpha+\beta)_L$.

推论 2.6.2 (1)设三角 Fuzzy 数 $\tilde{a}=\langle\alpha,a,\beta\rangle$, 对于给定的实数 k, 有

$$
k\cdot\tilde{a}=k\cdot\langle\alpha,a,\beta\rangle=\begin{cases}\langle k\alpha,ka,k\beta\rangle, & k\geqslant 0\\ \langle k\beta,ka,k\alpha\rangle, & k<0\end{cases}\tag{2.6.11}
$$

并且 $k\cdot\tilde{a}=\tilde{a}\cdot k$.

(2)设三角 Fuzzy 数 $\tilde{a}_1=\langle\alpha_1,a_1,\beta_1\rangle$ 和 $\tilde{a}_2=\langle\alpha_2,a_2,\beta_2\rangle$, 有

$$
\langle\alpha_1,a_1,\beta_1\rangle+\langle\alpha_2,a_2,\beta_2\rangle=\langle\alpha_1+\alpha_2,a_1+a_2,\beta_1+\beta_2\rangle\tag{2.6.12}
$$

由推论 2.6.2 可以直接得到以下结果.

推论 2.6.3 设三角 Fuzzy 数 $\tilde{x}_i=\langle\alpha_i,x_i,\beta_i\rangle$ $(i=1,2,\cdots,n)$,则

$$
\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\tilde{x}_i=\left\langle\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\beta_i\right\rangle\tag{2.6.13}
$$

特别地当 $\tilde{x}_i=\langle x_i,c_i\rangle$ $(i=1,2,\cdots,n)$时,则

$$
\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\tilde{x}_i=\left\langle\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}c_i\right\rangle\tag{2.6.14}
$$

称式(2.6.13),式(2.6.14)为三角 Fuzzy 数序列 $\{\tilde{x}_i\}$ 的平均值.

推论 2.6.4 (1)设对称三角 Fuzzy 数 $\tilde{a}=\langle a,c\rangle$ 和 $k\in\mathbf{R}$, 则

$$
k\cdot\tilde{a}=\tilde{a}\cdot k=\langle ka,|k|c\rangle\tag{2.6.15}
$$

并且,当 $k=0$ 时

$$
k\cdot\tilde{a}(x)=\begin{cases}1, & x=0\\ 0, & x\neq 0\end{cases}
$$

当 $k\neq 0$ 时， $k\cdot\tilde{a}(x)=\begin{cases}1-\dfrac{|x-ka|}{|k|c}, & |x-ka|\leqslant |k|c\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

(2)设对称三角 Fuzzy 数 $\tilde{a}_1=<a_1,c_1>$ 和 $\tilde{a}_2=<a_2,c_2>$，有

$$<a_1,c_1>+<a_2,c_2>=<a_1+a_2,c_1+c_2> \tag{2.6.16}$$

并且，当 $c_1+c_2=0$ 时 $(\tilde{a}_1+\tilde{a}_2)(x)=\begin{cases}1, & x=a_1+a_2\\ 0, & x\neq a_1+a_2\end{cases}$

当 $c_1+c_2\neq 0$ 时

$$(\tilde{a}_1+\tilde{a}_2)(x)=\begin{cases}1-\dfrac{|x-(a_1+a_2)|}{c_1+c_2}, & |x-(a_1+a_2)|\leqslant c_1+c_2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

下面讨论 Fuzzy 数的运算性质.

定理 2.6.12 设 $A,B,C\in\tilde{\mathbf{R}}$，则

(1) $A+B=B+A, A\cdot B=B\cdot A$;

(2) $(A+B)+C=A+(B+C), (A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$.

下面的例子说明分配律不成立.

例 2.6.8 设

$$A=\int_2^3\frac{x-2}{x}+\int_3^4\frac{4-x}{x}$$

$$B=\int_1^2\frac{1}{x}$$

$$C=\int_{-1}^1\frac{\frac{1}{2}(x+1)}{x}$$

则
$$A\cdot(B+C)=\int_0^6\frac{\sqrt{4+2x}-2}{2}\Big/x+\int_6^9\frac{1}{x}+\int_9^{12}\left(4-\frac{x}{3}\right)\Big/x$$

$$A\cdot B+A\cdot C=\int_{-2}^{2.5}\frac{5-\sqrt{21-2x}}{2}\Big/x+\int_{2.5}^6\frac{\sqrt{4+2x}-2}{2}\Big/x+\int_6^9\frac{1}{x}+\int_9^{12}\left(4-\frac{x}{3}\right)\Big/x$$

于是
$$A\cdot(B+C)\neq A\cdot B+A\cdot C.$$
□

定理 2.6.13 设 $A,B,C\in\tilde{\mathbf{R}}^+$，则分配律成立，即

$$A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C \tag{2.6.17}$$

由定理 2.6.10、定理 2.6.12 与定理 2.6.13，再加上 $\forall A\in\tilde{\mathbf{R}}, A+\varnothing=A$,

$A \cdot \mathbf{R} = A$，得到 $(\widetilde{\mathbf{R}}^+, +, \cdot)$ 是半环(即 $(\widetilde{\mathbf{R}}^+, +)$ 是带单位元 $\varnothing$ 的交换幺半群，$(\widetilde{\mathbf{R}}^+, \cdot)$ 是带单位元 $\mathbf{R}$ 的幺半群，并且乘法 $\cdot$ 分配于加法 $+$ 之上).

由于 $\vee$ 和 $\wedge$ 是 $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 的满射，则 $\forall \alpha \in [0,1]$

$$(A \mathbin{\tilde{\vee}} B)_\alpha = A_\alpha \vee B_\alpha = \{x \vee y \mid x \in A_\alpha, y \in B_\alpha\}$$

$$(A \mathbin{\tilde{\wedge}} B)_\alpha = A_\alpha \wedge B_\alpha = \{x \wedge y \mid x \in A_\alpha, y \in B_\alpha\}$$

因此，当 $A, B \in \widetilde{\mathbf{R}}$ 时，必有

$$A \mathbin{\tilde{\vee}} B, A \mathbin{\tilde{\wedge}} B \in \widetilde{\mathbf{R}}.$$

再利用 Fuzzy 分解定理易证下列定理.

定理 2.6.14　设 $A, B, C \in \widetilde{\mathbf{R}}$，则

(1) $A + (B \mathbin{\tilde{\vee}} C) = (A + B) \mathbin{\tilde{\vee}} (A + C)$;

(2) $A + (B \mathbin{\tilde{\wedge}} C) = (A + B) \mathbin{\tilde{\wedge}} (A + C)$;

(3) $A - (B \mathbin{\tilde{\vee}} C) = (A - B) \mathbin{\tilde{\wedge}} (A - C)$;

(4) $A - (B \mathbin{\tilde{\wedge}} C) = (A - B) \mathbin{\tilde{\vee}} (A - C)$.

定理 2.6.15　设 $A, B, C \in \widetilde{\mathbf{R}}^+$，则

(1) $A \cdot (B \mathbin{\tilde{\vee}} C) = (A \cdot B) \mathbin{\tilde{\vee}} (A \cdot C)$;

(2) $A \cdot (B \mathbin{\tilde{\wedge}} C) = (A \cdot B) \mathbin{\tilde{\wedge}} (A \cdot C)$;

(3) $A \div (B \mathbin{\tilde{\vee}} C) = (A \div B) \mathbin{\tilde{\wedge}} (A \div C)$;

(4) $A \div (B \mathbin{\tilde{\wedge}} C) = (A \div B) \mathbin{\tilde{\vee}} (A \div C)$.

2.6.3　Fuzzy 自然数

定义 2.6.3　(Wygralak, 1996) $\mathbf{N}$ 上的有限 Fuzzy 集 $\alpha: \mathbf{N} \to [0,1]$ 称为有限广义自然数(finite generalized natural number)，如果 α 满足

$$\alpha(k) \geqslant \alpha(i) \wedge \alpha(j),\ i \leqslant k \leqslant j \tag{2.6.18}$$

则称 α 是凸的(convex). 凸的有限广义自然数简称为 Fuzzy 自然数(fuzzy natural number)，$\mathbf{N}$ 上全体 Fuzzy 自然数记为 $\widetilde{\mathbf{N}}$.

很显然，如果有限广义自然数 α 是不增或不减的，那么 α 一定是凸的. 进一步还可以得到下列结论.

定理 2.6.16　如果有限广义自然数 α 和 β 是凸的，则 $\alpha \cap \beta$，$\alpha + \beta$ 和 $\alpha \cdot \beta$ 都是凸的.

证明　设有限广义自然数 α 和 β 是凸的，则对于任意 $i \leqslant k \leqslant j$，$i, k, j \in \mathbf{N}$，

有

$$(\alpha \cap \beta)(k)=\alpha(k) \wedge \beta(k)$$
$$\geqslant \alpha(i) \wedge \alpha(j) \wedge \beta(i) \wedge \beta(j)$$
$$=(\alpha \cap \beta)(i) \wedge (\alpha \cap \beta)(j)$$

这说明 $\alpha \cap \beta$ 是凸的. 对于任意 $i \leqslant k \leqslant j$, $i,k,j \in \mathbf{N}$, 还有

$$(\alpha+\beta)(i) \wedge (\alpha+\beta)(j)$$
$$=\left(\bigvee_{i_1+i_2=i}\{\alpha(i_1) \wedge \beta(i_2)\}\right) \wedge \left(\bigvee_{j_1+j_2=j}\{\alpha(j_1) \wedge \beta(j_2)\}\right)$$
$$=\bigvee_{i_1+i_2=i, j_1+j_2=j}\{\alpha(i_1) \wedge \alpha(j_1) \wedge \beta(i_2) \wedge \beta(j_2)\}$$
$$\leqslant \bigvee_{\substack{i_1+i_2=i, j_1+j_2=j \\ i_1 \leqslant k_1 \leqslant j_1, i_2 \leqslant k_2 \leqslant j_2, k_1+k_2=k}}\{\alpha(k_1) \wedge \beta(k_2)\}$$
$$\leqslant \bigvee_{k_1+k_2=k}\{\alpha(k_1) \wedge \beta(k_2)\}=(\alpha+\beta)(k)$$

即证 $\alpha+\beta$ 是凸的. 同理可证 $\alpha \cdot \beta$ 也是凸的. □

2.6.4 Fuzzy 基数

定义 2.6.4 (Zadeh, 1979) 设 $A \in \mathscr{F}\mathscr{F}(X)$, $fc(A)$ 称为 A 的 Fuzzy 基数, 其中

$$fc(A)(n)=\sup\{\alpha \,\|\, A_\alpha |=n\},\ n \in \mathbf{N} \tag{2.6.19}$$

例 2.6.9 设定义在论域 $X=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$ 上的 Fuzzy 集 A 为

$$A=\frac{0.1}{a}+\frac{0.3}{b}+\frac{0.6}{c}+\frac{0.6}{d}+\frac{0.9}{e}+\frac{0.7}{f}+\frac{1.0}{g}+\frac{0.2}{h}$$

则
$$fc(A)=\frac{1}{1}+\frac{0.9}{2}+\frac{0.7}{3}+\frac{0.6}{5}+\frac{0.3}{6}+\frac{0.2}{7}+\frac{0.1}{8}.$$
□

定义 2.6.5 (Zadeh, 1983) 设 $A \in \mathscr{F}\mathscr{F}(X)$, $fgc(A)$ 称为 A 的 Fuzzy 基数, 其中

$$fgc(A)(n)=\sup\{\alpha \,\|\, A_\alpha | \geqslant n\},\ n \in \mathbf{N} \tag{2.6.20}$$

例 2.6.10 设 A 为例 2.6.9 中的 Fuzzy 集, 则

$$fgc(A)=\frac{1}{1}+\frac{0.9}{2}+\frac{0.7}{3}+\frac{0.6}{4}+\frac{0.6}{5}+\frac{0.3}{6}+\frac{0.2}{7}+\frac{0.1}{8}.$$
□

定理 2.6.17 设 $A \in \mathscr{F}\mathscr{F}(X)$, 则 $fgc(A)$ 是 $\mathbf{N}$ 上的 Fuzzy 自然数.

证明 只需证明 $fgc(A)$ 是单调不增的. 设 $m \leqslant n$, $m,n \in \mathbf{N}$, 则

$$\{\alpha \,\|\, A_\alpha | \geqslant m\} \supseteq \{\alpha \,\|\, A_\alpha | \geqslant n\}.$$

于是 $fgc(A)(m)=\sup\{\alpha \,\|\, A_\alpha | \geqslant m\} \geqslant \sup\{\alpha \,\|\, A_\alpha | \geqslant n\}=fgc(A)(n)$.

□

§2.7　Fuzzy 数的表现定理

由 Fuzzy 数的定义知道，一个 Fuzzy 数的截集族是一个闭区间套，如果给定一个闭区间套，该闭区间套表示的 Fuzzy 集是 Fuzzy 数吗？下面的定理回答了这个问题.

定理 2.7.1　(Fuzzy 数的表现定理)设 $H:(0,1]\to I_{\mathbf{R}}$，$\alpha\mapsto H(\alpha)=[m_\alpha,n_\alpha]\neq\varnothing$. 满足

$$\alpha_1<\alpha_2\Rightarrow[m_{\alpha_1},n_{\alpha_1}]\supseteq[m_{\alpha_2},n_{\alpha_2}] \tag{2.7.1}$$

则 (1) $A=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\alpha H(\alpha)\in\tilde{\mathbf{R}}$;

(2) $A_\alpha=\bigcap_{n=1}^{\infty}H(\alpha_n)$, $(\alpha>0)$, $\left(\alpha_n=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\alpha\right)$;

(3) $A=([m_A,n_A],L_A,R_A)$.

其中

$$m_A=\lim_{n\to\infty}m_{\alpha_n},\ n_A=\lim_{n\to\infty}n_{\alpha_n},\ \left(\alpha_n=1-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$L_A(x)=\bigvee_{0<\alpha<1}\{\alpha\,|\,m_\alpha\leqslant x\},\ R_A(x)=\bigvee_{0<\alpha<1}\{\alpha\,|\,n_\alpha\geqslant x\}$$

证明　令 $H(0)=\mathbf{R}$，则 $\{H(\alpha)\,|\,\alpha\in[0,1]\}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的集合套，由表现定理 2.3.3 知 H 唯一确定了 Fuzzy 集

$$A=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\alpha H(\alpha)=\bigcup_{\alpha\in(0,1]}\alpha H(\alpha)\in\mathscr{F}(\mathbf{R})$$

且

$$A_\alpha=\bigcap_{\lambda<\alpha}H(\lambda)=\bigcap_{0<\lambda<\alpha}[m_\lambda,n_\lambda]\quad(\alpha>0).$$

(1)由于闭区间的交是闭区间，因而 A_α 仍是闭区间 $(\alpha\in(0,1])$，又 $A_1\supseteq H(1)\neq\varnothing$，所以 A 是 Fuzzy 集，即 $A\in\tilde{\mathbf{R}}$.

(2)

$$0<\alpha_n=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\alpha<\alpha\Rightarrow\bigcap_{\lambda<\alpha}H(\lambda)\subseteq\bigcap_{n=1}^{\infty}H(\alpha_n)$$

由定理 2.3.3(1)，得

$$A_\alpha=\bigcap_{\lambda<\alpha}H(\lambda)\subseteq\bigcap_{n=1}^{\infty}H(\alpha_n)$$

再由推论 2.3.1，得

$$H(\alpha_n)\subseteq A_{\alpha_n}$$

于是

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}H(\alpha_n)\subseteq\bigcap_{n=1}^{\infty}A_{\alpha_n}=A_{\bigvee_{n=1}^{\infty}\alpha_n}\ (\text{由定理 2.1.6(1)})$$

显然

$$A_{\bigvee_{n=1}^{\infty}\alpha_n}=A_\alpha$$

从而

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}H(\alpha_n)\subseteq A_\alpha$$

因此
$$A_\alpha=\bigcap_{n=1}^{\infty} H(\alpha_n)\ (\alpha>0).$$

(3)当 $\alpha=1$ 时，有 $\alpha_n=1-\frac{1}{n+1}$，这时

$$A_1=\bigcap_{n=1}^{+\infty} H(\alpha_n)=\bigcap_{n=1}^{+\infty}[m_{\alpha_n},n_{\alpha_n}]=[m_A,n_A]$$

当 $x<m_A$ 时

$$L_A(x)=A(x)=\bigvee_{\alpha\in[0,1]}(\alpha\wedge H(\alpha))(x)=\bigvee_{\alpha\in(0,1)}\{\alpha\mid x\in[m_\alpha,n_\alpha]\}$$
$$=\bigvee_{\alpha\in(0,1)}\{\alpha\mid m_\alpha\leqslant x\}.$$

当 $x>n_\alpha$ 时，同理推得

$$R_A(x)=\bigvee_{\alpha\in(0,1)}\{\alpha\mid n_\alpha\geqslant x\}.$$ □

定理 2.7.1 中的 H 称为 $\mathbf{R}$ 的闭区间套(nest of intervals). 下面是 Fuzzy 数表现定理的一个应用例子.

例 2.7.1　设 $A,B\in\tilde{\mathbf{R}}$，且

$$A(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0\\ x, & 0<x<1\\ 1, & x=1\\ 2-x, & 1<x<2\\ 0, & x\geqslant 2\end{cases},\quad B(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 2\\ x-2, & 2<x<3\\ 1, & x=3\\ 4-x, & 3<x<4\\ 0, & x\geqslant 4\end{cases}$$

则 $\forall\alpha\in(0,1]$

$$A_\alpha=[\alpha,2-\alpha],\quad B_\alpha=[2+\alpha,4-\alpha]$$

$(A\cdot B)_\alpha=A_\alpha\cdot B_\alpha=[2\alpha+\alpha^2,8-6\alpha+\alpha^2]$(由定理 2.6.9 与定理 2.5.2(3))

其图形如图 2.7.1 所示.

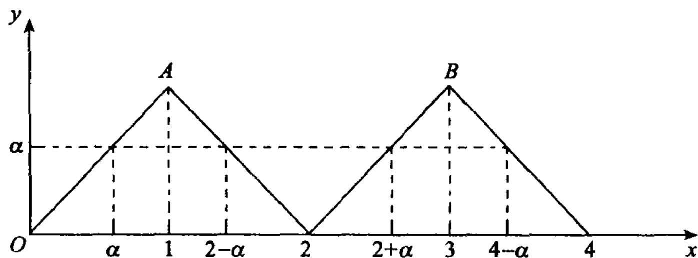


图 2.7.1　Fuzzy 数 A 与 B 的隶属曲线及截集

记 $A \cdot B = C$，则由 Fuzzy 数的表现定理得

$$m_{C_\alpha} = 2\alpha + \alpha^2, n_{C_\alpha} = 8 - 6\alpha + \alpha^2$$

$$m_C = \lim_{n\to\infty}\left(2\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^2\right) = 3$$

$$n_C = \lim_{n\to\infty}\left(8 - 6\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^2\right) = 3$$

$$L_C(x) = \bigvee_{0<\alpha<1}\{\alpha \mid 2\alpha + \alpha^2 \leqslant x\} = \bigvee_{0<\alpha<1}\{\alpha \mid \alpha \leqslant -1 + \sqrt{x+1}, 0 < x < 3\}$$

$$= \sqrt{x+1} - 1 \quad (0 < x < 3)$$

$$R_C(x) = \bigvee_{0<\alpha<1}\{\alpha \mid 8 - 6\alpha + \alpha^2 \geqslant x\} = \bigvee_{0<\alpha<1}\{\alpha \mid \alpha \leqslant 3 - \sqrt{x+1}, 3 < x < 8\}$$

$$= 3 - \sqrt{x+1} \quad (3 < x < 8)$$

$$A \cdot B = ([3], L_C, R_C)$$

$$(A \cdot B)(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ \sqrt{x+1} - 1, & 0 < x < 3 \\ 1, & x = 3 \\ 3 - \sqrt{x+1}, & 3 < x < 8 \\ 0, & x \geqslant 8 \end{cases}.$$

□

§2.8　Fuzzy 集的模扩张运算

设T是[0,1]上的算子，$\mathscr{F}([0,1])$是[0,1]上全体 Fuzzy 集.

定义 2.8.1　映射 $\widetilde{\top}: \mathscr{F}([0,1]) \times \mathscr{F}([0,1]) \to \mathscr{F}([0,1])$称为[0,1]上的算子T的扩张运算，其中

$$\widetilde{\top}(A,B)(x) = \bigvee_{x=\top(y,z)} (A(y) \wedge B(z)), \forall A, B \in \mathscr{F}([0,1]) \quad (2.8.1)$$

$\widetilde{\top}(A,B)$ 可以写成 $A \,\widetilde{\top}\, B$.

由定义直接得到下面的运算性质.

定理 2.8.1　设T和 ⊥ 是关于伪补 N 对偶的 t-模与 t-余模，则：

(1) $\widetilde{\top}$和 $\widetilde{\bot}$ 满足交换律和结合律；

(2) $A \,\widetilde{\top}\, X = A^R$, $A \,\widetilde{\bot}\, \varnothing = A^L$；

(3) $A \,\widetilde{\top}\, 1 = A$, $A \,\widetilde{\bot}\, 0 = A$；

(4) $A \,\widetilde{\top}(B \cup C) = A \,\widetilde{\top}\, B \cup A \,\widetilde{\top}\, C$, $A \,\widetilde{\bot}\,(B \cup C) = A \,\widetilde{\bot}\, B \cup A \,\widetilde{\bot}\, C$；

(5) $B \subseteq C \Rightarrow A \widetilde{\top} B \subseteq A \widetilde{\top} C$;

(6) $(A \widetilde{\top} B)^N = A^N \widetilde{\bot} B^N$.

其中 $A,B,C \in \mathscr{F}([0,1])$. A^N 是 A 的伪补(参见定义 1.3.7).

定理 2.8.2 设$\top$和 $\bot$ 是关于伪补 N 对偶的连续 t-模与连续 t-余模，则:

(1) $(A \widetilde{\top} B)^R = A^R \widetilde{\top} B^R$;

(2) $(A \widetilde{\top} B)^L = A^L \widetilde{\top} B^L$;

(3) $(A \widetilde{\bot} B)^R = A^R \widetilde{\bot} B^R$;

(4) $(A \widetilde{\bot} B)^L = A^L \widetilde{\bot} B^L$.

其中 $A,B \in \mathscr{F}([0,1])$. A^L 与 A^R 参见定义 2.4.5.

证明 (1) $(A \widetilde{\top} B)^R(x) = \bigvee_{w \geqslant x} \bigvee_{y \top z = w} (A(y) \wedge B(z)) = \bigvee_{y \top z \geqslant x} (A(y) \wedge B(z))$

$(A^R \widetilde{\top} B^R)(x) = \bigvee_{y \top z = x} (A^R(y) \wedge B^R(z)) = \bigvee_{y \top z = x} \left(\left(\bigvee_{u \geqslant y} A(u)\right) \wedge \left(\bigvee_{v \geqslant z} B(v)\right)\right)$

如果 $y \top z \geqslant x$，则由$\top$的连续性可知，存在 $y_1 \leqslant y, z_1 \leqslant z$ 使得 $x = y_1 \top z_1$. 于是

$$A(y) \wedge B(z) \leqslant \left(\bigvee_{u \geqslant y_1} A(u)\right) \wedge \left(\bigvee_{v \geqslant z_1} B(v)\right)$$

因此 $(A \widetilde{\top} B)^R \leqslant A^R \widetilde{\top} B^R$. 如果 $y \top z = x$, $u \geqslant y$, $v \geqslant z$，则 $u \top v \geqslant x$ 并且 $A(u) \wedge B(v) \leqslant (A \widetilde{\top} B)^R(x)$. 故 $(A \widetilde{\top} B)^R = A^R \widetilde{\top} B^R$.

(3)类似可证. (2)与(4)利用对偶性质证明. □

定理 2.8.3 设$\top$和 $\bot$ 是关于伪补 N 对偶的连续 t-模与连续 t-余模，则分配律

$$A \widetilde{\top} (B \widetilde{\vee} C) = (A \widetilde{\top} B) \widetilde{\vee} (A \widetilde{\top} C) \tag{2.8.2}$$

$$A \widetilde{\top} (B \widetilde{\wedge} C) = (A \widetilde{\top} B) \widetilde{\wedge} (A \widetilde{\top} C) \tag{2.8.3}$$

$$A \bot (B \widetilde{\vee} C) = (A \widetilde{\bot} B) \widetilde{\vee} (A \widetilde{\bot} C) \tag{2.8.4}$$

$$A \widetilde{\bot} (B \widetilde{\wedge} C) = (A \widetilde{\bot} B) \widetilde{\wedge} (A \widetilde{\bot} C) \tag{2.8.5}$$

对任意 $B,C \in \mathscr{F}([0,1])$成立当且仅当 $A \in \mathscr{F}([0,1])$是凸的.

证明 我们证明第一个等式对任意 $B,C \in \mathscr{F}([0,1])$成立当且仅当 $A \in \mathscr{F}([0,1])$是凸的. 其余由对偶性可以推出.

由定义很容易得到:

(I) $(A \widetilde{\top} (B \widetilde{\vee} C))(x) = \bigvee_{y \top (u \vee v) = x} (A(y) \wedge B(u) \wedge C(v))$

(II) $((A \tilde{\top} B) \tilde{\vee} (A \tilde{\top} C))(x) = \bigvee_{(p \top q) \vee (s \top t) = x} (A(p) \wedge B(q) \wedge A(s) \wedge C(t))$

很显然(I) $\leqslant$ (II).

如果 A 是凸的，令 $(p \top q) \vee (s \top t) = x$. 下面分两种情形证明(II) $\leqslant$ (I)

(1) $p \top q = s \top t = x$

令 $y = p \wedge s$，这时 $(y \top q) \vee (y \top t) = x$，并且 $A(y) = A(p)$ 或 $A(y) = A(s)$. 于是

$$A(y) \wedge B(q) \wedge C(t) \geqslant A(p) \wedge B(q) \wedge A(s) \wedge C(t)$$

(2) $p \top q < s \top t = x$ ($s \top t < p \top q = x$ 类似证明)

如果 $s \top q \leqslant x$，那么 $(s \top q) \vee (s \top t) = s \top t = x$

这时取 $y = s$，我们有 $A(y) \wedge B(q) \wedge C(t) \geqslant A(p) \wedge B(q) \wedge A(s) \wedge C(t)$

如果 $s \top q > x$，那么 $s \top q > s \top t$，由此可以推出 $q > t$. 于是有

$$p \top q < x < s \top q$$

所以存在 y 使得 $p < y < s$ 并且 $y \top q = x$. 进而 $t < q$ 可以推出 $y \top t \leqslant y \top q = x$ 使得

$$(y \top q) \vee (y \top t) = (y \top q) = x$$

因 A 是凸的，即 $A(y) \geqslant A(p) \wedge A(s)$，于是

$$A(y) \wedge B(q) \wedge C(t) \geqslant A(p) \wedge B(q) \wedge A(s) \wedge C(t)$$

由上面两种情形可以得到(II) $\leqslant$ (I). 故当 A 凸时(II) = (I).

假设 $A \tilde{\top} (B \tilde{\vee} C) = (A \tilde{\top} B) \tilde{\vee} (A \tilde{\top} C)$ 对任意 $B, C \in \mathscr{F}([0,1])$成立. 那么特别地

$$A \tilde{\top} (\chi_{[0,1]} \tilde{\vee} \chi_{\{1\}}) = (A \tilde{\top} \chi_{[0,1]}) \tilde{\vee} (A \tilde{\top} \chi_{\{1\}})$$

上式左边 $A \tilde{\top} (\chi_{[0,1]} \tilde{\vee} \chi_{[0,1]}) = A \tilde{\top} \chi_{\{1\}} = A$,

右边 $(A \tilde{\top} \chi_{[0,1]}) \tilde{\vee} (A \tilde{\top} \chi_{\{1\}}) = A \tilde{\vee} A^R = (A \cup A^R) \cap (A^L \cap A^{RL})$ (定理 2.4.13) $= A^R \cap A^L$.

由定理 2.6.4 知 A 是凸的. □

当 $A, B \in \mathscr{F}\mathscr{N}([0,1])$时，显然有 $\tilde{\top}(A, B) \in \mathscr{F}\mathscr{N}([0,1])$.

特别地，在 $I_{[0,1]}$ 上，我们有以下定理.

定理 2.8.4　设$\top$是[0,1]上的连续 t-模(t-余模)，则

$$[\underline{a}, \bar{a}] \tilde{\top} [\underline{b}, \bar{b}] = [\underline{a} \top \underline{b}, \bar{a} \top \bar{b}], \forall [\underline{a}, \bar{a}], [\underline{b}, \bar{b}] \in I_{[0,1]}. \quad (2.8.6)$$

证明　由$\top$在[0,1]上的单调性易知

$$[\underline{a}, \bar{a}] \tilde{\top} [\underline{b}, \bar{b}] = \{x \top y \mid x \in [\underline{a}, \bar{a}], y \in [\underline{b}, \bar{b}]\} \subseteq [\underline{a} \top \underline{b}, \bar{a} \top \bar{b}]$$

反之，若 $\underline{a}\top\underline{b}\leqslant z\leqslant\bar{a}\top\bar{b}$，由$\top$的连续性知，存在 x 和 y 使 $\underline{a}\leqslant x\leqslant\bar{a}$，$\underline{b}\leqslant y\leqslant\bar{b}$，且 $z=x\top y$，于是 $z\in[\underline{a},\bar{a}]\tilde{\top}[\underline{b},\bar{b}]$，则得证. □

为了简单起见 $[\underline{a},\bar{a}]\tilde{\top}[\underline{b},\bar{b}]$ 记为 $[\underline{a},\bar{a}]\top[\underline{b},\bar{b}]$.

特别地，我们还有：

(1) $[\underline{a},\bar{a}]\vee[\underline{b},\bar{b}]=[\underline{a}\vee\underline{b},\bar{a}\vee\bar{b}]$；

(2) $[\underline{a},\bar{a}]\wedge[\underline{b},\bar{b}]=[\underline{a}\wedge\underline{b},\bar{a}\wedge\bar{b}]$.

定义 2.8.2 设 $I,J\subseteq[0,1]$，如果 $\forall x_0\in I$，存在 $y_0\in J$ 使 $x_0\leqslant y_0$，则记为 $I\leqslant_{\vee}J$；如果 $\forall y_0\in J$，存在 $x_0\in I$ 使 $x_0\leqslant y_0$，则记为 $I\leqslant_{\wedge}J$.

定义 2.8.3 设 $A,B\in\mathscr{F}\mathscr{N}([0,1])$，称 A 弱于 B，记做 $A\lesssim B$. 如果 $\forall\alpha\in(0,1]$，有

$$A_{\bar{\alpha}}\leqslant_{\vee}B_{\bar{\alpha}},\quad A_{\bar{\alpha}}\leqslant_{\wedge}B_{\bar{\alpha}}.$$

定义 2.8.4 设 $\tilde{\top}_1$，$\tilde{\top}_2$ 是 t-模（或 t-余模）$\top$的扩张运算，若 $\forall A,B\in\mathscr{F}\mathscr{N}([0,1])$有

$$\tilde{\top}_1(A,B)\lesssim\tilde{\top}_2(A,B)$$

称 $\tilde{\top}_1$ 弱于 $\tilde{\top}_2$，记做 $\tilde{\top}_1\lesssim\tilde{\top}_2$.

定理 2.8.5 若 $\top_1\leqslant\top_2$，则 $\tilde{\top}_1\lesssim\tilde{\top}_2$.

证明 设 $A,B\in\mathscr{F}\mathscr{N}([0,1])$，若 $\tilde{\top}_1(A,B)(z)>\alpha$，则存在 x' 和 y'，使 $z=\top_1(x',y')$，且 $x'\in A_{\bar{\alpha}}$，$y'\in B_{\bar{\alpha}}$. 令 $z'=\top_2(x',y')$，则 $z'\geqslant z$，$\tilde{\top}_2(A,B)(z')>\alpha$.

即
$$\tilde{\top}_1(A,B)_{\bar{\alpha}}\leqslant_{\vee}\tilde{\top}_2(A,B)_{\bar{\alpha}}$$
同理可证
$$\tilde{\top}_1(A,B)_{\bar{\alpha}}\leqslant_{\wedge}\tilde{\top}_2(A,B)_{\bar{\alpha}}$$
从而
$$\tilde{\top}_1\lesssim\tilde{\top}_2.$$
□

推论 2.8.1 $\widetilde{\Delta}\lesssim\widetilde{\odot}\lesssim\tilde{\dot{\varepsilon}}\lesssim\tilde{\hat{\cdot}}\lesssim\tilde{\wedge}$，$\tilde{\vee}\lesssim\tilde{\hat{+}}\lesssim\tilde{\overset{+}{\varepsilon}}\lesssim\widetilde{\oplus}\lesssim\tilde{\nabla}$.

定理 2.8.6 $(\mathscr{F}\mathscr{N}([0,1]),\lesssim)$ 是预序集，即 $\lesssim$ 满足自反性与传递性.

证明 $A\lesssim A$ 显然. 若 $A\lesssim B$，$B\lesssim C$，则必有 $A\lesssim C$.

事实上，若 $x_0\in A_{\bar{\alpha}}$，必有 $y_0\in B_{\bar{\alpha}}$ 使 $x_0\leqslant y_0$. 同样，存在 $z_0\in C_{\bar{\alpha}}$ 使 $y_0\leqslant z_0$，于是

$$A_{\bar{\alpha}}\leqslant_{\vee}C_{\bar{\alpha}}$$

同理可证

$$A_{\bar{\alpha}}\leqslant_{\wedge}C_{\bar{\alpha}}$$

即 $A \lesssim C$. □

定理 2.8.7　设 $A,B \in \mathscr{F}\mathscr{N}([0,1])$,若 $A \tilde{\wedge} B = A$ $(A \tilde{\vee} B = B)$, 则

$$A \lesssim B.$$

证明　若 $A \tilde{\wedge} B = A$, 则

$$(A \tilde{\wedge} B)_{\bar{\alpha}} = A_{\bar{\alpha}} \quad (0 \leqslant \alpha < 1)$$

即
$$A_{\bar{\alpha}} = \left\{ z \,\middle|\, \bigvee_{z = x \wedge y} (A(x) \wedge B(y)) > \alpha \right\}$$

若 $z \in A_{\bar{\alpha}}$, 则存在 x 和 y, 使 $z = x \wedge y$, 且 $x \in A_{\bar{\alpha}}, y \in B_{\bar{\alpha}}$, 从而 $z \leqslant y$, 且 $y \in B_{\bar{\alpha}}$. 则证得

$$A_{\bar{\alpha}} \leqslant_{\vee} B_{\bar{\alpha}}$$

若 $y \in B_{\bar{\alpha}}$, 由于 $A_{\bar{\alpha}} \neq \varnothing$, 必有 $x \in A_{\bar{\alpha}}$. 令 $z = x \wedge y$, 则 $z \leqslant y$, 且 $z \in (A \tilde{\wedge} B)_{\bar{\alpha}}$, 从而 $z \in A_{\bar{\alpha}}$. 即

$$A_{\bar{\alpha}} \leqslant_{\wedge} B_{\bar{\alpha}}$$

则证得 $A \lesssim B$. □

定义 2.8.5　$A \in \mathscr{F}\mathscr{N}([0,1])$称为 Fuzzy 值(fuzzy value)或 Fuzzy 真数, 若 $\forall \alpha \in (0,1]$, A_α 是闭区间.

以 $\widetilde{[0,1]}$ 表示 Fuzzy 值的全体. 由定理 2.8.4 易得下面定理.

定理 2.8.8　若$\top$是连续的 t-模(t-余模),则 $\forall A,B \in \widetilde{[0,1]}$, $\top(A_\alpha, B_\alpha)$ $(\alpha \in (0,1])$ 是闭区间.

定理 2.8.9　若 $\top$ 是连续的 t-模(t-余模),则

$$A,B \in \widetilde{[0,1]} \Rightarrow \tilde{\top}(A,B) \in \widetilde{[0,1]}.$$

证明　令 $D = \tilde{\top}(A,B)$, 易证 $D_{\bar{\alpha}} \subseteq \top(A_\alpha, B_\alpha) \subseteq D_\alpha$, 则

$$D_\alpha = \bigcap_{\lambda < \alpha} \top(A_\lambda, B_\lambda)$$

由定理 2.8.8 即得证. □

定理 2.8.10　$\forall A,B \in \widetilde{[0,1]}$, 有

$$A \tilde{\wedge} B = A \ (A \tilde{\vee} B = B) \Leftrightarrow A \lesssim B \tag{2.8.7}$$

证明　由定理 2.8.7,只需证明 $A \lesssim B \Rightarrow A \tilde{\wedge} B = A$. 因而只需证明

$$A \lesssim B \Rightarrow (A \cap B)_{\bar{\alpha}} = A_{\bar{\alpha}} (0 \leqslant \alpha < 1).$$

设 $z \in A_{\bar{\alpha}}$, 则存在 $y \in B_{\bar{\alpha}}$, 且 $y \geqslant z$, 于是 $z = z \wedge y \in (A \tilde{\wedge} B)_{\bar{\alpha}}$, 即

$$A_{\bar{\alpha}} \subseteq (A \cap B)_{\bar{\alpha}}.$$

反之,若 $z \in (A \cap B)_{\bar{\alpha}}$,则存在 x 和 y 使 $z = x \wedge y$,且 $x \in A_{\bar{\alpha}}, y \in B_{\bar{\alpha}}$. 如果 $x=z$,则 $z \in A_{\bar{\alpha}}$. 如果 $y=z$,则存在 $x' \in A_{\bar{\alpha}}$,使 $x' \leqslant z$. 由 A 的凸性知,$[x',x] \subseteq A_{\bar{\alpha}}$,于是 $z \in [x',x] \subseteq A_{\bar{\alpha}}$. 从而 $(A \cap B)_{\bar{\alpha}} \subseteq A_{\bar{\alpha}}$,则得证. □

由定理 2.8.6 与定理 2.8.10 易得,$(\widetilde{[0,1]}, \precsim)$ 是偏序集.

定理 2.8.11 $\forall A,B \in \widetilde{[0,1]}$,有 $A \precsim B \Leftrightarrow A_\alpha \precsim B_\alpha (0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$.

证明 若 $A \precsim B$,则

$$(A \mathbin{\tilde{\wedge}} B)_\alpha = A_\alpha \wedge B_\alpha = A_\alpha$$

从而 $A_\alpha \precsim B_\alpha (0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$. 反之,易证 $(A \mathbin{\tilde{\wedge}} B)_\alpha = A_\alpha$,从而

$$A \mathbin{\tilde{\wedge}} B = A$$

于是 $A \precsim B$. □

记

$$A^{\neg}(x) = A(1-x)$$

注意 $A^{\neg}$ 不同于 A^c,$A^c(x) = 1 - A(x)$,$\forall x \in [0,1]$.

若 $A \in \widetilde{[0,1]}$,显然有 $A^{\neg} \in \widetilde{[0,1]}$,$\forall x \in [0,1]$.

下面的定理直接验证即得.

定理 2.8.12 $(\widetilde{[0,1]}, \tilde{\vee}, \tilde{\wedge}, \neg)$ 具有以下性质:

(1) $(\widetilde{[0,1]}, \tilde{\vee}, \tilde{\wedge}, \neg)$ 是分配格;

(2) $A \mathbin{\tilde{\wedge}} \varnothing = \varnothing, A \mathbin{\tilde{\wedge}} [0,1] = A$,

$A \mathbin{\tilde{\vee}} \varnothing = A, A \mathbin{\tilde{\vee}} [0,1] = [0,1]$;

(3) $(A^{\neg})^{\neg} = A$;

(4) $(A \mathbin{\tilde{\vee}} B)^{\neg} = A^{\neg} \mathbin{\tilde{\wedge}} B^{\neg}, (A \mathbin{\tilde{\wedge}} B)^{\neg} = A^{\neg} \mathbin{\tilde{\vee}} B^{\neg}$.

定理 2.8.13 设 $A,B \in \widetilde{[0,1]}$,$\ker A = [x_1, y_1]$,$\ker B = [x_2, y_2]$,$x_1 \leqslant y_2$,则

$$(A \mathbin{\tilde{\vee}} B)(z) = \begin{cases} A(z) \wedge B(z), & z \leqslant x_1 \\ B(z), & x_1 < z \leqslant y_2 \\ A(z) \vee B(z), & z > y_2 \end{cases} \tag{2.8.8}$$

$$(A \mathbin{\tilde{\wedge}} B)(z) = \begin{cases} A(z) \vee B(z), & z \leqslant x_1 \\ A(z), & x_1 < z \leqslant y_2 \\ A(z) \wedge B(z), & z > y_2 \end{cases} \tag{2.8.9}$$

下面研究 Fuzzy 值的无穷运算.

设 $A_n \in \widetilde{[0,1]}$ $(n \in \mathbf{N})$，令

$$[a_\alpha, b_\alpha] = \left[\bigvee_{n=1}^{\infty} a_{n_\alpha}, \bigvee_{n=1}^{\infty} b_{n_\alpha}\right] \tag{2.8.10}$$

$$[c_\alpha, d_\alpha] = \left[\bigwedge_{n=1}^{\infty} a_{n_\alpha}, \bigwedge_{n=1}^{\infty} b_{n_\alpha}\right] \tag{2.8.11}$$

其中
$$a_{n_\alpha} = \wedge (A_n)_{\bar{\alpha}}, b_{n_\alpha} = \vee (A_n)_{\bar{\alpha}}$$

令
$$A(x) = \vee \{\alpha \mid x \in [a_\alpha, b_\alpha]\}$$
$$B(x) = \vee \{\alpha \mid x \in [c_\alpha, d_\alpha]\}$$

记
$$A = \widetilde{\bigcup_{n \in \mathbf{N}}} A_n, \quad B = \widetilde{\bigcap_{n \in \mathbf{N}}} A_n.$$

定理 2.8.14　若 $A_n \in \widetilde{[0,1]}$ $(n \in \mathbf{N})$，则 $\widetilde{\bigcup_{n \in \mathbf{N}}} A_n, \widetilde{\bigcap_{n \in \mathbf{N}}} A_n \in \widetilde{[0,1]}$.

证明　设 $x_n \in [0,1]$，使 $A_n(x_n) = 1$，令 $x_0 = \vee \{x_n\}$，$y_0 = \wedge \{x_n\}$，则

$$A(x_0) = 1, B(y_0) = 1$$

又
$$A_\alpha = \bigcap_{\lambda < \alpha} [a_\lambda, b_\lambda], B_\alpha = \bigcap_{\lambda < \alpha} [c_\lambda, d_\lambda]$$

则得证. □

定理 2.8.15　若 $A_n \in \widetilde{[0,1]}$ $(n \in \mathbf{N})$，则：

(1) $\widetilde{\bigcap_{n \in \mathbf{N}}} A_n \lesssim A_n \lesssim \widetilde{\bigcup_{n \in \mathbf{N}}} A_n$；

(2) $\left(\widetilde{\bigcup_{n \in \mathbf{N}}} A_n\right)^{\neg} = \widetilde{\bigcap_{n \in \mathbf{N}}} A^{\neg}{}_n$；

(3) $\left(\widetilde{\bigcap_{n \in \mathbf{N}}} A_n\right)^{\neg} = \widetilde{\bigcup_{n \in \mathbf{N}}} A^{\neg}{}_n$.

证明　直接验证即得. □

§ 2.9　分布数的扩张运算

扩张运算对于研究概率度量空间是非常方便的.

定义 2.9.1　映射 $F: \mathbf{R} \to [0,1]$ 称为分布数(distribution number)，若

(1) F 是单调不减的；

(2) F 是左连续的；

(3) $F(-\infty) = 0$，$F(+\infty) = 1$.

若分布数满足 $F(0) = 0$，称为正分布数(positive distribution number).

若 F 为正分布数，则当 $x \leqslant 0$ 时 $F(x) = 0$. 因此，将正分布数均视为

$[0,\infty) \to [0,1]$ 的映射.

记 $\mathscr{D}$ 为全体分布数，$\mathscr{D}^+$ 为全体正分布数，显然 $\mathscr{D}^+ \subseteq \mathscr{D} \subseteq \mathscr{F}(\mathbf{R})$. 易见

$$F_0(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0\\ 1, & x>0\end{cases}$$

是正分布数. 若 $F,G\in\mathscr{D}^+$，$F\leqslant G$ 意味着 $G(x)\leqslant F(x)$ $(x\geqslant 0)$. 显然，$(\mathscr{D}^+,\leqslant)$是偏序集，且 F_0 是 $\mathscr{D}^+$ 中最小元素.

设 $\top$ 是连续的 t-模，$F,G\in\mathscr{D}$，记

$$(F+G)^{\top}(z)=\bigvee_{z=x+y}\top(F(x),G(y)) \tag{2.9.1}$$

特别地，当 $\top=\wedge$ 时，记

$$(F+G)(z)=\bigvee_{z=x+y}(F(x)\wedge G(y)) \tag{2.9.2}$$

定理 2.9.1 设 $F,G\in\mathscr{D}\,(\mathscr{D}^+)$，则 $(F+G)^{\top}\in\mathscr{D}\,(\mathscr{D}^+)$.

证明 若 $z_1<z_2$，且 $z_1=x+y$，则必存在 x' 和 y'，使得 $x\leqslant x'$，$y\leqslant y'$，且 $z_2=x'+y'$，于是

$$\top(F(x),G(y))\leqslant\top(F(x'),G(y'))$$

从而 $\forall z_1=x+y$ 有

$$\top(F(x),G(y))\leqslant(F+G)^{\top}(z_2)$$

则证得

$$(F+G)^{\top}(z_1)\leqslant(F+G)^{\top}(z_2).$$

设 $z_n\nearrow z_0$. $\forall\varepsilon>0$，存在 x_0 和 y_0，使 $z_0=x_0+y_0$，且

$$\top(F(x_0),G(y_0))\geqslant(F+G)^{\top}(z_0)-\frac{\varepsilon}{2}$$

由于 $\top$ 是连续的，则存在 $\delta>0$，使

$$\top(F(x_0)-\delta,G(y_0)-\delta)\geqslant\top(F(x_0),G(y_0))-\frac{\varepsilon}{2}$$

不妨设 $x_n\nearrow x_0,y_n\nearrow y_0$ 且 $z_n=x_n+y_n\,(n\geqslant 1)$，则存在 N，当 $n\geqslant N$ 时有 $F(x_n)\geqslant F(x_0)-\delta$，$G(y_n)\geqslant G(y_0)-\delta$，于是当 $n\geqslant N$ 时

$$\begin{aligned}(F+G)^{\top}(z_n)&\geqslant\top(F(x_n),G(y_n))\geqslant\top(F(x_0)-\delta,G(y_0)-\delta)\\ &\geqslant\top(F(x),G(y))-\frac{\varepsilon}{2}\geqslant(F+G)^{\top}(z_0)-\varepsilon\end{aligned}$$

则 $F+G$ 是左连续的.

由于 $\top$ 是连续的，$\forall\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使

$$\top(1-\delta,1-\delta)\geqslant 1-\varepsilon$$

同时存在 x_0 和 y_0，使 $F(x_0)\geqslant 1-\delta$，$G(y_0)\geqslant 1-\delta$，于是当 $z\geqslant x_0+y_0$ 时，有

$$(F+G)^{\top}(z) \geqslant \top(F(x_0), G(y_0)) \geqslant 1-\varepsilon$$

则证得 $(F+G)^{\top}(+\infty)=1$. 类似可证 $(F+G)^{\top}(-\infty)=0$.

若 $F+G \in \mathscr{D}^{+}$,易证 $(F+G)^{\top}(0)=0$,则 $(F+G)^{\top} \in \mathscr{D}^{+}$. □

对于 Fuzzy 集的分解定理、表现定理以及映射的扩张原理的进一步研究主要集中在不同角度的推广上,如考虑 Fuzzy 集的推广:2 型 Fuzzy 集分解定理、表现定理与扩张原理(王晓波,1983; Mendel, 2007)、L 型 Fuzzy 集的分解定理、表现定理与扩张原理(张文修,1984)等. Fuzzy 数是一种特殊的 Fuzzy 集,Fuzzy 数在最优化理论(Carlsson, Fullèr, 2003; Maeda, 2001; Rommelfanger, Hanscheck, et al., 1989; Sakawa, Kato, 1998; Wang, Wang, 1997; Zhang, et al., 2003)、Fuzzy 控制(Gao, 1999; Irion, 1998; Zhou, Ruan, 2002)、决策(Chen, Lu, 2001, 2002; Lee, 2002; Modarres, Sadi-Nezhad, 2001; Yao, Yao, 2001)以及神经技术(Patyra, Kwon, 1995; Requena, Blanco, et al., 1995)等领域有着十分广阔的应用前景. Fuzzy 数四则运算以及基于一般 Fuzzy 算子来扩展 Fuzzy 数的各种运算的研究已逐步形成了模糊理论的一个新的分支(Chen, Kawase, 1999; Dubois, Prade, 1980; Special Issue, Fuzzy Sets and System 1997). Fuzzy 数的运算与序关系离不开区间数的运算与序关系. 对此,有许多学者进行了这方面的研究(Chanas, Kuchta, 1996a, 1996b; Das, et al., 1999; Hu, Wang, 2006a,b; Hu, Xia, 1995; Hu, Zhang, 1995; Ishibuchi, Tanaka, 1990; Kundu, 1995; Sengupta, Pal, 2000 ; Xia, Hu, 1995,1997).

第3章 Fuzzy关系、Fuzzy矩阵与Fuzzy图

在自然界中，事物之间存在着一定的关系. 有些关系是非常明确的，如“父子关系”、数学上的“线性函数关系”、$\in$ 、$\subseteq$ 、$=$ 、$\geqslant$ 、$<$ ，等等. 但有些关系的界限是不明确的，如“相像关系”、“朋友关系”、“信任关系”与“两数几乎相等”等. 经典关系是直积上的子集，自然地，界限不明确的关系可以用直积上的 Fuzzy 集来加以描述. 本章首先介绍 Fuzzy 关系的定义以及与 Fuzzy 集对应的性质. 然后讨论 Fuzzy 关系的各种复合关系、有限论域上的 Fuzzy 关系——Fuzzy 矩阵、Fuzzy 关系的自反性、对称性与传递性、Fuzzy 等价关系与 Fuzzy 相似关系、Fuzzy 偏序关系以及 Fuzzy 关系在区间值与格值上的推广. 最后讨论有限论域上一种特殊的 Fuzzy 关系——Fuzzy 图. 这些内容对后面我们即将讨论的Fuzzy 聚类分析、Fuzzy 模式识别、Fuzzy 综合评判与 Fuzzy 关系方程及其广义逆等都是非常重要的.

§3.1 Fuzzy 关系的定义与性质

定义 3.1.1 设 X,Y 是两个论域，那么 X 到 Y（或在 X 与 Y 之间）的 Fuzzy 关系(fuzzy relation) R 是一个直积 $X\times Y=\{(x,y)\mid x\in X,\ y\in Y\}$ 上的 Fuzzy 集，即 $R\in\mathscr{F}(X\times Y)$

$$R:X\times Y\to[0,1] \tag{3.1.1}$$

$R(x,y)$ 表示 x 与 y 具有 R 关系的程度. 特别地当 $X=Y$ 时，R 称为 X 上的 Fuzzy 关系.

对于 $x\in X,\ y\in Y$，$R(x,y)$ 刻画了 x 对于 y 的相关程度. 如果将 R 限制为 $X\times Y$ 上的经典集，则此时 R 即变为普通的关系，所以 Fuzzy 关系是经典关系的推广. 既然 Fuzzy 关系是 Fuzzy 集，那么 Fuzzy 集的记号对 Fuzzy 关系也是适用的.

例 3.1.1 设 $X=\{x_1,x_2,x_3\}$ 表示父辈的三个人 x_1,x_2,x_3 的集合，而 $Y=\{y_1,y_2,y_3,y_4\}$ 为他们子辈的集合，“相像关系” $R\in\mathscr{F}(X\times Y)$ 是一 Fuzzy 关系，而且

$$R=\frac{0.6}{(x_1,y_1)}+\frac{0.3}{(x_1,y_2)}+\frac{0.3}{(x_2,y_1)}+\frac{0.8}{(x_2,y_2)}+\frac{0.7}{(x_3,y_3)}+\frac{0.2}{(x_3,y_4)}$$

$r_{ij}=R(x_i,\ y_j)(i=1,\ 2,\ 3,\ j=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ 表示 x_i 对 y_j 的"相像程度",没有写出的项表示相像程度为 0,即基本不相像.

例 3.1.2　设 $\mathbf{R}$ 是实数集,对于 $x,y\in\mathbf{R}$,关系" x 远大于 y"是 $\mathbf{R}$ 上的一个 Fuzzy 关系,记为 $x\gg y$ 或 $y\ll x$,其隶属函数是

$$R(x,y)=\begin{cases}0, & x\leqslant y\\ \left[1+\dfrac{100}{(x-y)^2}\right]^{-1}, & x>y\end{cases}$$

当 $x=1000,y=100$ 时,$R(x,y)=0.999\ 9$;

当 $x=20,y=10$ 时,$R(x,y)=0.5$;

当 $x=20,y=18$ 时,$R(x,y)=0.0385$.

更一般地,x 远大于 $x-10$ 的程度为 $R(x,x-10)=0.5$,而 x 远大于 $x-100$ 的程度为 $R(x,x-100)=(1+0.01)^{-1}=0.99$.　□

例 3.1.3　设 $\mathbf{R}$ 是实数集. 如果 $\approx$ 表示" x 与 y 几乎相等",则 $\approx$ 是 $\mathbf{R}$ 上的一个 Fuzzy 关系,其隶属函数是

$$\approx=\int_{\mathbf{R}\times\mathbf{R}}\mathrm{e}^{-a|x-y|}/(x,y),a>0$$　□

作为 Fuzzy 关系的推广,$X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ 上的 n 元 Fuzzy 关系 R 是

$$\int_{X_1\times X_2\times\cdots\times X_n}R(x_1,x_2,\cdots,x_n)/(x_1,x_2,\cdots,x_n),\ x_i\in X_i$$

其中 $R:X_1\times X_2\times\cdots\times X_n\to[0,1]$.

当 $n=1$ 时,R 是一个一元 Fuzzy 关系,即 X_1 上的 Fuzzy 集. 当 $n=2$ 时,R 是一个二元 Fuzzy 关系,即 $X_1\times X_2$ 上的 Fuzzy 集,是我们主要讨论的 Fuzzy 关系.

下面是一些主要的基本 Fuzzy 关系,对任意的 $x,y\in X$:

恒等关系 I

$$I(x,y)=\begin{cases}1, & x=y\\ 0, & x\neq y\end{cases}\tag{3.1.2}$$

零关系 O

$$O(x,y)=0\tag{3.1.3}$$

全关系 E

$$E(x,y)=1\tag{3.1.4}$$

由定义易知,Fuzzy 关系实质上是一种 Fuzzy 集,所以有关 Fuzzy 集合的一切运算与性质对其都是成立的. 下面给出 Fuzzy 关系的各种运算.

定义 3.1.2 设 $R,S,R_t(t\in T)\in\mathscr{F}(X\times Y)$，则称 $R\cup S,R\cap S$ 分别为 Fuzzy 关系 R 与 S 的并与交；而称 $\bigcup_{t\in T}R_t$ 、$\bigcap_{t\in T}R_t$ 分别为 Fuzzy 关系族 $\{R_t|t\in T\}$ 的并与交. 其中

$$(R\cup S)(x,y)=R(x,y)\vee S(x,y) \tag{3.1.5}$$

$$(R\cap S)(x,y)=R(x,y)\wedge S(x,y) \tag{3.1.6}$$

$$\left(\bigcup_{t\in T}R_t\right)(x,y)=\bigvee_{t\in T}R(x,y),\ \left(\bigcap_{t\in T}R_t\right)(x,y)=\bigwedge_{t\in T}R(x,y) \tag{3.1.7}$$

若又设 $R^c\in\mathscr{F}(X\times Y)$，$R^{-1}\in\mathscr{F}(X\times Y)$，使得

$$\forall x\in X,y\in Y,R^c(x,y)=1-R(x,y),R^{-1}(y,x)=R(x,y)$$

则称 R^c 为 R 的补(complement relation)，R^{-1} 为 R 的逆(inverse relation).

对 Fuzzy 关系的补和逆，有下列运算性质.

定理 3.1.1 设 $R,S,R_t(t\in T)\in\mathscr{F}(X\times Y)$，则有：

(1) $R\subseteq S\Rightarrow R^{-1}\subseteq S^{-1},S^c\subseteq R^c$；

(2) $(R^{-1})^{-1}=R$，$(R^{-1})^c=(R^c)^{-1}$；

(3) $\left(\bigcup_{t\in T}R_t\right)^{-1}=\bigcup_{t\in T}R_t^{-1}$，$\left(\bigcap_{t\in T}R_t\right)^{-1}=\bigcap_{t\in T}R_t^{-1}$.

证明 只证(2)、(3)，其余证明类似.

(2)任取 $(y,x)\in Y\times X$，由定义易知

$$(R^{-1})^c(y,x)=1-(R^{-1})(y,x)=1-R(x,y)=(R^c)(x,y)=(R^c)^{-1}(y,x)$$

故 $(R^{-1})^c=(R^c)^{-1}$. 同理有 $(R^{-1})^{-1}=R$.

(3) 任取 $(y,x)\in Y\times X$，则有

$$\left(\bigcup_{t\in T}R_t\right)^{-1}(y,x)=\left(\bigcup_{t\in T}R_t\right)(x,y)=\bigvee_{t\in T}R_t(x,y)=\bigvee_{t\in T}R_t^{-1}(y,x)=\bigcup_{t\in T}R_t^{-1}(y,x)$$

从而，$\left(\bigcup_{t\in T}R_t\right)^{-1}=\bigcup_{t\in T}R_t^{-1}$. 同理可证(3)的另一式. □

对 $\alpha\in[0,1]$，若 $R\in\mathscr{F}(X\times Y)$，则截集(对应地，强截集)

$$R_\alpha=\{(x,y)\in X\times Y|R(x,y)\geqslant\alpha\}\subseteq X\times Y \tag{3.1.8}$$

$$(R_{\bar{\alpha}}=\{(x,y)\in X\times Y|R(x,y)>\alpha\}\subseteq X\times Y) \tag{3.1.9}$$

为 X 到 Y 的关系，称 R_α ($R_{\bar{\alpha}}$)为 α-截关系(α-强截关系). 对于 $(x,y)\in R_\alpha$，我们说在水平 α 下 x 对 y 有关系 R. 截关系具有下列性质.

定理 3.1.2 设 $R\in\mathscr{F}(X\times Y)$，则

$$(R^{-1})_\alpha=(R_\alpha)^{-1} \tag{3.1.10}$$

$$(R^{-1})_{\bar{\alpha}}=(R_{\bar{\alpha}})^{-1}. \tag{3.1.11}$$

由于 Fuzzy 关系是 Fuzzy 集，所以截关系也有类似定理 2.1.1 ～ 定理2.1.6 的性质.

定理 3.1.3　设 $Q,R \in \mathscr{F}(X \times Y)$，$\alpha,\beta \in [0,1]$，则：

(1) $\alpha < \beta \Rightarrow R_{\bar{\beta}} \subseteq R_{\beta} \subseteq R_{\bar{\alpha}} \subseteq R_{\alpha}$；

(2) $Q \subseteq R \Leftrightarrow \forall \alpha \in [0,1], Q_{\alpha} \subseteq R_{\alpha}$；

(3) $Q \subseteq R \Leftrightarrow \forall \alpha \in [0,1], Q_{\bar{\alpha}} \subseteq R_{\bar{\alpha}}$.

定理 3.1.4　设 $Q,R \in \mathscr{F}(X \times Y)$，则：

(1) $(Q \cup R)_{\alpha} = Q_{\alpha} \cup R_{\alpha}$，$(Q \cap R)_{\alpha} = Q_{\alpha} \cap R_{\alpha}$；

(2) $(Q \cup R)_{\bar{\alpha}} = Q_{\bar{\alpha}} \cup R_{\bar{\alpha}}$，$(Q \cap R)_{\bar{\alpha}} = Q_{\bar{\alpha}} \cap R_{\bar{\alpha}}$.

对于 $\mathscr{F}(X \times Y)$ 中的有限个 Fuzzy 关系，这个结论仍然成立，即

$$\left(\bigcup_{t=1}^{n} R_t\right)_{\alpha} = \bigcup_{t=1}^{n} (R_t)_{\alpha} \tag{3.1.12}$$

$$\left(\bigcap_{t=1}^{n} R_t\right)_{\alpha} = \bigcap_{t=1}^{n} (R_t)_{\alpha} \tag{3.1.13}$$

$$\left(\bigcup_{t=1}^{n} R_t\right)_{\bar{\alpha}} = \bigcup_{t=1}^{n} (R_t)_{\bar{\alpha}} \tag{3.1.14}$$

$$\left(\bigcap_{t=1}^{n} R_t\right)_{\bar{\alpha}} = \bigcap_{t=1}^{n} (R_t)_{\bar{\alpha}} \tag{3.1.15}$$

但是，对于无限个 Fuzzy 关系的并，等号未必成立. 一般有如下性质.

定理 3.1.5　设 $\{R_t \mid t \in T\} \subseteq \mathscr{F}(X \times Y)$，则：

(1) $\bigcup_{t \in T} (R_t)_{\alpha} \subseteq \left(\bigcup_{t \in T} R_t\right)_{\alpha}$，$\bigcap_{t \in T} (R_t)_{\alpha} = \left(\bigcap_{t \in T} R_t\right)_{\alpha}$；

(2) $\left(\bigcup_{t \in T} R_t\right)_{\bar{\alpha}} = \bigcup_{t \in T} (R_t)_{\bar{\alpha}}$，$\left(\bigcap_{t \in T} R_t\right)_{\bar{\alpha}} \subseteq \bigcap_{t \in T} (R_t)_{\bar{\alpha}}$.

定理 3.1.6　设 $\forall t \in T, \alpha_t \in [0,1]$，$\alpha \in [0,1]$，$R \in \mathscr{F}(X \times Y)$，则：

(1) $R_{\left(\bigvee_{t \in T} \alpha_t\right)} = \bigcap_{t \in T} R_{\alpha_t}$，$R_{\overline{\bigwedge_{t \in T} \alpha_t}} = \bigcup_{t \in T} R_{\bar{\alpha}_t}$；

(2) $(R^c)_{\alpha} = (R_{\overline{1-\alpha}})^c$，$(R^c)_{\bar{\alpha}} = (R_{1-\alpha})^c$；

(3) $R_{\alpha} = \bigcap_{\lambda < \alpha} R_{\bar{\lambda}}$，$R_{\bar{\alpha}} = \bigcup_{\lambda > \alpha} R_{\lambda}$.

§ 3.2　Fuzzy 矩阵的概念

假设 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$ 与 $Y = \{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ 为有限集，则 $X \times Y$ 上的 Fuzzy 关系 R 可以用一个 $m \times n$ 矩阵表示

$$R=\begin{bmatrix} R(x_1,y_1) & R(x_1,y_2) & \cdots & R(x_1,y_n) \\ R(x_2,y_1) & R(x_2,y_2) & \cdots & R(x_2,y_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ R(x_m,y_1) & R(x_m,y_2) & \cdots & R(x_m,y_n) \end{bmatrix} \tag{3.2.1}$$

这种表示 Fuzzy 关系的矩阵称为 Fuzzy 矩阵(Fuzzy matrix),简记为 $R=[r_{ij}]_{m\times n}$,其中 $r_{ij}=R(x_i,y_j)$. 因为 R 在$[0,1]$上取值,Fuzzy 矩阵的元素 $r_{ij}\in[0,1]$. 若 $r_{ij}\in\{0,1\}$,则称 R 为布尔矩阵(Boolean matrix). 用 $[0,1]^{m\times n}$ 表示全体 $m\times n$Fuzzy 矩阵,用 $\{0,1\}^{m\times n}$ 表示全体 $m\times n$ 布尔矩阵. Fuzzy 矩阵(Fuzzy 向量)的"$\subseteq$"与"$\supseteq$"关系以后分别用"$\leqslant$"与"$\geqslant$"表示.

例 3.2.1 医学上用

$$体重(kg)=身高(cm)-100$$

表示人的标准体重,这实际上给出了身高(X)和体重(Y)的二元关系. 令 $X=\{140,150,160,170,180\}$,$Y=\{40,50,60,70,80\}$,则上述等式可以得到一个布尔关系 R,用布尔矩阵表示为

$$R=\begin{array}{c} \\ 140 \\ 150 \\ 160 \\ 170 \\ 180 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 40 & 50 & 60 & 70 & 80 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

人有胖瘦不同,对于"非标准"的情况,应该描述其接近标准的程度. 这样,下面 Fuzzy 矩阵所表示的 Fuzzy 关系显然更全面地给出了身高与标准体重的关系.

$$R=\begin{array}{c} \\ 140 \\ 150 \\ 160 \\ 170 \\ 180 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 40 & 50 & 60 & 70 & 80 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0.8 & 0.2 & 0.1 & 0 \\ 0.8 & 1 & 0.8 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 & 1 & 0.8 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.8 & 1 & 0.8 \\ 0 & 0.1 & 0.2 & 0.8 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

例 3.2.2 二人博弈. 设 $X=\{$石头,剪刀,布$\}$,"胜"定为 1,"平局"定为 0.5,"负"定为 0. 则甲、乙二人"胜负关系" R 可以用矩阵表示

$$R=\begin{array}{c} \\ 石头 \\ 剪刀 \\ 布 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 石头 & 剪刀 & 布 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1 \\ 1 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \end{array}$$

例 3.2.3 设 $X=\{$张三,李四,王五$\}$, $Y=\{$英语,俄语,日语,法语$\}$,则"掌握"的 Fuzzy 关系 R 可以用矩阵表示

$$R=\begin{array}{c} \\ \text{张三} \\ \text{李四} \\ \text{王五} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc}\text{英语} & \text{俄语} & \text{日语} & \text{法语}\end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.85 & 0.75 & 0.70 & 0 \\ 0.90 & 0 & 0 & 0 \\ 0.70 & 0 & 0 & 0.80 \end{bmatrix}\end{array}$$

例 3.2.4 (Klir & Folger, 1988)设 $X=\{$纽约(N),巴黎$(P)\}$, $Y=\{$北京(B),纽约(N),伦敦$(L)\}$,则"很远"的 Fuzzy 关系 R 可以用矩阵表示

$$R=\begin{array}{c} \\ N \\ P \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B & N & L \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.6 \\ 0.9 & 0.7 & 0.3 \end{bmatrix}\end{array}$$ □

为了用图形表示 Fuzzy 关系 R, 对于 $R(x_i,y_j)$, 我们作点 x_i 与 y_j, 在 x_i 到 y_j 的弧上加上程度 $R(x_i,y_j)$. 这种图称为 Fuzzy 关系图(Fuzzy relation graph).

例 3.2.5 设 $X=\{a,b,c\}$ 表示三个人的集合,

$$R=\text{"信任关系"}=\frac{1}{(a,a)}+\frac{0.9}{(b,a)}+\frac{0.9}{(c,a)}+\frac{1}{(b,b)}+\frac{0.8}{(c,b)}+\frac{0.5}{(c,c)}$$

则 R 的 Fuzzy 矩阵与 Fuzzy 关系如图 3.2.1 所示.

$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.9 & 1 & 0 \\ 0.9 & 0.8 & 0.5 \end{bmatrix}\end{array}$$

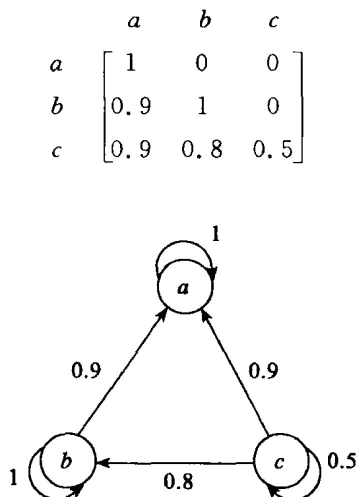


图 3.2.1 "信任关系"的 Fuzzy 矩阵与 Fuzzy 图

很显然 Fuzzy 矩阵是有限论域上 Fuzzy 关系的一种表示,所以 Fuzzy 关系的运算与性质对 Fuzzy 矩阵也成立. 特别地, $R=(r_{ij})_{m\times n}$ 的截关系 $R_\alpha=(r_{ij}(\alpha))_{m\times n}$ 称为 α-截矩阵(α-cut matrix),其中

$$r_{ij}(\alpha)=\begin{cases}1, & r_{ij}\geqslant \alpha\\ 0, & r_{ij}<\alpha\end{cases}, \alpha\in[0,1]$$

同理有强截矩阵. R 的逆 R^{-1} 实质上就是 R 的转置矩阵,故今后有时也将 R^{-1} 写成 R'.

§3.3 Fuzzy 关系的投影与截影

下面来讨论 Fuzzy 关系的投影与截影以及它们的性质.

定义 3.3.1 设 $R\in\mathscr{F}(X\times Y)$,分别定义 Fuzzy 集 $R_X\in\mathscr{F}(X)$, $R_Y\in\mathscr{F}(Y)$,其隶属函数为

$$R_X(x)=\bigvee_{y\in Y}R(x,y),\ \forall x\in X \tag{3.3.1}$$

$$R_Y(y)=\bigvee_{x\in X}R(x,y),\ \forall y\in Y \tag{3.3.2}$$

则分别称 R_X, R_Y 为 R 在 X, Y 中的投影(projection). 如图 3.3.1 所示. 又对给定的 $x_0\in X$, $y_0\in Y$, 分别定义 Fuzzy 集 $R|_{x_0}\in\mathscr{F}(Y)$, $R|_{y_0}\in\mathscr{F}(X)$,其隶属函数为

$$R|_{y_0}(x)=R(x,y_0),\ \forall x\in X \tag{3.3.3}$$

$$R|_{x_0}(y)=R(x_0,y),\ \forall y\in Y \tag{3.3.4}$$

则分别称 $R|_{y_0}$, $R|_{x_0}$ 为 R 在 y_0, x_0 处的截影(R-foreset, R-afterset).

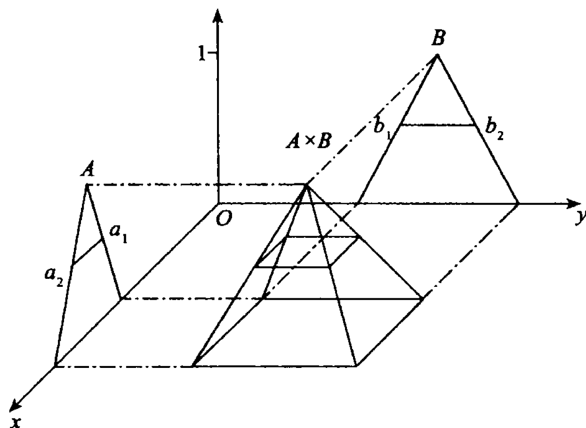


图 3.3.1 Fuzzy 关系的投影示意图

例 3.3.1 (Klir & Folger, 1988)某人要在四份工作中找一份适合自己的

工作，四份工作构成论域 $X=\{\text{Job1}, \text{Job2}, \text{Job3}, \text{Job4}\}$，选择时考虑三个因素：工作兴趣、上班地点和薪金，构成论域 $Y=\{\text{Interest}, \text{Drive}, \text{Salary}\}$. 它们之间的关系为

$$R=\begin{array}{c} \\ \text{Job1} \\ \text{Job2} \\ \text{Job3} \\ \text{Job4} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc}\text{Interest} & \text{Drive} & \text{Salary}\end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.4 & 0.1 & 0.875 \\ 0.6 & 0.9 & 0.7 \\ 0.8 & 0.7 & 0.5 \\ 0.6 & 1 & 0.2 \end{bmatrix}\end{array}$$

下面求出投影，并给出投影含义.

$R_X(\text{Job1})=0.4 \vee 0.1 \vee 0.875=0.875$，第 1 份工作最吸引的是薪金（吸引程度 0.875）；

$R_X(\text{Job2})=0.6 \vee 0.9 \vee 0.7=0.9$，第 2 份工作最吸引的是上班方便（吸引程度 0.9）；

$R_X(\text{Job3})=0.8 \vee 0.7 \vee 0.5=0.8$，第 3 份工作最吸引的是该工作的兴趣（吸引程度 0.8）；

$R_X(\text{Job4})=0.6 \vee 1 \vee 0.2=1$，第 4 份工作最吸引的是上班方便（满意程度百分之一百）；

$R_Y(\text{Interest})=0.4 \vee 0.6 \vee 0.8 \vee 0.6=0.8$，最感兴趣的工作是第 3 份工作（兴趣程度 0.8）；

$R_Y(\text{Drive})=0.1 \vee 0.9 \vee 0.7 \vee 1=1$，上班最方便的工作是第 4 份工作（方便程度 1）；

$R_Y(\text{Salary})=0.875 \vee 0.7 \vee 0.5 \vee 0.2=0.875$，薪金最高的工作是第 1 份工作（高的程度 0.8）.

截影是一些 Fuzzy 集，如

$$R|_{\text{Job1}}=\frac{0.4}{\text{Interest}}+\frac{0.1}{\text{Drive}}+\frac{0.875}{\text{Salary}}，对第 1 份工作的评价$$

$$R|_{\text{Salary}}=\frac{0.875}{\text{Job1}}+\frac{0.7}{\text{Job2}}+\frac{0.5}{\text{Job3}}+\frac{0.2}{\text{Job4}}，对薪金的评价.$$ □

下面给出一连续型的 Fuzzy 关系.

例 3.3.2 设 $R\in\mathscr{F}(\mathbf{R}\times\mathbf{R})$，且

$$R(x,y)=\frac{1}{1+4(x-y)^2},\quad x,y\in\mathbf{R}$$

则
$$R|_{x=1}(y)=R(1,y)=\frac{1}{1+4(1-y)^2},\quad \forall y\in\mathbf{R}.$$

类似地，得

$$R|_{y=2}(x)=R(x,2)=\frac{1}{1+4(x-2)^2},\quad \forall x\in \mathbf{R}.$$ □

定理 3.3.1 设 $Q,R\in \mathscr{F}(X\times Y)$，而且集族 $\{R_t|t\in T\}\subseteq \mathscr{F}(X\times Y)$，则 $\forall x\in X, y\in Y$，

(1)如果 $Q\subseteq R$，则

$$Q_X\subseteq R_X,\quad Q_Y\subseteq R_Y,\quad Q|_x\subseteq R|_x,\quad Q|_y\subseteq R|_y;$$

(2) $\left(\bigcup_{t\in T}R_t\right)_X=\bigcup_{t\in T}(R_t)_X$，$\left(\bigcap_{t\in T}R_t\right)_X=\bigcap_{t\in T}(R_t)_X$；

$\left(\bigcup_{t\in T}R_t\right)|_x=\bigcup_{t\in T}(R_t)|_x$，$\left(\bigcap_{t\in T}R_t\right)|_x=\bigcap_{t\in T}(R_t)|_x$；

$\left(\bigcup_{t\in T}R_t\right)|_y=\bigcup_{t\in T}(R_t)|_y$，$\left(\bigcap_{t\in T}R_t\right)|_y=\bigcap_{t\in T}(R_t)|_y$.

定理 3.3.2 设 $R\in \mathscr{F}(X\times Y)$，$x_0\in X$，$y_0\in Y$，则下述各项成立：

(1) $R_X=\bigcup_{y\in Y}R|_y$，$R_Y=\bigcup_{x\in X}R|_x$；

(2) $R|_{x_0}=((\{x_0\}\times Y)\cap R)_Y$，$R|_{y_0}=((X\times\{y_0\})\cap R)_X$；

(3) $R=\bigcup_{x\in X}(\{x\}\times R|_x)=\bigcup_{y\in Y}(R|_y\times\{y\})$.

证明 只证(2)，其余类似可证. 任取 $y\in Y$，则由定义 3.3.1 得

$$\begin{aligned}((\{x_0\}\times Y)\cap R)_Y(y)&=\bigvee_{x\in X}\{((\{x_0\}\times Y)\cap R)(x,y)\}\\&=\bigvee_{x\in X}\{(\{x_0\}\times Y)(x,y)\wedge R(x,y)\}\\&=\bigvee_{x\in X}\{\{x_0\}(x)\wedge Y(y)\wedge R(x,y)\}\\&=\{x_0\}(x_0)\wedge 1\wedge R(x_0,y)=R(x_0,y)=R|_{x_0}(y)\end{aligned}$$

从而 $$R|_{x_0}=((\{x_0\}\times Y)\cap R)_Y$$

同理 $$R|_{y_0}=((X\times\{y_0\})\cap R)_X.$$

即(2)得证. □

§3.4 Fuzzy 关系的复合

有许多方法定义 Fuzzy 关系的复合，但最常用的是所谓最大—最小复合. 我们先来看一看普通关系的复合.

例 3.4.1 设 A 表示祖孙关系，B_1，B_2 均表示父子关系，则

$$(x,z)\in A\Leftrightarrow \text{存在 } y\text{，使 }(x,y)\in B_1\text{ 且 }(y,z)\in B_2$$

我们称 A 是由 B_1 与 B_2 复合而成的，记做

$$A = B_1 \circ B_2 \quad (\text{祖孙} = \text{父子} \circ \text{父子}).$$ □

一般地，设 $Q \in \mathscr{P}(X \times Y)$，$R \in \mathscr{P}(Y \times Z)$，$S \in \mathscr{P}(X \times Z)$

若

$$(x,z) \in S \Leftrightarrow \exists\, y \in Y, \text{使得 } (x,y) \in Q \text{ 且 } (y,z) \in R$$

则称关系 S 是由关系 Q 与 R 复合的，记做

$$S = Q \circ R \tag{3.4.1}$$

即

$$Q \circ R = \{(x,z) \in X \times Z \mid \exists\, y \in Y,\ (x,y) \in Q,\ (y,z) \in R\} \tag{3.4.2}$$

用特征函数表示，有

$$Q \circ R(x,z) = \bigvee_{y \in Y} \{Q(x,y) \wedge R(y,z)\} \tag{3.4.3}$$

将上述关系推广到 Fuzzy 关系，从而有 Fuzzy 关系复合的定义.

定义 3.4.1　如果 Q 是 $X \times Y$ 上的一个 Fuzzy 关系，R 是 $Y \times Z$ 上的一个 Fuzzy 关系，则 Q 与 R 的复合(或合成)(composition relation)，记为 $Q \circ R$，是 $X \times Z$ 上的一个 Fuzzy 关系，其隶属函数是

$$Q \circ R(x,z) = \bigvee_{y \in Y} \{Q(x,y) \wedge R(y,z)\},\ \forall x \in X,\ z \in Z \tag{3.4.4}$$

这种复合用到了取大 ($\vee = \max$) 与取小 ($\wedge = \min$) 运算，所以称之为最大-最小复合(max-min composition).

例 3.4.2　设 R 为实数域 $\mathbf{R}$ 上"x 远大于 y"的 Fuzzy 关系，其隶属函数为

$$R(x,y) = \begin{cases} 0, & x \leqslant y \\ \left[1 + \dfrac{100}{(x-y)^2}\right]^{-1}, & x > y \end{cases}$$

则复合关系 $R \circ R$ 应为 $\mathbf{R}$ 上"x 远远大于 y". 下求 $R \circ R(x,y)$.

$\forall x, y \in \mathbf{R}$，若 $x \leqslant y$，则 $\forall z \in \mathbf{R}$，$x \leqslant z$ 与 $z \leqslant y$ 至少有一个成立，于是

$$R \circ R(x,y) = \bigvee_{z \in \mathbf{R}} \{R(x,z) \wedge R(z,y)\} = 0$$

若 $x > y$，则存在 $z_0 \in \mathbf{R}$，使得

$$R \circ R(x,y) = \bigvee_{z \in \mathbf{R}} \{R(x,z) \wedge R(z,y)\} = R(x,z_0) = R(z_0,y)$$

如图 3.4.1 所示.

令　$R(x,z) = R(z,y)$，解得 $z_0 = \dfrac{x+y}{2}$，代入 $R(x,z)$ 得

$$R \circ R(x,y) = \begin{cases} 0, & x \leqslant y \\ \left[1 + \dfrac{100}{\left(\dfrac{x-y}{2}\right)^2}\right]^{-1}, & x > y \end{cases}$$ □

对于 Fuzzy 关系我们可以考虑许多其他类型的复合运算. 如最小-最大复

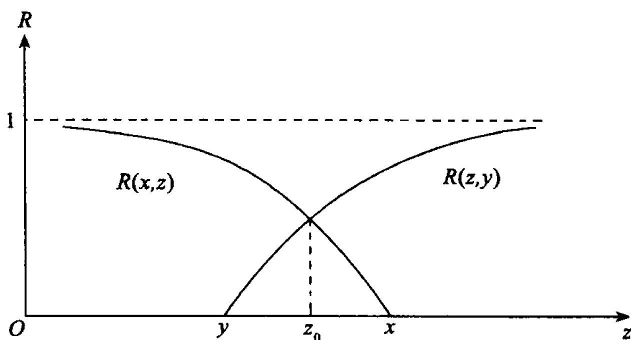


图 3.4.1

合(min-max composition)是最大-最小复合的对偶复合，只需交换 $\vee$ 与 $\wedge$，定义如下

$$Q \hat{\circ} R(x,z) = \bigwedge_{y\in Y} \{Q(x,y) \vee R(y,z)\}, \forall x \in X, z \in Z. \quad (3.4.5)$$

由定义很容易得到：$(Q \hat{\circ} R)^c = Q^c \circ R^c$.

复合的更一般定义是最大-$*$复合.

定义 3.4.2 设 $Q \in \mathscr{F}(X \times Y)$，$R \in \mathscr{F}(Y \times Z)$，则 Q 和 R 的最大-$*$复合(max-$*$ composition)定义为

$$Q \circ_* R(x,z) = \bigvee_{y\in Y} \{Q(x,y) * R(y,z)\}, \forall x \in X, z \in Z \quad (3.4.6)$$

其中 $*$ 是[0,1]上的二元运算.

特别地，$*$ 为 t-模 $\top$，Q 和 R 的最大-$\top$ 复合(max-$\top$ composition)为

$$Q \circ_{\top} R(x,z) = \bigvee_{y\in Y} \{Q(x,y) \top R(y,z)\}, \forall x \in X, z \in Z \text{ (Pedrycz, 1982a)} \quad (3.4.7)$$

当 $\top = \cdot$ 时，Q 和 R 的最大-乘积复合(max-prod composition)为

$$Q \cdot R(x,z) = \bigvee_{y\in Y} \{Q(x,y) \cdot R(y,z)\}, \forall x \in X, z \in Z \text{ (Rosenfeld, 1975)} \quad (3.4.8)$$

定义 3.4.3 设 $Q \in \mathscr{F}(X \times Y)$，$R \in \mathscr{F}(Y \times Z)$，则 Q 和 R 的最大-平均复合(max-av composition)定义如下

$$Q \circ_{av} R(x,z) = \frac{1}{2} \cdot \bigvee_{y\in Y} \{Q(x,y) + R(y,z)\}, \forall x \in X, z \in Z \text{ (Rosenfeld, 1975)} \quad (3.4.9)$$

定义 3.4.4 设 $Q \in \mathscr{F}(X \times Y)$，$R \in \mathscr{F}(Y \times Z)$，则 Q 和 R 的最小-$\alpha_{\top}$复

合(min-α_T composition)定义如下

$$Q\alpha_T R(x,z)=\bigwedge_{y\in Y}\{Q(x,y)\alpha_T R(y,z)\},\forall x\in X,\ z\in Z \quad (3.4.10)$$

其中 α_T 算子是 § 1.3 中讨论的 Sanchez 算子.

如果在有限论域上讨论 Fuzzy 关系(即 Fuzzy 矩阵),其复合与普通矩阵的乘法相对应.

定义 3.4.5 设 $Q=[q_{ik}]_{m\times l}\in\mathscr{F}(X\times Y)$, $R=[r_{kj}]_{l\times n}\in\mathscr{F}(Y\times Z)$,则 Fuzzy 矩阵 Q 与 R 的复合为

$$Q\circ R=S=[s_{ij}]_{m\times n}\in\mathscr{F}(X\times Z) \quad (3.4.11)$$

其中

$$s_{ij}=\bigvee_{k=1}^{l}\{q_{ik}\wedge r_{kj}\},i=1,2,\cdots,m,\ j=1,2,\cdots,n \quad (3.4.12)$$

Fuzzy 矩阵的复合也称为 Fuzzy 矩阵的乘积.

例 3.4.3 设 $X=\{x_1,x_2\}$, $Y=\{y_1,y_2,y_3\}$, $Z=\{z_1,z_2\}$. 如果 Fuzzy 关系 Q 和 R 用下面的 Fuzzy 矩阵表示,则 Q 与 R 的复合可以依如下计算得到. 其复合运算相应于矩阵的普通乘法,数乘用 $\wedge$ (min)来代替,加法用 $\vee$ (max)来代替.

$$Q=\begin{bmatrix}0.4 & 0.6 & 0\\ 0.9 & 1 & 0.1\end{bmatrix},\ R=\begin{bmatrix}0.5 & 0.8\\ 0.1 & 1\\ 0 & 0.6\end{bmatrix}$$

$$Q\circ R=\begin{bmatrix}0.4 & 0.6 & 0\\ 0.9 & 1 & 0.1\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}0.5 & 0.8\\ 0.1 & 1\\ 0 & 0.6\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}(0.4\wedge 0.5)\vee(0.6\wedge 0.1)\vee(0\wedge 0) & (0.4\wedge 0.8)\vee(0.6\wedge 1)\vee(0\wedge 0.6)\\ (0.9\wedge 0.5)\vee(1\wedge 0.1)\vee(0.1\wedge 0) & (0.9\wedge 0.8)\vee(1\wedge 1)\vee(0.1\wedge 0.6)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0.4 & 0.6\\ 0.5 & 1\end{bmatrix}$$ □

类似地,我们有 Fuzzy 矩阵的最大-T复合.

例 3.4.4 设 R_1 表示西红柿的颜色和成熟程度之间的关系, R_2 表示西红柿的成熟程度和味道之间的关系. 设颜色论域为 $X=\{$green, yellow, red$\}$, 成熟程度论域为 $Y=\{$verdant, half-mature, mature$\}$, 味道论域 $Z=\{$sour, tasteless, sweet$\}$. 其中

$$R_1=\begin{matrix}\text{green}\\ \text{yellow}\\ \text{red}\end{matrix}\overset{\begin{matrix}\text{verdant} & \text{half-mature} & \text{mature}\end{matrix}}{\begin{bmatrix}1 & 0.5 & 0\\ 0.3 & 1 & 0.4\\ 0 & 0.2 & 1\end{bmatrix}},$$

$$R_2 = \begin{array}{c} \\ \text{verdant} \\ \text{half-mature} \\ \text{mature} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{sour} & \text{tasteless} & \text{sweet} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0.2 & 0 \\ 0.7 & 1 & 0.3 \\ 0 & 0.7 & 1 \end{bmatrix} \end{array},$$

则按照 Fuzzy 关系复合运算(最大-乘积复合)，R_1 和 R_2 复合表示西红柿的颜色和味道之间的关系.

$$R_1 \cdot R_2 = \begin{array}{c} \\ \text{green} \\ \text{yellow} \\ \text{red} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{sour} & \text{tasteless} & \text{sweet} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0.15 \\ 0.7 & 1 & 0.4 \\ 0.14 & 0.7 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$ □

最大-最小复合运算具有下列性质：

定理 3.4.1 (1) $O \circ R = R \circ O = O$;

(2) $I \circ R = R \circ I = R$.

定理 3.4.2 设 $R, R_1, R_2 \in \mathscr{F}(X \times Y)$，而且 $\{R_t \mid t \in T\} \subseteq \mathscr{F}(X \times Y)$，以及 $Q, Q_1, Q_2 \in \mathscr{F}(Y \times Z)$，$\{Q_t \mid t \in T\} \subseteq \mathscr{F}(Y \times Z)$，$S \in \mathscr{F}(Z \times W)$，则有：

(1) $R_1 \subseteq R_2 \Rightarrow R_1 \circ Q \subseteq R_2 \circ Q$, $Q_1 \subseteq Q_2 \Rightarrow R \circ Q_1 \subseteq R \circ Q_2$;

(2) $(R \circ Q)^{-1} = Q^{-1} \circ R^{-1}$, $(R \circ Q)^c = (R^c \hat{\circ} Q^c)$;

(3) $R \circ (Q \circ S) = (R \circ Q) \circ S$;

(4) $R \circ \left(\bigcup_{t \in T} Q_t \right) = \bigcup_{t \in T} (R \circ Q_t)$;

(5) $\left(\bigcup_{t \in T} R_t \right) \circ Q = \bigcup_{t \in T} (R_t \circ Q)$;

(6) $R \circ \left(\bigcap_{t \in T} Q_t \right) \subseteq \bigcap_{t \in T} (R \circ Q_t)$;

(7) $\left(\bigcap_{t \in T} R_t \right) \circ Q \subseteq \bigcap_{t \in T} (R_t \circ Q)$.

证明 只证(3)、(4)、(6)，其余的易证.

(3) $\forall (x, w) \in X \times W$，由定义 3.4.1 我们有

$$\begin{aligned}
(R \circ (Q \circ S))(x, w) &= \bigvee_{y \in Y} \{R(x, y) \wedge Q \circ S(y, w)\} \\
&= \bigvee_{y \in Y} \left\{ R(x, y) \wedge \left(\bigvee_{z \in Z} Q(y, z) \wedge S(z, w) \right) \right\} \\
&= \bigvee_{y \in Y} \left\{ \bigvee_{z \in Z} R(x, y) \wedge (Q(y, z) \wedge S(z, w)) \right\} \\
&= \bigvee_{y \in Y} \bigvee_{z \in Z} \{R(x, y) \wedge Q(y, z) \wedge S(z, w)\}
\end{aligned}$$

$$=\bigvee_{z\in Z}\left\{\left(\bigvee_{y\in Y}R(x,y)\wedge Q(y,z)\right)\wedge S(z,w)\right\}$$
$$=((R\circ Q)\circ S)(x,w).$$

(4) $\forall(x,z)\in X\times Z$，我们有

$$\left(R\circ\left(\bigcup_{t\in T}Q_t\right)\right)(x,z)=\bigvee_{y\in Y}\left\{R(x,y)\wedge\left(\bigvee_{t\in T}Q_t(y,z)\right)\right\}$$
$$=\bigvee_{y\in Y}\left\{\bigvee_{t\in T}\{R(x,y)\wedge Q_t(y,z)\}\right\}$$
$$=\bigvee_{t\in T}\left\{\bigvee_{y\in Y}\{R(x,y)\wedge Q_t(y,z)\}\right\}$$
$$=\left(\bigcup_{t\in T}(R\circ Q_t)\right)(x,z)$$

于是
$$R\circ\left(\bigcup_{t\in T}Q_t\right)=\bigcup_{t\in T}(R\circ Q_t).$$

(6) $\forall(x,z)\in X\times Z$，我们有

$$\left(R\circ\left(\bigcap_{t\in T}Q_t\right)\right)(x,z)=\bigvee_{y\in Y}\left\{R(x,y)\wedge\left(\bigwedge_{t\in T}Q_t(y,z)\right)\right\}$$
$$=\bigvee_{y\in Y}\left\{\bigwedge_{t\in T}\{R(x,y)\wedge Q_t(y,z)\}\right\}$$
$$\leqslant\bigwedge_{t\in T}\left\{\bigvee_{y\in Y}\{R(x,y)\wedge Q_t(y,z)\}\right\}$$
$$=\bigwedge_{t\in T}\{R\circ Q_t(x,z)\}=\left(\bigcap_{t\in T}(R\circ Q_t)\right)(x,z)$$

这样
$$R\circ\left(\bigcap_{t\in T}Q_t\right)\subseteq\bigcap_{t\in T}(R\circ Q_t).$$
□

若 $R\in\mathscr{F}(X\times X)$，因为 $R\circ(R\circ R)=(R\circ R)\circ R$. 故可以将其记做 $R\circ R\circ R\triangleq R^3$. 更一般地，可以记 $R^m=\underbrace{R\circ R\circ\cdots\circ R}_{m}$，且容易证明 $R^m\circ R^n=R^{m+n}$.

定理 3.4.2 中的(6)、(7)两式，未必有等号成立.

例 3.4.5 设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$ 是无穷可列集. $\forall R_k\in\mathscr{F}(X\times X)$，$k=1,2,\cdots$，且对于任意 $x_l,x_m\in X$

$$R_k(x_l,x_m)=\frac{m}{k+m},\quad k,l,m=1,2,\cdots$$

又设 $R\in\mathscr{F}(X\times X)$，且 $R(x_m,x_n)\equiv 1\ (m,n=1,2,\cdots)$ 则

$$\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}R_k\right)\circ R(x_l,x_n)=\bigvee_{x_m\in X}\left\{\left(\bigwedge_{k=1}^{\infty}R_k(x_l,x_m)\right)\wedge R(x_m,x_n)\right\}$$
$$=\bigvee_{x_m\in X}\left\{\left(\bigwedge_{k=1}^{\infty}\frac{m}{k+m}\right)\wedge 1\right\}=0$$

$$\bigcap_{k=1}^{\infty}(R_k\circ R)(x_l,x_n)=\bigwedge_{k=1}^{\infty}\left\{\bigvee_{x_m\in X}\{R_k(x_l,x_m)\wedge R(x_m,x_n)\}\right\}$$

$$=\bigwedge_{k=1}^{\infty}\left\{\bigvee_{x_m\in X}\left(\frac{m}{k+m}\right)\wedge 1)\right\}=1$$

从而
$$\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}R_k\right)\circ R\subset\bigcap_{k=1}^{\infty}(R_k\circ R).$$
□

但对于有限交,定理 3.4.2 中的(6)、(7)两式等号成立.

定理 3.4.3 设 $R,R_1,R_2,\cdots,R_m\in\mathscr{F}(X\times Y)$,以及 $Q,Q_1,Q_2,\cdots,Q_n\in\mathscr{F}(Y\times Z)$,则

(1) $R\circ\left(\bigcap_{i=1}^{n}Q_i\right)=\bigcap_{i=1}^{n}(R\circ Q_i)$;

(2) $\left(\bigcap_{i=1}^{m}R_i\right)\circ Q=\bigcap_{i=1}^{m}(R_i\circ Q)$.

下面我们讨论 α-截关系的性质.

定理 3.4.4 设 $Q\in\mathscr{F}(X\times Y)$, $R\in\mathscr{F}(Y\times Z)$,则 $\forall\alpha\in[0,1]$,

(1) $(Q\circ R)_{\bar{\alpha}}=Q_{\bar{\alpha}}\circ R_{\bar{\alpha}}\subseteq Q_\alpha\circ R_\alpha\subseteq(Q\circ R)_\alpha$;

(2)若 Y 是有限集,那么 $(Q\circ R)_\alpha=Q_\alpha\circ R_\alpha$.

证明 (1)因为 $\forall(x,z)\in X\times Z$

$$(x,z)\in(Q\circ R)_{\bar{\alpha}}\Leftrightarrow(Q\circ R)(x,z)>\alpha\Leftrightarrow\bigvee_{y\in Y}(Q(x,y)\wedge R(y,z))>\alpha$$

$$\Leftrightarrow\exists y\in Y,\text{使 }Q(x,y)>\alpha\text{ 且 }R(y,z)>\alpha$$

$$\Leftrightarrow\exists y\in Y,\text{使}(x,y)\in Q_{\bar{\alpha}}\text{ 且}(y,z)\in R_{\bar{\alpha}}$$

$$\Leftrightarrow(x,z)\in Q_{\bar{\alpha}}\circ R_{\bar{\alpha}}$$

所以
$$(Q\circ R)_{\bar{\alpha}}=Q_{\bar{\alpha}}\circ R_{\bar{\alpha}}.$$

再考虑到 $Q_{\bar{\alpha}}\subseteq Q_\alpha,R_{\bar{\alpha}}\subseteq R_\alpha$,以及定理 3.4.2(1),有 $Q_{\bar{\alpha}}\circ R_{\bar{\alpha}}\subseteq Q_\alpha\circ R_\alpha$.又 $\forall(x,z)\in X\times Z$,有

$$(x,z)\in Q_\alpha\circ R_\alpha\Leftrightarrow\exists y\in Y,\text{使}(x,y)\in Q_\alpha\text{ 且}(y,z)\in R_\alpha$$

$$\Leftrightarrow\exists y\in Y,\text{使 }Q(x,y)\geqslant\alpha\text{ 且 }R(y,z)\geqslant\alpha$$

$$\Rightarrow\bigvee_{y\in Y}(Q(x,y)\wedge R(y,z))\geqslant\alpha$$

$$\Leftrightarrow Q\circ R(x,z)\geqslant\alpha\Leftrightarrow(x,z)\in(Q\circ R)_\alpha.$$

从而(1)成立.

(2)设 $Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$ $(n\in\mathbf{N})$,则

$$(x,z)\in(Q\circ R)_\alpha\Leftrightarrow Q\circ R(x,z)\geqslant\alpha$$

$$\Leftrightarrow\bigvee_{y\in Y}(Q(x,y)\wedge R(y,z))\geqslant\alpha$$

$$\Leftrightarrow \exists\, y_i \in Y, 使\ Q(x,y_i) \geqslant \alpha\ 且\ R(y,z_i) \geqslant \alpha$$

$$\Leftrightarrow \exists\, y_i \in Y, 使\ (x,y_i) \in Q_\alpha\ 且\ (y_i,z) \in R_\alpha$$

$$\Leftrightarrow (x,z) \in Q_\alpha \circ R_\alpha$$

即(2)成立. □

定理 3.4.5　设 $Q \in \mathscr{F}(X \times Y)$，$R \in \mathscr{F}(Y \times Z)$，则

$$Q \circ R = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha(Q_\alpha \circ R_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in [0,1)} \alpha(Q_{\bar{\alpha}} \circ R_{\bar{\alpha}}) \qquad (3.4.13)$$

证明　根据分解定理 2.2.2 与定理 3.4.4(1)，我们有

$$Q \circ R = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha(Q \circ R)_{\bar{\alpha}} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha(Q_{\bar{\alpha}} \circ R_{\bar{\alpha}}) \subseteq \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha(Q_\alpha \circ R_\alpha)$$

$$\subseteq \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha(Q \circ R)_\alpha = Q \circ R.$$ □

最大-最小复合的性质可以推广到最大-T 复合.

定理 3.4.6　(1) $O \circ_T R = R \circ_T O = O$;

(2) $I \circ_T R = R \circ_T I = R$.

定理 3.4.7　设 $R, R_1, R_2 \in \mathscr{F}(X \times Y)$，$Q, Q_1, Q_2 \in \mathscr{F}(Y \times Z)$，则

$$R_1 \subseteq R_2 \Rightarrow R_1 \circ_T Q \subseteq R_2 \circ_T Q, \quad Q_1 \subseteq Q_2 \Rightarrow R \circ_T Q_1 \subseteq R \circ_T Q_2.$$

定理 3.4.8　设 $R \in \mathscr{F}(X \times Y)$，$\{R_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} \subseteq \mathscr{F}(X \times Y)$，$\{Q_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} \subseteq \mathscr{F}(Y \times Z)$，$Q \in \mathscr{F}(Y \times Z)$，则

(1) $R \circ_T \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} Q_\lambda\right) \subseteq \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (R \circ_T Q_\lambda)$;

(2) $\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} R_\lambda\right) \circ_T Q \subseteq \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (R_\lambda \circ_T Q)$.

定理 3.4.9　设 $R, R_1, R_2 \in \mathscr{F}(X \times Y)$，而且 $\{R_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} \subseteq \mathscr{F}(X \times Y)$，以及 $Q, Q_1, Q_2 \in \mathscr{F}(Y \times Z)$，$\{Q_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} \subseteq \mathscr{F}(Y \times Z)$，$S \in \mathscr{F}(Z \times W)$，并且 T 对 $\vee$ 是无穷可分配的，则有

(1) $R \circ_T (Q \circ_T S) = (R \circ_T Q) \circ_T S$;

(2) $R \circ_T \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} Q_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (R \circ_T Q_\lambda)$;

(3) $\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} R_\lambda\right) \circ_T Q = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (R_\lambda \circ_T Q)$.

最小－α 复合有下列性质.

定理 3.4.10　设 $Q \in \mathscr{F}(X \times Y)$，$R \in \mathscr{F}(Y \times Z)$，$S \in \mathscr{F}(X \times Z)$，并且 T 对 $\vee$ 是无穷可分配的，则 $Q \circ_T R \subseteq S$ 当且仅当 $R \subseteq Q^{-1} \alpha_T S$.

证明　由 $\circ_T$ 和 α_T 的定义以及定理 1.3.14(2)得

$$Q\circ_{\top} R\subseteq S \Leftrightarrow \forall x\in X, z\in Z, (Q\circ_{\top} R)(x,z)\leqslant S(x,z)$$

$$\Leftrightarrow \forall x\in X, z\in Z, \bigvee_{y\in Y}\{Q(x,y)\top R(y,z)\}\leqslant S(x,z)$$

$$\Leftrightarrow \forall x\in X, y\in Y, z\in Z, Q(x,y)\top R(y,z)\leqslant S(x,z)$$

$$\Leftrightarrow \forall x\in X, y\in Y, z\in Z, R(y,z)\leqslant Q(x,y)\alpha_{\top} S(x,z)$$

$$\Leftrightarrow \forall x\in X, y\in Y, z\in Z, R(y,z)\leqslant Q^{-1}(y,x)\alpha_{\top} S(x,z)$$

$$\Leftrightarrow \forall y\in Y, z\in Z, R(y,z)\leqslant \bigwedge_{x\in X}\{Q^{-1}(y,x)\alpha_{\top} S(x,z)\}$$

$$\Leftrightarrow R\subseteq Q^{-1}\alpha_{\top} S.$$ □

定理 3.4.11 设 $Q\in\mathscr{F}(X\times Y)$, $S_1, S_2\in\mathscr{F}(Y\times Z)$, $R\in\mathscr{F}(Z\times W)$, 若 $S_1\subseteq S_2$, 则

$$Q\alpha_{\top} S_1\subseteq Q\alpha_{\top} S_2 \tag{3.4.14}$$

$$S_1\alpha_{\top} R\supseteq S_2\alpha_{\top} R \tag{3.4.15}$$

定理 3.4.12 设 $Q\in\mathscr{F}(X\times Y)$, $R\in\mathscr{F}(Y\times Z)$, $S\in\mathscr{F}(Z\times W)$,并且 $\top$ 对 $\vee$ 是无穷可分配的,则

$$Q\alpha_{\top}(R\alpha_{\top} S)=(Q\circ_{\top} R)\alpha_{\top} S \tag{3.4.16}$$

证明 $\forall x\in X, w\in W$, 我们有

$$Q\alpha_{\top}(R\alpha_{\top} S)(x,w)=\bigwedge_{y\in Y}\left\{Q(x,y)\alpha_{\top}\left(\bigwedge_{z\in Z}\left\{R(y,z)\alpha_{\top} S(z,w)\right\}\right)\right\}$$

$$=\bigwedge_{y\in Y}\bigwedge_{z\in Z}\{Q(x,y)\alpha_{\top}(R(y,z)\alpha_{\top} S(z,w))\}\quad(\text{由定理 1.3.16(2)})$$

$$=\bigwedge_{y\in Y}\bigwedge_{z\in Z}\{(Q(x,y)\top R(y,z))\alpha_{\top} S(z,w)\}\quad(\text{由定理 1.3.15(4)})$$

$$=\bigwedge_{y\in Y}\left\{\bigvee_{z\in Z}\{Q(x,y)\top R(y,z)\}\alpha_{\top} S(z,w)\right\}\quad(\text{由定理 1.3.16(1)})$$

$$=(Q\circ_{\top} R)\alpha_{\top} S(x,z)$$

即
$$Q\alpha_{\top}(R\alpha_{\top} S)=(Q\circ_{\top} R)\alpha_{\top} S.$$ □

定理 3.4.13 设 $R, R_\lambda\in\mathscr{F}(X\times Y)$, $S, S_\lambda\in\mathscr{F}(Y\times Z)$, $\lambda\in\Lambda$, 则

(1) $R\alpha_{\top}\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda\right)\supseteq\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(R\alpha_{\top} S_\lambda)$;

(2) $\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} R_\lambda\right)\alpha_{\top} S\supseteq\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(R_\lambda\alpha_{\top} S)$.

证明 只证(1). $\forall x\in X, z\in Z$

$$R\alpha_{\top}\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda\right)(x,z)=\bigwedge_{y\in Y}\left\{R(x,y)\alpha_{\top}\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda\right)(y,z)\right\}$$

$$=\bigwedge_{y\in Y}\left\{R(x,y)\alpha_{\top}\left(\bigvee_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda(y,z)\right)\right\}$$

$$\geqslant \bigwedge_{y\in Y}\left\{\bigvee_{\lambda\in\Lambda}\{R(x,y)\alpha_{\top} S_{\lambda}(y,z)\}\right\} \quad (\text{由定理 } 1.3.17(2))$$

$$=\bigvee_{\lambda\in\Lambda}\left\{\bigwedge_{y\in Y}\{R(x,y)\alpha S_{\lambda}(y,z)\}\right\}$$

$$=\bigvee_{\lambda\in\Lambda}\{R\alpha_{\top} S_{\lambda}(x,z)\}=\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} R\alpha_{\top} S_{\lambda}\right)(x,z)$$

即

$$R\alpha_{\top}\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} S_{\lambda}\right)\supseteq\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(R\alpha_{\top} S_{\lambda}).$$ □

定理 3.4.14　设 $R,R_{\lambda}\in\mathscr{F}(X\times Y)$，$S,S_{\lambda}\in\mathscr{F}(Y\times Z)$，$\lambda\in\Lambda$，并且 $\top$ 对 $\vee$ 是无穷可分配的，则

(1) $R\alpha_{\top}\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} S_{\lambda}\right)=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}(R\alpha_{\top} S_{\lambda})$；

(2) $\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} R_{\lambda}\right)\alpha_{\top} S=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}(R_{\lambda}\alpha_{\top} S)$.

证明　只证(1). $\forall x\in X,z\in Z$，我们有

$$R\alpha_{\top}\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} S_{\lambda}\right)(x,z)=\bigwedge_{y\in Y}\left\{R(x,y)\alpha_{\top}\left(\bigwedge_{\lambda\in\Lambda} S_{\lambda}(y,z)\right)\right\}$$

$$=\bigwedge_{y\in Y}\bigwedge_{\lambda\in\Lambda}\{R(x,y)\alpha_{\top} S_{\lambda}(y,z)\} \quad (\text{由定理 } 1.3.16(2))$$

$$=\bigwedge_{\lambda\in\Lambda}\left\{\bigwedge_{y\in Y}\{R(x,y)\alpha_{\top} S_{\lambda}(y,z)\}\right\}$$

$$=\bigwedge_{\lambda\in\Lambda}\{R\alpha_{\top} S_{\lambda}(x,z)\}=\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} R\alpha_{\top} S_{\lambda}\right)(x,z).$$ □

定理 3.4.15　设 $Q\in\mathscr{F}(X\times Y)$，$R\in\mathscr{F}(Y\times Z)$，$S\in\mathscr{F}(Z\times W)$，并且 $\top$ 对 $\vee$ 是无穷可分配的，则

(1) $Q^{-1}\circ_{\top}(Q\alpha_{\top} R)\subseteq R$；

(2) $S\subseteq Q\alpha_{\top}(Q^{-1}\circ_{\top} S)$；

(3) $Q\subseteq(Q\alpha_{\top} R)\alpha_{\top} R^{-1}$；

(4) $S\subseteq(S\alpha_{\top} R^{-1})\alpha_{\top} R$；

(5) $Q\circ_{\top}(Q^{-1}\alpha_{\top} Q)=Q$；

(6) $(Q\alpha_{\top} Q^{-1})\alpha_{\top} Q=Q$.

证明　只证(1)、(3)、(5)、(6). 其他同理可证.

(1) $\forall y\in Y,z\in Z$，有

$$Q^{-1}\circ_{\top}(Q\alpha_{\top} R)(y,z)=\bigvee_{x\in X}\left\{Q^{-1}(y,x)\top\left(\bigwedge_{y'\in Y} Q(x,y')\alpha_{\top} R(y',z)\right)\right\}$$

$$\leqslant\bigvee_{x\in X}\bigwedge_{y'\in Y}\{Q(x,y)\top(Q(x,y')\alpha_{\top} R(y',z))\}$$

$$\leqslant\bigvee_{x\in X}\{Q(x,y)\top(Q(x,y)\alpha_{\top} R(y,z))\}$$

$$\leqslant R(y,z) \quad (\text{由定理 } 1.3.15(1))$$

即
$$Q^{-1} \circ_T (Q\alpha_T R) \subseteq R.$$

(3) $\forall x \in X, y \in Y$, 有

$$(Q\alpha_T R)\alpha_T R^{-1}(x,y) = \bigwedge_{z\in Z}\left\{\left(\bigwedge_{y'\in Y} Q(x,y')\alpha_T R(y',z)\right)\alpha_T R^{-1}(z,y)\right\}$$

$$\geqslant \bigwedge_{z\in Z}\left\{\bigvee_{y'\in Y}\{(Q(x,y')\alpha_T R(y',z))\alpha_T R(y,z)\}\right\}$$

(由定理 1.3.17(1))

$$\geqslant \bigwedge_{z\in Z}\{(Q(x,y)\alpha_T R(y,z))\alpha_T R(y,z)\}$$

$$\geqslant Q(x,y) \quad (\text{由定理 } 1.3.15(6))$$

即
$$Q \subseteq (Q\alpha_T R)\alpha_T R^{-1}.$$

(5) $\forall x \in X, y \in Y$, 有

$$Q \circ_T (Q^{-1}\alpha_T Q)(x,y) = \bigvee_{y'\in Y}\left\{Q(x,y')\, T\left(\bigwedge_{x'\in X} Q^{-1}(y',x')\alpha_T Q(x',y)\right)\right\}$$

$$\leqslant \bigvee_{y'\in Y}\{Q(x,y')\, T(Q(x,y')\alpha_T Q(x,y))\}$$

$$\leqslant Q(x,y) \quad (\text{由定理 } 1.3.15(1))$$

又
$$Q \circ_T (Q^{-1}\alpha_T Q)(x,y) \geqslant Q(x,y)\, T\left(\bigwedge_{x'\in X} Q(x',y)\alpha_T Q(x',y)\right)$$

$$\geqslant Q(x,y)\, T\, 1 = Q(x,y)$$

即
$$Q \circ_T (Q^{-1}\alpha_T Q) = Q.$$

(6) 由(4)知 $(Q\alpha_T Q^{-1})\alpha_T Q \supseteq Q$, 又 $\forall x \in X, y \in Y$, 有

$$(Q\alpha_T Q^{-1})\alpha_T Q(x,y) = \bigwedge_{x'\in X}\left\{\left(\bigwedge_{y'\in Y}\{Q(x,y')\alpha_T Q^{-1}(y',x')\}\right)\alpha_T Q(x',y)\right\}$$

$$\leqslant \left(\bigwedge_{y'\in Y}\{Q(x,y')\alpha_T Q(x,y')\}\right)\alpha_T Q(x,y)$$

$$= 1\alpha_T Q(x,y) = Q(x,y) \quad (\text{由定理 } 1.3.15(7) \text{ 及定理 } 1.3.14(1))$$

即
$$(Q\alpha_T Q^{-1})\alpha_T Q = Q.$$
□

§3.5 Fuzzy 关系的自反性

定义 3.5.1 设 R 是 X 上的 Fuzzy 关系. 则:

(1) R 称为是自反的(reflexive), 如果

$$R(x,x) = 1, \quad \forall x \in X \quad (\text{Zadeh, 1971}) \tag{3.5.1}$$

(2) R 称为是 ε-自反的(ε-reflexive), 如果

$$R(x,x) \geqslant \varepsilon, \quad \forall x \in X \ (\text{Yeh, Bang, 1975}) \tag{3.5.2}$$

(3) R 称为是弱自反的(weakly reflexive), 如果

$$\left.\begin{array}{l}R(x,y)\leqslant R(x,x)\\R(y,x)\leqslant R(x,x)\end{array}\right\},\quad \forall x,y\in X\ (\text{Yeh, Bang, 1975})\tag{3.5.3}$$

(4) R 称为是反自反的(irreflexive),如果

$$R(x,x)=0,\quad \forall x\in X\tag{3.5.4}$$

例 3.2.2 中的“胜负关系”与例 3.2.5 中的“信任关系”不是自反的,也不是弱自反的,只是 0.5-自反的.

例 3.5.1 设 $Q\in\mathscr{F}(\mathbf{R}\times\mathbf{R})$,且 $\forall x,y\in\mathbf{R}$.

$$Q(x,y)=\begin{cases}e^{-(x-y)^2}, & x>y\\0, & x\leqslant y\end{cases}$$

则 Q 是反自反的. □

例 3.5.2 设

$$R=\begin{bmatrix}0.8 & 0.6 & 0.7\\0.9 & 0.9 & 0.5\\0.1 & 0.4 & 0.6\end{bmatrix}$$

则 R 是 0.6-自反的,不是弱自反的,但满足 $R(x,x)\geqslant R(x,y),\forall x,y\in X$. □

定理 3.5.1 设 $R\in\mathscr{F}(X\times X)$,则:

(1) R 是自反的当且仅当对$[0,1]$上的任一伪补 N, $N(R)$ 是反自反的;

(2) R 是反自反的当且仅当 $R\cap I=\varnothing$.

定理 3.5.2 设 $R,R_1,R_2\in\mathscr{F}(X\times X)$,则:

(1) R_1 是自反的 $\Rightarrow R_1\circ R_2\supseteq R_2$ 和 $R_2\circ R_1\supseteq R_2$;

(2) $R\circ R^{-1}$ 是弱自反的;

(3) R 是弱自反的 $\Rightarrow\forall n\in\mathbf{N},R^n\subseteq R^{n+1}$;

(4) R_1 和 R_2 是自反的 $\Rightarrow R_1\circ R_2$ 也是自反的;

(5) R 是自反的 $\Rightarrow\forall n\in\mathbf{N},R^n$ 也是自反的;

(6) R 是自反的 $\Rightarrow R\backslash I$ 是反自反的.($R\backslash I=R\cap I^c$,参见定义 1.2.3)

证明 (1)假设 R_1 是 X 上的自反 Fuzzy 关系,则 $\forall R_2\in\mathscr{F}(X\times X)$,我们有

$$R_1\circ R_2(x,y)=\bigvee_{z\in X}\{R_1(x,z)\wedge R_2(z,y)\}\geqslant R_1(x,x)\wedge R_2(x,y)=R_2(x,y)$$

从而 $R_1\circ R_2\supseteq R_2$. 同理可证 $R_2\circ R_1\supseteq R_2$.

(2) $\forall x,z\in X$

$$\begin{aligned}(R\circ R^{-1})(x,x)&=\bigvee_{y\in X}\{R(x,y)\wedge R^{-1}(y,x)\}\\&=\bigvee_{y\in X}\{R(x,y)\wedge R(x,y)\}=\bigvee_{y\in X}R(x,y)\end{aligned}$$

$$\geqslant \bigvee_{y\in X}\{R(x,y)\wedge R(z,y)\}$$

$$=\bigvee_{y\in X}\{R(x,y)\wedge R^{-1}(y,z)\}=(R\circ R^{-1})(x,z)$$

同理可证 $(R\circ R^{-1})(x,x)\geqslant (R\circ R^{-1})(z,x)$.

(3)由于 R 是弱自反的,则 $\forall x,y\in X, R(x,y)\leqslant R(x,x)$,从而

$$R^2(x,y)=\bigvee_{z\in X}\{R(x,z)\wedge R(z,y)\}\geqslant R(x,x)\wedge R(x,y)=R(x,y)$$

这样 $R\subseteq R^2$. 由定理 3.4.2(1)知 $R\subseteq R^2\subseteq\cdots\subseteq R^k\subseteq\cdots$.

(4)、(5)、(6)易证. □

定理 3.5.3 设 $R\in[0,1]^{n\times n}$ 是弱自反的,则有

$$R\subseteq R^2\subseteq\cdots\subseteq R^{n-1}=R^n \tag{3.5.5}$$

证明 由定理 3.5.2(3),只需证明 $R^n\subseteq R^{n-1}$ 即可.

事实上,若记 $R^k=(r_{ij}^{(k)})_{n\times n}$,则对 $k\geqslant 2$,容易证明

$$r_{ij}^{(k)}=\bigvee_{i_1,i_2,\cdots,i_{k-1}=1}^{n}\left\{r_{ii_1}\wedge r_{i_1i_2}\wedge\cdots\wedge r_{i_{k-1}j}\right\}.$$

对 $k=n$,令 $\lambda=r_{ii_1}\wedge r_{i_1i_2}\wedge\cdots\wedge r_{i_{n-1}j}$,则 $i,i_1,i_2,\cdots,i_{n-1},j$ 中至少有两个下标相同. 下面分三种情形来证明 $\lambda\leqslant r_{ij}^{(n-1)}$. 记 $i=i_0$, $j=j_n$.

情形Ⅰ, $i=i_p$, $1\leqslant p\leqslant n-1$,则

$$\lambda\leqslant r_{ii_{p+1}}\wedge\cdots\wedge r_{i_{n-1}j}\leqslant\bigvee_{i_{p+1},\cdots,i_{n-1}=1}^{n}\left\{r_{ii_{p+1}}\wedge\cdots\wedge r_{i_{n-1}j}\right\}\leqslant r_{ij}^{(n-1)}.$$

情形Ⅱ, $j=i_p$, $1\leqslant p\leqslant n-1$. 与情形Ⅰ一样的步骤可以证明,$\lambda\leqslant r_{ij}^{(n-1)}$.

情形Ⅲ, $i_q=i_p$, $1\leqslant q<p\leqslant n-1$. 则有 $1\leqslant p-q<n-1$, $R^{n-p+q}\subseteq R^{n-1}$. 又由于

$$\lambda\leqslant r_{ii_1}\wedge\cdots r_{i_{q-1}i_q}\wedge r_{i_pi_{p+1}}\wedge\cdots\wedge r_{i_{n-1}j}$$

$$\leqslant\bigvee_{i_1,\cdots,i_{q-1},i_p,\cdots,i_{n-1}=1}^{n}\left\{r_{ii_1}\wedge\cdots r_{i_{q-1}i_q}\wedge r_{i_pi_{p+1}}\wedge\cdots\wedge r_{i_{n-1}j}\right\}$$

$$=r_{ij}^{(n-p+q)}\leqslant r_{ij}^{(n-1)}.$$

这样 $r_{ij}^{(n)}=\bigvee_{i_1,i_2,\cdots,i_{n-1}=1}^{n}\left\{r_{ii_1}\wedge r_{i_1i_2}\wedge\cdots\wedge r_{i_{n-1}j}\right\}\leqslant r_{ij}^{(n-1)}(i,j=1,2,\cdots,n)$,所以 $R^n\subseteq R^{n-1}$. 定理得证. □

例 3.5.3 设

$$R=\begin{bmatrix}0.8 & 0.6 & 0.7\\ 0.8 & 0.9 & 0.5\\ 0.1 & 0.4 & 0.7\end{bmatrix}$$

则 R 是弱自反的,这时

$$R^2=\begin{bmatrix}0.8 & 0.6 & 0.7\\0.8 & 0.9 & 0.5\\0.1 & 0.4 & 0.7\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}0.8 & 0.6 & 0.7\\0.8 & 0.9 & 0.5\\0.1 & 0.4 & 0.7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.8 & 0.6 & 0.7\\0.8 & 0.9 & 0.7\\0.4 & 0.4 & 0.7\end{bmatrix}$$

$$R^3=\begin{bmatrix}0.8 & 0.6 & 0.7\\0.8 & 0.9 & 0.7\\0.4 & 0.4 & 0.7\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}0.8 & 0.6 & 0.7\\0.8 & 0.9 & 0.5\\0.1 & 0.4 & 0.7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.8 & 0.6 & 0.7\\0.8 & 0.9 & 0.7\\0.4 & 0.4 & 0.7\end{bmatrix}=R^2.$$ □

定理 3.5.4　设 $\{R_t \mid t\in T\}\subseteq\mathscr{F}(X\times X)$，若 $\forall t\in T$，R_t 是自反的，则 $\bigcap_{t\in T} R_t$ 也是自反的.

定理 3.5.5　设 $R_1, R_2\in\mathscr{F}(X\times X)$ 都是自反的，则 $R_1\circ R_2\supseteq R_1\cup R_2$.

证明　$\forall x,y\in X$，则

$$\begin{aligned}R_1\circ R_2(x,y)&=\bigvee_{z\in X}\{R_1(x,z)\wedge R_2(z,y)\}\\&=\max\{R_1(x,x)\wedge R_2(x,y), R_1(x,y)\wedge R_2(y,y),\\&\qquad\bigvee_{z\in X, z\neq x,y}\{R_1(x,z)\wedge R_2(z,y)\}\}\\&\geqslant\max\{R_1(x,y), R_2(x,y)\}.\end{aligned}$$ □

定义 3.5.2　设 $R\in\mathscr{F}(X\times X)$，如果：

(1) $S\in\mathscr{F}(X\times X)$ 是自反的且 $S\supseteq R$；

(2) $Q\in\mathscr{F}(X\times X)$ 是自反的且 $Q\supseteq R\Rightarrow Q\supseteq S$.

则称 S 为 R 的自反闭包(reflexive closure)，记为 $r(R)$.

定理 3.5.6　设 $R\in\mathscr{F}(X\times X)$，则 $r(R)=R\cup I$.

证明　令 $S=R\cup I$，则 $S\supseteq R$ 且 $S\supseteq I$，即 S 是包含 R 的自反关系. 设 Q 是自反的且 $Q\supseteq R$，则 $\forall x\in X, Q(x,x)=S(x,x)=1$ 且 $\forall x,y\in X, x\neq y$ 都有

$$Q(x,y)\geqslant R(x,y)=R(x,y)\vee 0=R(x,y)\vee I(x,y)=(R\cup I)(x,y)$$

即 $Q\supseteq S$. 故 $r(R)=R\cup I$. □

§3.6　Fuzzy 关系的对称性

定义 3.6.1　设 R 是 X 上的 Fuzzy 关系. 则：

(1) R 称为是对称的(symmetric)，如果 $\forall x,y\in X$

$$R(x,y)=R^{-1}(x,y)=R(y,x)\tag{3.6.1}$$

(2) R 称为是弱反对称的(weakly anti-symmetric)，如果 $\forall x,y\in X$

$$x\neq y\Rightarrow(R(x,y)\neq R(y,x)\text{，或 }R(x,y)=R(y,x)=0)\ \text{(Kaufmann, 1975b)}\tag{3.6.2}$$

(3) R 称为是反对称的(anti-symmetric),如果 $\forall x,y \in X$

$$R(x,y) \wedge R(y,x) > 0 \Rightarrow x = y \text{ (等价地}$$

$$R(x,y) \wedge R(y,x) = 0,\ \forall x \neq y \text{) (Zadeh,1971)} \tag{3.6.3}$$

(4) R 称为是严格反对称的(strictly anti-symmetric),如果 $\forall x,y \in X$

$$R(x,y) \wedge R(y,x) = 0 \tag{3.6.4}$$

(5) R 称为是 α -反对称的(α -anti-symmetric),如果 $\forall x,y \in X$

$$x \neq y \Rightarrow |R(x,y) - R(y,x)| \geqslant \alpha,\ \alpha \in (0,1] \tag{3.6.5}$$

很显然弱反对称、反对称与 α -反对称的关系如图 3.6.1 所示.

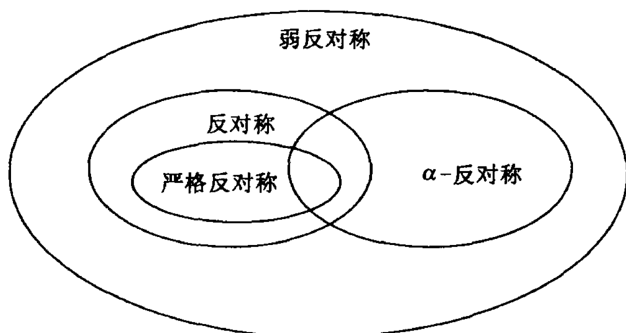


图 3.6.1

例 3.6.1 设 $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$,

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0.1 & 0.8 \\ 0.8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0.7 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ R_2 = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0.7 & 0 \\ 0 & 1 & 0.9 & 0.6 \\ 0.8 & 0.4 & 0.7 & 0.4 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_3 = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.8 & 0.1 & 0.8 \\ 0.8 & 1 & 0 & 0.2 \\ 0.1 & 0.6 & 0.7 & 0.1 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ R_4 = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.5 & 0.8 \\ 0.8 & 1 & 0 & 0.4 \\ 0.1 & 0.6 & 0.7 & 0.2 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

则 R_1 是反对称的,但 $\forall \alpha \in (0,1]$ 不是 α -反对称的. R_2 是弱反对称的,但不是反对称的,并且 $\forall \alpha \in (0,1]$ 不是 α -反对称的. R_3 不是对称的,也不是弱反对称的,因此也不是反对称的, 并且 $\forall \alpha \in (0,1]$ 不是 α -反对称的. R_4 是 0.2-反对称的,但不是对称的,也不是反对称的. □

下面再给出一个反对称的例子.

例 3.6.2 设 $R:[0,+\infty) \times [0,+\infty) \to [0,1]$, 并且

$$R(x,y)=\begin{cases}0.5, & (x,y)\in D_1\\ 0.25, & (x,y)\in D_2\\ 0, & 其他\end{cases}$$

则 R 是 $[0,+\infty)$ 上的反对称 Fuzzy 关系，其中 D_1，D_2 由下面的示意图定义，如图 3.6.2 所示.

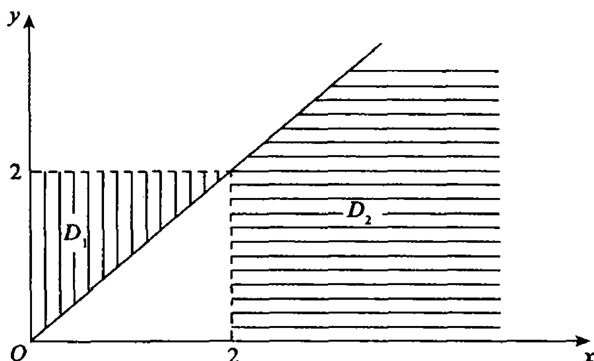


图 3.6.2

定理 3.6.1 设 $R,R_1,R_2\in\mathscr{F}(X\times X)$，则：

(1) $R\circ R^{-1}$ 是对称的；

(2)如果 R_1 和 R_2 是对称的，则 $R_1\circ R_2$ 是对称的当且仅当

$$R_1\circ R_2=R_2\circ R_1 \tag{3.6.6}$$

(3)如果 R 是对称的，则 $\forall m\in\mathbf{N}$，R^m 是对称的.

证明 (1)、(3)易证，只证(2). 假设 R_1 和 R_2 是 X 上对称的 Fuzzy 关系，则 $\forall x,y\in X$

$$\begin{aligned}R_1\circ R_2(x,y)&=\bigvee_{z\in X}\{R_1(x,z)\wedge R_2(z,y)\}=\bigvee_{z\in X}\{R_1(z,x)\wedge R_2(y,z)\}\\&=\bigvee_{z\in X}\{R_2(y,z)\wedge R_1(z,x)\}=R_2\circ R_1(y,x)\end{aligned}$$

从而，$R_1\circ R_2$ 是对称的$\Leftrightarrow\forall x,y\in X,R_1\circ R_2(x,y)=R_1\circ R_2(y,x)$

$\Leftrightarrow\forall x,y\in X,R_1\circ R_2(x,y)=R_2\circ R_1(x,y)$

$\Leftrightarrow R_1\circ R_2=R_2\circ R_1$. □

定理 3.6.2 设 $\{R_t\,|\,t\in T\}\subseteq\mathscr{F}(X\times X)$，若 $\forall t\in T$，R_t 是对称的，则 $\bigcap_{t\in T}R_t$ 也是对称的.

定理 3.6.3 $R\in\mathscr{F}(X\times X)$是反对称的充分必要条件是：如果对于 $x\neq y$，当 $R(x,y)>0$ 时，有 $R(y,x)=0$，$\forall x,y\in X$.

例 3.6.3 任取 $R\in\mathscr{F}(X\times X)$，令 $a(R)\in\mathscr{F}(X\times X)$，且 $\forall x,y\in X$

$$a(R)(x,y)=\begin{cases}R(x,y)-R(y,x), & x\neq y, R(x,y)>R(y,x)\\ 0, & x\neq y, R(x,y)\leqslant R(y,x)\\ R(x,x), & x=y\end{cases}$$

则 $a(R)$ 是反对称的，且 $a(R)\subseteq R$.

定义 3.6.2 设 $R\in\mathscr{F}(X\times X)$，如果：

(1) $S\in\mathscr{F}(X\times X)$是对称的且 $S\supseteq R$；

(2) $Q\in\mathscr{F}(X\times X)$是对称的且 $Q\supseteq R\Rightarrow Q\supseteq S$.

则称 S 为 R 的对称闭包(symmetric closure)，记为 $s(R)$.

定理 3.6.4 设 $R\in\mathscr{F}(X\times X)$，则 $s(R)=R\cup R^{-1}$.

证明 令 $S=R\cup R^{-1}$，则 $S\supseteq R$ 且 $S^{-1}=S$，即 S 是包含 R 的对称关系. 设 Q 是对称的且 $Q\supseteq R$，则 $\forall x,y\in X$ 都有

$$Q(x,y)\geqslant R(x,y) \text{ 和 } Q(x,y)=Q(y,x)\geqslant R(y,x)$$

这样 $Q(x,y)\geqslant R(x,y)\vee R(y,x)=R(x,y)\vee R^{-1}(x,y)=(R\cup R^{-1})(x,y)$

即 $Q\supseteq S$. 故 $s(R)=R\cup R^{-1}$. □

例 3.6.4 设 $R=\begin{bmatrix}0.3 & 0.6 & 0.2\\ 0 & 1 & 0.9\\ 0.4 & 0.5 & 1\end{bmatrix}$，则

$$s(R)=R\cup R'=\begin{bmatrix}0.3 & 0.6 & 0.2\\ 0 & 1 & 0.9\\ 0.4 & 0.5 & 1\end{bmatrix}\cup\begin{bmatrix}0.3 & 0 & 0.4\\ 0.6 & 1 & 0.5\\ 0.2 & 0.9 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.3 & 0.6 & 0.4\\ 0.6 & 1 & 0.9\\ 0.4 & 0.9 & 1\end{bmatrix}.$$

□

§ 3.7 Fuzzy 关系的传递性

定义 3.7.1 一个 Fuzzy 关系 $R\in\mathscr{F}(X\times X)$称为是 max-min 传递的(max-min transitive)，如果

$$R\circ R\subseteq R \tag{3.7.1}$$

即 $$(\forall(x,z)\in X\times X)\left(\bigvee_{y\in X}\{R(x,y)\wedge R(y,z)\}\leqslant R(x,z)\right) \tag{3.7.2}$$

(1) R 称为 max-$\top$ 传递的，如果 $R\circ_{\top}R\subseteq R$；

(2) R 称为 max-prod 传递的，如果 $R\cdot R\subseteq R$；

(3) R 称为 max-av 传递的，如果 $R\circ_{av}R\subseteq R$；

(4) R 称为 min-max 传递的，如果 $R\,\hat{\circ}\,R\supseteq R$.

在无特殊声明的情况下，下面所讨论的传递性均指 max-min 传递.

例 3.7.1 设 $R=\begin{bmatrix}0.5 & 0.4 & 0.5\\0.7 & 0.4 & 0.7\\0.8 & 0.4 & 0.5\end{bmatrix}$，则

$$R\circ R=\begin{bmatrix}0.5 & 0.4 & 0.5\\0.7 & 0.4 & 0.5\\0.5 & 0.4 & 0.5\end{bmatrix}\subset\begin{bmatrix}0.5 & 0.4 & 0.5\\0.7 & 0.4 & 0.7\\0.8 & 0.4 & 0.5\end{bmatrix}=R$$

即 Fuzzy 关系 R 是传递的. □

例 3.7.2 设 $R:[0,+\infty)\times[0,+\infty)\to[0,1]$，并且

$$R(x,y)=\begin{cases}1, & x=y\\ e^{-\max\{x,y\}}, & x\neq y\end{cases}$$

则 $[0,+\infty)$ 上的 Fuzzy 关系 R 是传递的.

事实上只要证

$$R(x,z)\geqslant\bigvee_{y\in[0,+\infty)}\{R(x,y)\wedge R(y,z)\},\ \forall x,z\in[0,+\infty)$$

如果 $x=z$，则 $R(x,z)=1$，因此不等式成立.

如果 $x\neq z$，则 $x<z$ 或 $x>z$. 在 $x<z$ 的情形下

$$R(x,y)=\begin{cases}1, & x=y\\ e^{-\max\{x,y\}}, & x\neq y\end{cases}$$

$$R(y,z)=\begin{cases}1, & y=z\\ e^{-\max\{y,z\}}, & y\neq z\end{cases}$$

由此 $$R(x,y)\wedge R(y,z)=\begin{cases}e^{-z}, & y\in[0,z]\\ e^{-y}, & y\in(z,+\infty)\end{cases}$$

于是 $$\bigvee_{y\in[0,+\infty)}\{R(x,y)\wedge R(y,z)\}=e^{-z}=e^{-\max\{x,z\}}=R(x,z)$$

如果 $x>z$，则用类似的方法得

$$\bigvee_{y\in[0,+\infty)}\{R(x,y)\wedge R(y,z)\}=e^{-x}=e^{-\max\{x,z\}}=R(x,z).$$ □

定理 3.7.1 设 R 是 X 上的 Fuzzy 关系，则下列条件等价：

(1) R 是传递的；

(2) $\forall x,y,z\in X$, $R(x,z)\geqslant R(x,y)\wedge R(y,z)$;

(3) $\forall x,y,z\in X$, $R(x,y)\geqslant\alpha, R(y,z)\geqslant\alpha\Rightarrow R(x,z)\geqslant\alpha$, $\forall\alpha\in[0,1]$.

证明 (1) ⇒ (2) 设 $R\in\mathscr{F}(X\times X)$是传递的，则 $\forall x,y,z\in X$，由传递性得

$$R(x,z)\geqslant R^2(x,z)=\bigvee_{t\in X}\{R(x,t)\wedge R(t,z)\}\geqslant R(x,y)\wedge R(y,z)$$

故条件(2)成立.

(2) ⇒ (3) 设 $\forall x,y,z\in X$, $R(x,z)\geqslant R(x,y)\wedge R(y,z)$，则

$$R(x,y)\geqslant\alpha, R(y,z)\geqslant\alpha\Rightarrow R(x,z)\geqslant\alpha,\ \forall\alpha\in[0,1].$$

(3) ⇒ (1) 现设(3)成立. $\forall x,z \in X$, 任取 $y \in X$, 令 $R(x,y) \wedge R(y,z) = \alpha$, 由假设必有 $R(x,z) \geqslant \alpha$, 所以 $\forall y \in X$ 都有

$$R(x,z) \geqslant R(x,y) \wedge R(y,z)$$

从而
$$R(x,z) \geqslant \bigvee_{y \in X} \{R(x,y) \wedge R(y,z)\} = R \circ R(x,z)$$

即 R 是传递的. □

定理 3.7.2 设 $R, R_1, R_2 \in \mathscr{F}(X \times X)$,

(1)如果 R 是对称的和传递的,则 $R(y,x) = R(x,y) \leqslant R(x,x)$, $\forall x,y \in X$. 即 R 是弱自反的;

(2)如果 R 是弱自反的和传递的,则 $R \circ R = R$;

(3)如果 R_1 和 R_2 是传递的并且 $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$, 则 $R_1 \circ R_2$ 是传递的;

(4)如果 R 是传递的,则 $\forall n \in \mathbf{N}, R^n$ 也是传递的.

证明 (1) $\forall x,y \in X$, 由对称性与传递性得

$$R(x,y) = R(x,y) \wedge R(y,x) \leqslant \bigvee_{z \in X} \{R(x,z) \wedge R(z,x)\} \leqslant R(x,x).$$

(2) $\forall x,y \in X$, 由弱自反性得

$$R \circ R(x,y) = \bigvee_{z \in X} \{R(x,z) \wedge R(z,y)\} \geqslant R(x,x) \wedge R(x,y) = R(x,y)$$

即 $R \circ R \supseteq R$. 再由传递性得, $R \circ R = R$.

(3)由定义 3.7.1 及定理 3.4.2(1)、(3)直接验证.

(4)由(3)直接得到. □

定理 3.7.3 设 $\{R_t \mid t \in T\} \subseteq \mathscr{F}(X \times X)$,若 $\forall t \in T$, R_t 是传递的,则 $\bigcap_{t \in T} R_t$ 也是传递的.

证明 由定理 3.4.2(6)(7)易得

$$\left(\bigcap_{t \in T} R_t\right)^2 = \left(\bigcap_{t \in T} R_t\right) \circ \left(\bigcap_{t \in T} R_t\right) \subseteq \bigcap_{t \in T} \left(R_t \circ \bigcap_{s \in T} R_s\right) \subseteq \bigcap_{t,s \in T} (R_t \circ R_s)$$
$$\subseteq \bigcap_{t \in T} (R_t^2) \subseteq \bigcap_{t \in T} R_t$$

从而 $\bigcap_{t \in T} R_t$ 是传递的. □

定义 3.7.2 设 $R \in \mathscr{F}(X \times X)$,如果

(1) $S \in \mathscr{F}(X \times X)$是传递的且 $S \supseteq R$;

(2) $Q \in \mathscr{F}(X \times X)$是传递的且 $Q \supseteq R \Rightarrow Q \supseteq S$.

则称 S 为 R 的传递闭包(transitive closure),记为 $t(R)$.

定理 3.7.4 设 $R \in \mathscr{F}(X \times X)$,则 $t(R) = \bigcup_{k=1}^{\infty} R^k$.

证明 (1)显然 $\bigcup_{k=1}^{\infty} R^k \supseteq R$. 下面证明 $\bigcup_{k=1}^{\infty} R^k$ 是传递的.

$$\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} R^k\right) \circ \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} R^j\right) = \bigcup_{k=1}^{\infty}\left(R^k \circ \bigcup_{j=1}^{\infty} R^j\right) = \bigcup_{k=1}^{\infty}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} R^j \circ R^k\right)$$

$$= \bigcup_{m=2}^{\infty}\left(\bigcup_{k+j=m} R^{k+j}\right) \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} R^m.$$

(2)设 Q 是任意包含 R 的传递关系. 由 $Q \supseteq R$ 及定理 3.4.2(1)，得

$$Q^k \supseteq R^k,\ \forall k \in \mathbf{N}$$

又由 Q 的传递性及定理 3.4.2(1)，可以推出

$$Q \supseteq Q^k,\ \forall k \in \mathbf{N}$$

故有

$$Q \supseteq R^k,\ \forall k \in \mathbf{N}$$

由 k 的任意性知

$$Q \supseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} R^k$$

□

定理 3.7.5　设 $R, R_1, R_2 \in \mathscr{F}(X \times X)$，则：

(1) $t(I) = I$;

(2) $R_1 \subseteq R_2 \Rightarrow t(R_1) \subseteq t(R_2)$;

(3) $R^2 \subseteq R \Rightarrow t(R) = R$;

(4) $(t(R))^{-1} = t(R^{-1})$;

(5) $R^{-1} = R \Rightarrow (t(R))^{-1} = t(R)$.

证明　只证(4)，其余易证. 由定理 3.7.4，定理 3.1.1(3)及定理 3.4.2(2)可得

$$(t(R))^{-1} = \left(\bigcup_{k\in\mathbf{N}} R^k\right)^{-1} = \bigcup_{k\in\mathbf{N}} (R^k)^{-1} = \bigcup_{k\in\mathbf{N}} R^{-k} = t(R^{-1}).$$

□

定理 3.7.6　设 $R \in \mathscr{F}(X \times X)$，则 $t(R) = \bigcup_{k=1}^{n} R^k \Leftrightarrow \bigcup_{k=1}^{n} R^k \supseteq R^{n+1}$.

证明　必要性 $t(R) = \bigcup_{k=1}^{n} R^k \Rightarrow t(R) = \bigcup_{k=1}^{n} R^k = \bigcup_{k=1}^{\infty} R^k \supseteq R^{n+1}$. (由定理3.7.4)

充分性　设 $\bigcup_{k=1}^{n} R^k \supseteq R^{n+1}$，下面归纳证明

$$\forall l \in \mathbf{N},\ \bigcup_{k=1}^{n} R^k \supseteq R^{n+l}$$

事实上，当 $l=1$ 时，由已知成立；假设 $l=m$ 成立，即 $\bigcup_{k=1}^{n} R^k \supseteq R^{n+m}$，从而由定理 3.4.2(1)得

$$R \circ \left(\bigcup_{k=1}^{n} R^k\right) = \bigcup_{k=1}^{n} R^{k+1} \supseteq R^{n+m+1}$$

故

$$\bigcup_{k=1}^{n} R^k = \bigcup_{k=1}^{n+1} R^k \supseteq \bigcup_{k=1}^{n} R^{k+1} \supseteq R^{n+m+1}$$

即当 $l=m+1$ 时成立. 由数学归纳法原理得证. 于是

$$t(R)=\bigcup_{k\in\mathbf{N}} R^k=\left(\bigcup_{k=1}^{n} R^k\right)\cup\left(\bigcup_{k=n+1}^{\infty} R^k\right)=\bigcup_{k=1}^{n} R^k. \qquad \square$$

定理 3.7.7 设 $R\in\mathscr{F}(X\times X)$ 且 X 只有 n 个元素, 即 $R\in[0,1]^{n\times n}$, 则

$$t(R)=\bigcup_{k=1}^{n} R^k.$$

证明 设 $R=(r_{ij})_{n\times n}\in[0,1]^{n\times n}$, 则由定理 3.7.6 只需证明

$$\bigcup_{k=1}^{n} R^k\supseteq R^{n+1}.$$

记 $R^k=(r_{ij}^{(k)})_{n\times n}$, 则 $\forall i,j=1,2,\cdots,n$,

$$\begin{aligned}
r_{ij}^{(n+1)}&=\bigvee_{j_1=1}^{n}\{r_{ij_1}\wedge r_{j_1j}^{(n)}\}=\bigvee_{j_1=1}^{n}\left\{r_{ij_1}\wedge\left(\bigvee_{j_2=1}^{n}\{r_{j_1j_2}\wedge r_{j_2j}^{(n-1)}\}\right)\right\}\\
&=\bigvee_{j_1=1}^{n}\bigvee_{j_2=1}^{n}\{r_{ij_1}\wedge r_{j_1j_2}\wedge r_{j_2j}^{(n-1)}\}\\
&=\bigvee_{j_1=1}^{n}\cdots\bigvee_{j_n=1}^{n}\{r_{ij_1}\wedge r_{j_1j_2}\wedge\cdots\wedge r_{j_nj}\}=r_{ij_1'}\wedge r_{j'_1j'_2}\wedge\cdots\wedge r_{j'_nj}
\end{aligned}$$

显然下标 $j_1',j_2',\cdots,j_n',j$ 中有相同者, 不妨设 $j_q'=j_p'(q<p)$. 于是消去 $p-q$ 个元素后, 有

$$r_{ij}^{(n+1)}\leqslant r_{ij_1'}\wedge\cdots\wedge r_{j'_{q-1}j'_q}\wedge r_{j'_pj'_{p+1}}\wedge\cdots\wedge r_{j'_nj}\leqslant r_{ij}^{(m)}$$

其中 $m=n+1-(p-q)\leqslant n$, 从而

$$r_{ij}^{(n+1)}\leqslant r_{ij}^{(m)}\leqslant\bigvee_{k=1}^{n} r_{ij}^{(k)}$$

因此

$$R^{n+1}\subseteq\bigcup_{k=1}^{n} R^k. \qquad \square$$

定理 3.7.8 设 $R\in[0,1]^{n\times n}$, 则存在 $m,l\in\mathbf{N}$, 使得对序列 $R^1,R^2,\cdots,R^s,\cdots$

$$R^{m+kl+i}=R^{m+i} \tag{3.7.3}$$

成立, 其中 $k\geqslant 0$, $0\leqslant i\leqslant l-1$, m,l 是使上式成立的最小整数. 从而

$$t(R)=\bigcup_{k=1}^{m+l} R^k \tag{3.7.4}$$

证明 因为 $R=(r_{ij})_{n\times n}$ 中最多只有 $p(\leqslant n^2)$ 个元素互不相同, 且这 p 个互不相同的元素只能排出 p^{n^2} 个互不相同的 n 阶 Fuzzy 矩阵. 再注意到 Fuzzy 矩阵的复合只涉及 $\wedge$, $\vee$ 运算, 而这个运算不会增加新元素. 因此, 在序列 R^1, $R^2,\cdots,R^s,\cdots$ 中最多只有 $q(\leqslant p^{n^2})$ 个矩阵互不相同, 故必有 $m(\leqslant q)$ 和 $l(0\leqslant l\leqslant q)$, 使

$$R^{m+l}=R^m$$

成立，其中 m,l 是使上式成立的最小整数. 现任取 $j\geqslant m$，则必有 $k\geqslant 0$ 和 $i(0\leqslant i\leqslant l-1)$，使 $j=m+kl+i$. 由 $R^{m+l}=R^m$ 立即可得

$$R^{m+kl+i}=R^{m+(k-1)l+i}=\cdots=R^{m+i}$$

从而

$$t(R)=\bigcup_{k=1}^{\infty}R^k=\bigcup_{k=1}^{m+l}R^k.$$

□

定理 3.7.8 中的 l 常称为周期.

推论 3.7.1 若 $R\in[0,1]^{n\times n}$ 是弱自反的，则 R 是 1 周期的 ($l=1$)，即存在 $m\geqslant 1$，使得 $i\in\mathbf{N}$，成立 $R^{m+i}=R^m$，且 $t(R)=R^m$.

证明 由定理 3.7.8 知，存在 m 和 l，使 $R^{m+kl+i}=R^{m+i}$，其中 $k\geqslant 0$，$0\leqslant i\leqslant l-1$，故 $R^m=R^{m+l}=\cdots=R^{m+kl}=\cdots$. 因为 R 是弱自反的，由定理 3.5.2(3) 知，$R^1\subseteq R^2\subseteq\cdots\subseteq R^s\subseteq\cdots$，从而必有 m 使

$$R^1\subseteq R^2\subseteq\cdots\subseteq R^m=R^{m+1}=\cdots$$

这里 m 是使 $R^{m+l}=R^m$ 成立的最小整数，$l=1$. 由定理 3.7.8 即得 $t(R)=R^m$.

□

例 3.7.3 设 $R=\begin{bmatrix}0.3 & 1.0\\ 0.8 & 0.1\end{bmatrix}$，容易验证

$$R^2=\begin{bmatrix}0.8 & 0.3\\ 0.3 & 0.8\end{bmatrix},\quad R^3=\begin{bmatrix}0.3 & 0.8\\ 0.8 & 0.3\end{bmatrix},\quad R^4=\begin{bmatrix}0.8 & 0.3\\ 0.3 & 0.8\end{bmatrix}$$

以后 $\begin{bmatrix}0.3 & 0.8\\ 0.8 & 0.3\end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix}0.8 & 0.3\\ 0.3 & 0.8\end{bmatrix}$ 交替出现，按周期改变 ($m=2$，$l=2$). 即

$$R^2=R^4=R^6=\cdots;\ R^3=R^5=R^7=\cdots.$$

□

例 3.7.4 设

$$R=\begin{bmatrix}0.90 & 0.50 & 0.30\\ 0.20 & 0.40 & 0.95\\ 0.80 & 0.10 & 0.25\end{bmatrix}$$

容易验证

$$R^2=\begin{bmatrix}0.90 & 0.50 & 0.50\\ 0.80 & 0.40 & 0.40\\ 0.80 & 0.50 & 0.30\end{bmatrix},\quad R^3=\begin{bmatrix}0.90 & 0.50 & 0.50\\ 0.80 & 0.50 & 0.40\\ 0.80 & 0.50 & 0.50\end{bmatrix}$$

$$R^4=\begin{bmatrix}0.90 & 0.50 & 0.50\\ 0.80 & 0.40 & 0.40\\ 0.80 & 0.50 & 0.30\end{bmatrix}=R^5=R^6=\cdots$$

故 $m=4$，$l=1$.

□

由例 3.7.4 可以看出 R 不是弱自反的，但 $l=1$，这说明推论 3.7.1 中的条件是充分的，并不必要. 定理 3.7.8 告诉我们，对于 $R\in[0,1]^{n\times n}$，只需要经过有限的 m 次复合运算，就可以得到 $t(R)$. 但是定理 3.7.8 并未给出 m 大小的估计式. 下面的定理解决了这个问题.

定理 3.7.9 设 $R\in[0,1]^{n\times n}$ 是弱自反的，则 $t(R)=R^m$，$\forall m\geqslant n$.

证明 由于 R 是弱自反的，故根据定理 3.5.2(3)得

$$R\subseteq R^2\subseteq\cdots\subseteq R^n\subseteq\cdots$$

再由定理 3.7.7 和定理 3.7.4，当 $m\geqslant n$ 时，有

$$t(R)=\bigcup_{k=1}^{n}R^k=R^n\subseteq R^m\subseteq\bigcup_{k=1}^{\infty}R^k=t(R)$$

所以 $t(R)=R^m$，$\forall m\geqslant n$. □

由定理 3.7.9，求 $t(R)$ 采用平方法

$$R\to R^2\to(R^2)^2\to\cdots\to R^{2^k}$$

令 $2^k\geqslant n$，故 $k\geqslant\log_2 n$，这时 $t(R)=R^{2^k}$.

用平方法只需要计算 $[\log_2 n]+1$ 次(复合)便得 $t(R)$. 例如 $n=30$，平方法只需 5 次复合计算便得 $t(R)$，这时计算出 $R^{2^5}=R^{32}(=R^{30})$.

例 3.7.5 设

$$R=\begin{bmatrix}1 & 0.3 & 0.1 & 0.4 & 0.8 & 0.7 & 0.6\\ 0.3 & 1 & 0.5 & 0.9 & 0.6 & 0.8 & 0.9\\ 0.1 & 0.5 & 1 & 0.7 & 0.6 & 0.2 & 0.1\\ 0.4 & 0.9 & 0.7 & 1 & 0.5 & 0.9 & 0.4\\ 0.8 & 0.6 & 0.6 & 0.5 & 1 & 0.7 & 0.5\\ 0.7 & 0.8 & 0.5 & 0.9 & 0.7 & 1 & 0.4\\ 0.6 & 0.9 & 0.1 & 0.4 & 0.5 & 0.4 & 1\end{bmatrix}$$

显然 R 是自反的和对称的. 用平方法求 $t(R)$

$$R^2=R\circ R=\begin{bmatrix}1 & 0.7 & 0.6 & 0.7 & 0.8 & 0.7 & 0.6\\ 0.7 & 1 & 0.7 & 0.9 & 0.7 & 0.9 & 0.9\\ 0.6 & 0.7 & 1 & 0.7 & 0.6 & 0.7 & 0.5\\ 0.7 & 0.9 & 0.7 & 1 & 0.7 & 0.9 & 0.9\\ 0.8 & 0.7 & 0.6 & 0.7 & 1 & 0.7 & 0.6\\ 0.7 & 0.9 & 0.7 & 0.9 & 0.7 & 1 & 0.8\\ 0.6 & 0.9 & 0.5 & 0.9 & 0.6 & 0.8 & 1\end{bmatrix}$$

$$R^4=R^2\circ R^2=\begin{bmatrix}1&0.7&0.7&0.7&0.8&0.7&0.7\\0.7&1&0.7&0.9&0.7&0.9&0.9\\0.7&0.7&1&0.7&0.7&0.7&0.7\\0.7&0.9&0.7&1&0.7&0.9&0.9\\0.8&0.7&0.7&0.7&1&0.7&0.7\\0.7&0.9&0.7&0.9&0.7&1&0.9\\0.7&0.9&0.7&0.9&0.7&0.9&1\end{bmatrix}$$

$$R^8=R^4\circ R^4=\begin{bmatrix}1&0.7&0.7&0.7&0.8&0.7&0.7\\0.7&1&0.7&0.9&0.7&0.9&0.9\\0.7&0.7&1&0.7&0.7&0.7&0.7\\0.7&0.9&0.7&1&0.7&0.9&0.9\\0.8&0.7&0.7&0.7&1&0.7&0.7\\0.7&0.9&0.7&0.9&0.7&1&0.9\\0.7&0.9&0.7&0.9&0.7&0.9&1\end{bmatrix}$$

$R^8=R^4$，由定理 3.7.9 知 $t(R)=R^4$. □

§3.8 Fuzzy 等价关系与 Fuzzy 相似关系

3.8.1 Fuzzy 等价关系与 Fuzzy 相似关系

定义 3.8.1 设 $R\in\mathscr{F}(X\times X)$，则：

(1) R 称为 X 上的 Fuzzy 相似关系(fuzzy similarity relation or fuzzy tolerance relation)，如果 R 满足自反性和对称性；

(2) R 称为 X 上的 Fuzzy 等价关系(fuzzy equivalence relation)，如果 R 满足自反性、对称性和传递性.

定理 3.8.1 设 $R\in\mathscr{F}(X\times X)$，则 R 是自反的(对称的，传递的)充分必要条件是：$\forall\alpha\in[0,1]$，R_α 是自反的(对称的，传递的).

证明 必要性

(1)设 Fuzzy 关系 R 是自反的，则 $\forall\alpha\in[0,1]$，由于 $R\supseteq I$，有 $\forall x\in X$，$R(x,x)\geqslant I(x,x)=1\geqslant\alpha$，所以 $(x,x)\in R_\alpha$，即 R_α 是自反的.

(2)设 Fuzzy 关系 R 是对称的，则 $\forall\alpha\in[0,1]$

$$\forall x,y\in X,\ (x,y)\in R_\alpha\Rightarrow R(y,x)=R(x,y)\geqslant\alpha\Rightarrow(y,x)\in R_\alpha$$

即 R_α 是对称的.

(3)设 Fuzzy 关系 R 是传递的，则 $\forall\alpha\in[0,1]$

$$\forall x,y,z\in X,(x,y)\in R_\alpha,(y,z)\in R_\alpha \Rightarrow R(x,z)\geqslant R^2(x,z)$$
$$=\bigvee_{t\in X}(R(x,t)\wedge R(t,y))$$
$$\geqslant R(x,y)\wedge R(y,z)\geqslant \alpha \Rightarrow (x,z)\in R_\alpha$$

即 R_α 是传递的.

充分性

(1)设 $\forall \alpha\in[0,1]$, R_α 是自反的,则 $\forall x\in X$, $(x,x)\in R_\alpha \Rightarrow R(x,x)\geqslant\alpha$, 由 α 的任意性推出 $R(x,x)=1$, 即 Fuzzy 关系 R 是自反的.

(2)设 $\forall \alpha\in[0,1]$, R_α 是对称的. 若存在 $x_0,y_0\in X$, 使 $R(x_0,y_0)\neq R(y_0,x_0)$, 不妨设 $R(x_0,y_0)>R(y_0,x_0)$, 则取 $R(y_0,x_0)<\alpha_0<R(x_0,y_0)$, 这样 $(x_0,y_0)\in R_\alpha$, 但 $(y_0,x_0)\overline{\in} R_{\alpha_0}$, 这与 R_{α_0} 的对称性矛盾. 从而 R 是对称的.

(3)设 $\forall \alpha\in[0,1]$, R_α 是传递的,则 $\forall x,y,z\in X$

$$R(x,y)\geqslant\alpha, R(y,z)\geqslant\alpha \Rightarrow (x,y)\in R_\alpha,(y,z)\in R_\alpha$$
$$\Rightarrow (x,z)\in R_\alpha \Rightarrow R(x,z)\geqslant\alpha$$

再由定理 3.7.1 知 R 是传递的. □

由定理 3.8.1 可以直接得到以下定理.

定理 3.8.2 设 $R\in\mathscr{F}(X\times X)$,则 R 为 X 上的 Fuzzy 等价关系(相似关系)的充分必要条件是: $\forall\alpha\in[0,1]$, R_α 是 X 上的等价关系(相似关系).

由定理 3.5.2(5)、定理 3.6.1(3)与定理 3.7.2(4)可以直接得到以下定理.

定理 3.8.3 设 $R\in\mathscr{F}(X\times X)$,若 R 为 X 上的 Fuzzy 等价关系(相似关系),则 R^n $(n\in\mathbf{N})$也是 X 上的 Fuzzy 等价关系(相似关系).

定理 3.8.4 设 R 是 X 上的 Fuzzy 等价关系, 则 $\forall x,y,z\in X$, $R(x,y)$, $R(x,z)$ 和 $R(z,y)$ 至少有两个相等.

证明 假定 $x_0,y_0,z_0\in X$, 使得 $R(x_0,y_0)$, $R(x_0,z_0)$ 和 $R(z_0,y_0)$ 互不相等. 不妨设

$$R(x_0,y_0)<R(x_0,z_0)<R(z_0,y_0)$$

则应用传递性导出

$$R(x_0,y_0)\geqslant\bigvee_{z\in X}\{R(x_0,z)\wedge R(z,y_0)\}\geqslant R(x_0,z_0)\wedge R(z_0,y_0)$$

即 $R(x_0,y_0)\geqslant R(x_0,z_0)$, 这与 $R(x_0,y_0)<R(x_0,z_0)$ 矛盾. □

3.8.2 Fuzzy 等价类与 Fuzzy 商集

定义 3.8.2 设 R 是 X 上的 Fuzzy 等价关系并且 $x\in X$, 则 R 在 x 处的截影 $R|_x$ 称为由 Fuzzy 等价关系生成的 Fuzzy 等价类(fuzzy equivalence classes),

记为 $[x]_R$. 其中 $R|_x(y) = R(x,y) = [x]_R(y)$, $y \in X$ (参见 §3.3). $\{[x]_R | x \in X\}$ 称为 X 的由 Fuzzy 等价关系 R 生成的 Fuzzy 商集(fuzzy quotient set), 记为 X/R.

例 3.8.1 设 $X=\{x_1,x_2,x_3\}$, R 是 X 上的 Fuzzy 等价关系

$$R=\begin{bmatrix} 1 & 0.9 & 0 \\ 0.9 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

则 Fuzzy 等价类为

$$[x_1]_R = \frac{1}{x_1} + \frac{0.9}{x_2} + \frac{0}{x_3}$$

$$[x_2]_R = \frac{0.9}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{0}{x_3}$$

$$[x_3]_R = \frac{0}{x_1} + \frac{0}{x_2} + \frac{1}{x_3}.$$

定理 3.8.5 设 R 是 X 上的 Fuzzy 等价关系, 则 $\forall x,y \in X$, 我们有:

(1) $R(x,y)=0 \Leftrightarrow [x]_R \cap [y]_R = \varnothing$;

(2) $\bigvee_{x \in X} [x]_R = 1$, 即 Fuzzy 集 $[x]_R$ 是正规的;

(3) $[x]_R = [y]_R \Rightarrow R(x,y) = 1$.

证明 (2)和(3)直接由定义 3.8.2 得到. 下证(1).

设 $R(x,y)=0$, 则 $\forall z \in X$

$$\begin{aligned}([x]_R \cap [y]_R)(z) &= [x]_R(z) \wedge [y]_R(z) = R(x,z) \wedge R(y,z) \\ &= R(x,z) \wedge R(z,y) \text{ (对称性)} \\ &\leqslant \bigvee_{t \in X} (R(x,t) \wedge R(t,y)) \leqslant R(x,y) = 0 \text{ (传递性)}\end{aligned}$$

于是

$$[x]_R \cap [y]_R = \varnothing.$$

反之, 设 $[x]_R \cap [y]_R = \varnothing$, 则 $\forall z \in X$, $R(x,z) \wedge R(y,z) = 0$

这时 $R(x,y) \wedge R(y,y) = 0$. 由自反性 $R(y,y)=1$ 得 $R(x,y)=0$. □

定义 3.8.3 设 R 是有限论域 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 上的 Fuzzy 等价关系, 则 R 的信息量(information quantity)被定义为

$$H(R) = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log \frac{|[x_i]_R|}{n} \tag{3.8.1}$$

其中 $|[x_i]_R|$ 是 Fuzzy 集 $[x_i]_R$ 的基数(参见 §1.4).

例 3.8.2 设 $X=\{x_1,x_2,x_3\}$, R 是 X 上的 Fuzzy 等价关系

$$R=\begin{bmatrix} 1 & 0.9 & 0 \\ 0.9 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

则
$$H(R)=-\frac{1}{3}\left(\log\frac{1.9}{3}+\log\frac{1.9}{3}+\log\frac{1}{3}\right)=0.2913.$$ □

定义 3.8.4 设 R 和 S 是有限论域 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 上的 Fuzzy 等价关系，则 R 和 S 的并熵(joint entropy)被定义为

$$H(RS)=-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log\frac{|[x_i]_R\cap[x_i]_S|}{n} \tag{3.8.2}$$

定义 3.8.5 设 R 和 S 是有限论域 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 上的 Fuzzy 等价关系，则在条件 S 下的 R 的条件熵(condition entropy)被定义为

$$H(R|S)=-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log\frac{|[x_i]_R\cap[x_i]_S|}{|[x_i]_S|} \tag{3.8.3}$$

例 3.8.3 设 $X=\{x_1,x_2,x_3\}$，R 和 S 是 X 上的 Fuzzy 等价关系，并且

$$R=\begin{bmatrix}1 & 0.9 & 0\\ 0.9 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad S=\begin{bmatrix}1 & 0.6 & 0.4\\ 0.6 & 1 & 0.4\\ 0.4 & 0.4 & 1\end{bmatrix}$$

则

$$H(RS)=-\frac{1}{3}\left(\log\frac{1.6}{3}+\log\frac{1.6}{3}+\log\frac{1}{3}\right)=0.1456$$

$$H(R|S)=-\frac{1}{3}\left(\log\frac{1.6}{2}+\log\frac{1.6}{2}+\log\frac{1}{1.8}\right)=0.1497.$$ □

定理 3.8.6 设 R 和 S 是有限论域 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 上的 Fuzzy 等价关系，则：

(1) $H(R)\geqslant 0$，等号成立当且仅当 $R=X\times X$；

(2) $H(RS)\geqslant\max\{H(R),H(S)\}$，特别地 $H(RR)=H(R)$；

(3) $R\subseteq S\Leftrightarrow H(RS)=H(R)\Leftrightarrow H(S|R)=0$.

§3.9 Fuzzy 偏序关系

定义 3.9.1 设 R 是 X 上的 Fuzzy 关系，则：

(1)称 R 是 Fuzzy 伪序关系(fuzzy pseudo-order relation)，如果 R 是反自反的、反对称的和传递的；

(2)称 R 是 Fuzzy 预序关系(fuzzy pre-order relation)，如果 R 是自反的、传递的；

(3)称 R 是 Fuzzy 拟序关系(fuzzy quasi-order relation)，如果 R 是自反的、反对称的；

(4)称 R 是 Fuzzy 偏序关系(fuzzy partial order relation)，如果 R 是自反的、

反对称的和传递的(Zadeh, 1971);

(5)称 R 是 Fuzzy 线性序关系(fuzzy linear order relation),如果 R 是 Fuzzy 偏序关系并且 $(\forall x,y \in X)(x \neq y \Rightarrow R(x,y) > 0$ 或 $R(y,x) > 0)$ (Dubois, Prade, 1980; Zadeh, 1971).

定理 3.9.1 设 $R \in \mathscr{F}(X \times X)$,则 R 是反对称的充分必要条件是: $\forall \alpha \in (0,1]$, R_α 是反对称的.

证明 必要性 设 $R \in \mathscr{F}(X \times X)$反对称,则 $\forall \alpha \in (0,1]$,

$$\forall x,y \in X,(x,y) \in R_\alpha,(y,x) \in R_\alpha \Rightarrow R(x,y) \geqslant \alpha, R(y,x) \geqslant \alpha$$
$$\Rightarrow R(x,y) \wedge R(y,x) \geqslant \alpha > 0 \Rightarrow x = y$$

充分性 设 $\forall \alpha \in (0,1]$, R_α 是反对称的,则

$$\forall x,y \in X, R(x,y) \wedge R(y,x) = \alpha > 0 \Rightarrow R(x,y) \geqslant \alpha, R(y,x) \geqslant \alpha$$
$$\Rightarrow (x,y) \in R_\alpha,(y,x) \in R_\alpha \Rightarrow x = y \quad \square$$

推论 3.9.1 设 $R \in \mathscr{F}(X \times X)$,则 R 是 Fuzzy 偏序关系(Fuzzy 拟序关系)的充分必要条件是: $\forall \alpha \in (0,1]$, R_α 是偏序关系(拟序关系).

一般说来,为了建立某有限集 X 的元素之间的 Fuzzy 偏序关系,首先应建立 X 上的 Fuzzy 拟序关系,再由 $t(R)$ 得到 X 上的 Fuzzy 偏序关系.

例 3.9.1 设 $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ (5 个旅游点集合), $R \in \mathscr{F}(X \times X)$, 并且

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0.95 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.85 & 0.75 & 1 & 0.95 & 0.90 \\ 0.90 & 0.80 & 0 & 1 & 0 \\ 0.90 & 0.80 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其中, r_{ij} 表示第 i 个旅游点 x_i 不优于(次于或等同于)第 j 个旅游点 x_j 的程度. 显然, R 是 X 上的 Fuzzy 拟序关系. 容易计算 R 的传递闭包

$$t(R) = R^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0.95 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.90 & 0.90 & 1 & 0.95 & 0.90 \\ 0.90 & 0.90 & 0 & 1 & 0 \\ 0.90 & 0.90 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

这时 $t(R)$ 是 Fuzzy 偏序关系,且与 R “差别”较少,故可以依据 $t(R)$ 进行排序,并将结果表示在图 3.9.1 中,图中箭头是由“好的(前者)”指向“次的(后者)”,且后者不优于前者的程度标明在二者的连接弧线上.

从图 3.9.1 可以看出: x_2 是最佳旅游点, x_1 次之, x_3 最差.

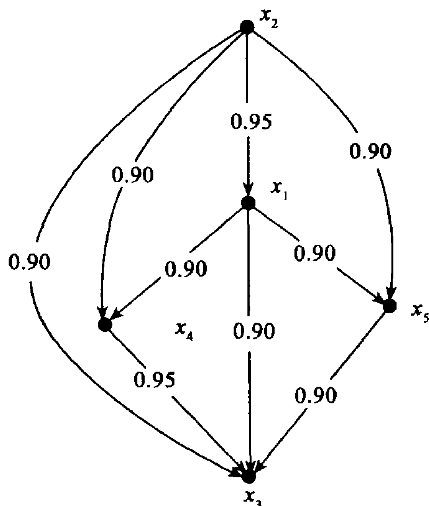


图 3.9.1

例 3.9.2 设 $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$，$R\in\mathscr{F}(X\times X)$，并且

$$R=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0.1 & 1 & 0 & 0.1 & 0\\ 0.1 & 0.8 & 1 & 0 & 0\\ 0.2 & 0 & 0.2 & 1 & 0\\ 0.5 & 0.3 & 0.4 & 0.5 & 1\end{bmatrix}$$

显然，R 是 X 上的 Fuzzy 拟序关系. 容易计算 R 的传递闭包

$$t(R)=R^2=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0.1 & 1 & 0.1 & 0.1 & 0\\ 0.1 & 0.8 & 1 & 0.1 & 0\\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 1 & 0\\ 0.5 & 0.4 & 0.4 & 0.5 & 1\end{bmatrix}$$

$t(R)$ 显然不是反对称的. □

对于例 3.9.1 中的 R，R 是反对称的，且 $t(R)$ 也是反对称的. 然而例 3.9.2 中的 R 是反对称的，但 $t(R)$ 不是反对称的. 那么，在什么条件下能有：若 R 是 Fuzzy 拟序关系，使得 $t(R)$ 是 X 上的 Fuzzy 偏序关系呢？为了回答这个问题，先引入如下概念，并给出几个有用的结果.

定义 3.9.2 设 X^* 是 X 的非空子集，$R\in\mathscr{F}(X\times X)$，$R^*\in\mathscr{F}(X^*\times X^*)$，若 $\forall x,y\in X^*$，都有 $R^*(x,y)=R(x,y)$，称 R^* 是 R 在 X^* 上的限制，记

做 $R|_{X^*}$.

定理 3.9.2 设 X^* 是 X 的非空子集，$R^* = R|_{X^*}$.

(1)若 R 是自反的(反自反的)，则 R^* 也是自反的(反自反的)；

(2)若 R 是对称的(反对称的)，则 R^* 也是对称的(反对称的)；

(3)若 R 是传递的，则 R^* 也是传递的.

证明 只证(3)，其他类似可证.

$\forall x,y \in X^*$，由 R 的传递性得

$$R^*(x,y)=R(x,y) \geqslant R \circ R(x,y)=\bigvee_{z\in X}\{R(x,z) \wedge R(z,y)\}$$
$$\geqslant \bigvee_{z\in X^*}\{R(x,z) \wedge R(z,y)\}=R^* \circ R^*(x,y)$$

故 R^* 是传递的. □

由定理 3.9.2 可得，若 R 是 Fuzzy 等价关系，则 R^* 也是 Fuzzy 等价关系；若 R 是 Fuzzy 偏序关系，则 R^* 也是 Fuzzy 偏序关系.

定义 3.9.3 设 $R \in \mathscr{F}(X \times X)$是 X 上的 Fuzzy 拟序关系，$x \in X$，若 $\forall y \in X, y \neq x$，都有 $R(x,y)=0$，称 x 是 X 上关于 R 的优越元(superiority element)；X 上关于 R 的优越元的全体称为 X 关于 R 的优越集(superiority set)，记做 $R(X)$. 即

$$R(X)=\{x \mid \forall y \in X, y \neq x, R(x,y)=0\} \tag{3.9.1}$$

定理 3.9.3 若 R 是有限集 X 上的 Fuzzy 偏序关系，则 $R(X) \neq \varnothing$.

证明 对 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 中元素个数 n 使用数学归纳法证明. 设 $n=2$，则或 $R=\begin{bmatrix}1 & 0\\ a & 1\end{bmatrix}$，或 $R=\begin{bmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ (其中 $a,b \in [0,1]$)，对于前者，$\{x_1\} \subseteq R(X) \neq \varnothing$，对于后者，$\{x_2\} \subseteq R(X) \neq \varnothing$. 现设 X 中有 $n-1$ 个元素时定理的结论是正确的. 今设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，且 $R=(r_{ij})_{n\times n}$ 是 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 上的 Fuzzy 偏序关系，由定理 3.9.2，$R^*=(r_{ij})_{(n-1)\times(n-1)}$ 是 $X^*=\{x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}\}$ 上的 Fuzzy 偏序关系，由数学归纳法假设 $R^*(X^*) \neq \varnothing$，设 $x_k \in R^*(X^*)$.

(1)如果 $r_{kn}=0$，则 $x_k \in R(X) \neq \varnothing$；

(2)如果 $r_{kn}>0$，因为 R 是反对称的，故 $r_{nk}=0$. 又因 R 是传递的，且 $x_k \in R^*(X^*)$，故对于任意 $l \neq k$，且 $l<n$ 都有

$$0=r_{kl} \geqslant \bigvee_{j=1}^{n}\{r_{kj} \wedge r_{jl}\}=r_{kn} \wedge r_{nl} \geqslant 0$$

又 $r_{kn}>0$，故只有 $r_{nl}=0$. 从而对于一切 $l \neq n$，都有 $r_{nl}=0$，即

$$x_n \in R(X) \neq \varnothing.$$ □

定理 3.9.3 中 X 是有限集的假设是不可或缺的.

例 3.9.3 设 $R \in \mathscr{F}(\mathbf{N}\times\mathbf{N})$,且

$$R(m,n)=\begin{cases}1, & m=n\\ 0.5, & m<n\\ 0, & m>n\end{cases}$$

显然 R 是自反的、反对称的,又 $\forall m,n,k\in\mathbf{N}$

$$R(m,n)\geqslant 0.5, R(n,k)\geqslant 0.5 \Rightarrow m\leqslant n, n\leqslant k \Rightarrow m\leqslant k \Rightarrow R(m,k)\geqslant 0.5$$

$$R(m,n)=1, R(n,k)=1 \Rightarrow m=n, n=k \Rightarrow m=k \Rightarrow R(m,k)=1$$

由定理 3.7.1 知,R 是传递的. 然而 $\forall m\in\mathbf{N}$, 都有 $m<n$, 使 $R(m,n)=0.5\neq 0$, 即 $R(X)=\varnothing$. □

定理 3.9.3 中 R 是 X 上的 Fuzzy 偏序关系的条件是不必要的. 如例 3.9.2 中的 R 不是传递的,但 $x_1\in R(X)=\varnothing$.

由定理 3.9.2 和定理 3.9.3,可以给出由有限集 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 上的 Fuzzy 偏序关系 R 对其中元素进行排序的如下方法. 即先将 X,R 分别记做 X_1, R_1, 并将 $R_1(X_1)$ 中元素排在最前;再记 $X_2=X_1\backslash R_1(X_1)$, 若 $X_2\neq\varnothing$, 则记 $R_2=R|_{X_2}$, 将 $R_2(X_2)$ 中元素排在第二位;继续上述过程,直至有 $m\leqslant n$, 使 $X_{m+1}=\varnothing$.

例 3.9.4 设 $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$, $R\in\mathscr{F}(X\times X)$,并且

$$R=\begin{bmatrix}1 & 0.8 & 0.2 & 0.6 & 0.6 & 0.4\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0.6 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0.5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0.6 & 0.4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

容易验证, R 是 X 上的 Fuzzy 偏序关系. 记 $R_1\triangleq R, X_1\triangleq X$, 则 $R_1(X_1)=\{x_5,x_6\}$, $R_2(X_2)=\{x_2,x_3,x_4\}$, $R_3(X_3)=\{x_1\}$, $X_4=\varnothing$. 由此获得 X 上各元素的排序表示如图 3.9.2 所示. □

单纯地找出 $R_1(X_1)$, $R_2(X_2)$, $\cdots$, $R_m(X_m)$ $(X_{m+1}=\varnothing)$ 不需要 R_1 是 X_1 的 Fuzzy 偏序关系。例如,例 3.9.1 中的 R 并不是 $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$ 上的 Fuzzy 偏序关系,也记 $R_1\triangleq R, X_1\triangleq X$, 得到 $R_1(X_1)=\{x_2\}$, $R_2(X_2)=\{x_1\}$, $R_3(X_3)=\{x_4,x_5\}$, $R_4(X_4)=\{x_3\}(X_5=\varnothing)$.

定义 3.9.4 设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$, $R=(r_{ij})_{n\times n}$ 是 X 上的 Fuzzy 拟序关系,若对 X 的任意非空子集 X^*, 记 $R^*=R|_{X^*}$, 都有 $R^*(X^*)\neq\varnothing$, 称 R 在

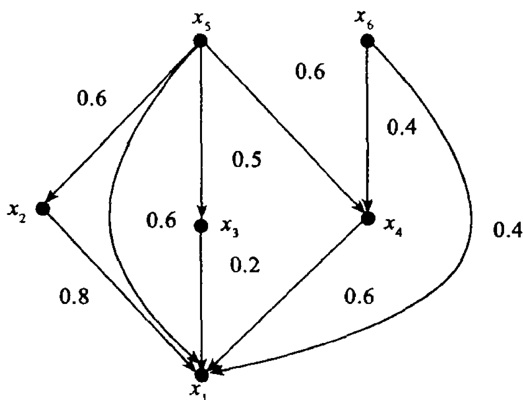


图 3.9.2

X 上是可偏序化的.

定理 3.9.4　(1) 任意有限集 X 上的任何 Fuzzy 偏序关系 R，都是可偏序化的.

(2)若 $R=(r_{ij})_{n\times n}$ 是上三角阵或下三角阵时，R 在 X 上是可偏序化的.

证明　只证(1),(2)易证.

由定理 3.9.3 知 $R(X)\neq\varnothing$，又由定理 3.9.2,对于任意 $\varnothing\neq X^*\subseteq X$，令 $R^*=R|_{X^*}$，则 R^* 是 X^* 上的 Fuzzy 偏序关系,从而 $R^*(X^*)\neq\varnothing$，故 R 在 X 上是可偏序化的. □

定理 3.9.5　设 $R=(r_{ij})_{n\times n}$ 是 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 上的 Fuzzy 拟序关系，R 在 X 上是可偏序化的充分必要条件是:存在 $m\leqslant n$ 使得 $\forall k(1\leqslant k\leqslant m)$，$X_k=X_{k-1}\backslash R_{k-1}(X_{k-1})\neq\varnothing$，$R_k(X_k)\neq\varnothing$，且 $X_{m+1}=X_m\backslash R_m(X_m)=\varnothing$. 其中 $X_1=X,R_1=R,R_k=R|_{X_k}(k>1)$.

证明　必要性是明显的,下证充分性. 若 $X^*=X$，由假设即知 $R^*(X^*)\neq\varnothing$. 设 X^* 是 X 的非空真子集,并注意到:若 $x_i\in R_k(X_k)$，$x_j\in R_l(X_l)$，当 $k\leqslant l$ 时，$r_{ij}=0$. 现设 $X^*=\{x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_k}\}(1\leqslant k<n)$，由假设,对任意 $s(1\leqslant s\leqslant k)$，$\exists j_s$，使 $x_{i_s}\in R_{j_s}(X_{j_s})$，设 $\min\{j_1,j_2,\cdots,j_k\}=j_t(x_{i_t}\in R_{j_t}(X_{j_t}))$，则当 $s\neq t$ 时，$r_{i_ti_s}=0$，从而 $x_{i_t}\in R^*(X^*)\neq\varnothing$. □

定理 3.9.6　设 $R=(r_{ij})_{n\times n}$ 是 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 上的 Fuzzy 拟序关系，R 在 X 上是可偏序化的充分必要条件是 $R^2=\left(r_{ij}^{(2)}\right)_{n\times n}$ 在 X 上是可偏序化的.

证明　必要性　由定理 3.9.5,记 $X_1=X,R_1=R$，则 $R_1(X_1)\neq\varnothing$，且对 $X_k=X_{k-1}\backslash R_{k-1}(X_{k-1})\neq\varnothing$，$R_k=R|_{X_k}$，$R_k(X_k)\neq\varnothing$ (其中 $1<k\leqslant m$，

$X_{m+1}=\varnothing$). 又记

$$J_1=\varnothing,\ J_k=\left\{j \mid x_j \in \bigcup_{s=1}^{k-1} R_s(X_s)\right\},\ 1<k\leqslant m$$

任取 $k:1\leqslant k\leqslant m$，因为 R 在 X 上是可偏序化的，故必有 $x_i\in R_k(X_k)$，且当 $l\notin J_k, l\neq i$ 时，$r_{il}=0$；又当 $l\in J_k$ 时，必有 $1\leqslant s<k$，使 $x_l\in R_s(X_s)$，故 $\forall j\notin J_k(j\notin J_s)$，也有 $r_{lj}=0$. 从而 $\forall j\notin J_k, j\neq i$，

$$r_{ij}^{(2)}=\bigvee_{l=1}^{n}(r_{il}\wedge r_{lj})=\Big(\bigvee_{l\notin J_k}(r_{il}\wedge r_{lj})\Big)\vee\Big(\bigvee_{l\in J_k}(r_{il}\wedge r_{lj})\Big)=0$$

即 $x_i\in R_k^2(X_k)\neq\varnothing$，其中 $R_k^2=R^2|_{X_k}$. 由 k 的任意性及定理 3.9.5 知 R^2 在 X 上是可偏序化的.

充分性　因为 R 是自反的，故 $R\subseteq R^2$，从而，若 $r_{ij}^{(2)}=0$，则 $r_{ij}=0$，即对 X 的任意非空子集 X^*，若 $x_i\in(R^2)^*(X^*)\neq\varnothing$，则 $x_i\in R^*(X^*)\neq\varnothing$（其中 $(R^2)^*=R^2|_{X^*}$ ）. □

定理 3.9.7　设 R 是有限集 X 上的 Fuzzy 拟序关系，$t(R)$ 是 X 上的 Fuzzy 偏序关系的充分必要条件是 R 在 X 上是可偏序化的.

证明　由定理 3.7.9 知 $t(R)=R^n$. 又由定理 3.9.6 知 R^2 在 X 上是可偏序化的充分必要条件是 R 在 X 上是可偏序化的. 故定理结论正确. □

§3.10　区间值 Fuzzy 关系与格值 Fuzzy 关系

定义 3.10.1　设 X,Y 是两个论域，若 R 是直积 $X\times Y=\{(x,y)\mid x\in X, y\in Y\}$ 上的区间值 Fuzzy 集，即

$$R:X\times Y\to I_{[0,1]}\tag{3.10.1}$$

则称 R 是 X 到 Y（或在 X 与 Y 之间）的区间值 Fuzzy 关系(interval-valued fuzzy relation)，$R(x,y)$ 表示 x 与 y 具有 R 关系的程度(为区间值). 特别地，当 $X=Y$ 时，R 称为 X 上的区间值 Fuzzy 关系. X 到 Y 的区间值 Fuzzy 关系集记为 $\mathscr{F}_I(X\times Y)$.

类似地可以讨论区间值 Fuzzy 关系的复合.

定义 3.10.2　设 $Q\in\mathscr{F}_I(X\times Y)$，$R\in\mathscr{F}_I(Y\times Z)$，则区间值Fuzzy关系 Q 和 R 的最大-$*$ 复合定义为

$$Q\circ_* R(x,z)=\bigvee_{y\in Y}\{Q(x,y)*R(y,z)\},\ \forall x\in X,\ z\in Z\tag{3.10.2}$$

其中 $*$ 是 $I_{[0,1]}$ 上的二元运算.

特别地，当 $*$ 为 t-模 $\top$ 在 $I_{[0,1]}$ 上的扩张运算(参见 §2.8)，则区间值Fuzzy

关系 Q 和 R 的最大-$\top$ 复合为

$$Q\circ_{\top}R(x,z)=\bigvee_{y\in Y}\{Q(x,y)\top R(y,z)\},\ \forall x\in X,\ z\in Z \tag{3.10.3}$$

由定义 3.10.1,我们有类似定理 3.4.1～定理 3.4.15 的结果,并且还有以下定理.

定理 3.10.1　设 $Q=[\underline{Q},\overline{Q}]\in\mathscr{F}_I(X\times Y)$, $R=[\underline{R},\overline{R}]\in\mathscr{F}_I(Y\times Z)$, 则

$$Q\circ_{\top}R(x,z)=[\underline{Q}\circ_{\top}\underline{R}(x,z),\overline{Q}\circ_{\top}\overline{R}(x,z)],\ \forall x\in X,\ z\in Z \tag{3.10.4}$$

设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$ 与 $Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$, 若 R 是 $X\times Y$ 上的区间值 Fuzzy 关系,则表示 R 的矩阵称为 $m\times n$ 阶的区间值 Fuzzy 矩阵,用 $I_{[0,1]}^{m\times n}$ 表示全体 $m\times n$ 阶的区间值 Fuzzy 矩阵. 类似地,我们有区间值 Fuzzy 矩阵的最大-$\top$ 复合.

例 3.10.1　设 $X=\{x_1,x_2\}$, $Y=\{y_1,y_2,y_3\}$, $Z=\{z_1,z_2\}$. 如果区间值 Fuzzy 关系 Q 和 R 用下面的 Fuzzy 矩阵表示,则 Q 与 R 的最大—最小复合可以依如下计算得到.

$$Q=\begin{bmatrix}[0.4,0.5] & [0.5,0.7] & [0,0.1]\\ [0.8,1] & 1 & [0.1,0.2]\end{bmatrix},\ R=\begin{bmatrix}[0.4,0.6] & [0.6,0.9]\\ [0,0.2] & 1\\ 0 & [0.5,0.8]\end{bmatrix}$$

$$Q\circ R=\begin{bmatrix}[0.4,0.5] & [0.5,0.7] & [0,0.1]\\ [0.8,1] & 1 & [0.1,0.2]\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}[0.4,0.6] & [0.6,0.9]\\ [0,0.2] & 1\\ 0 & [0.5,0.8]\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}[0.4,0.5] & [0.5,0.7]\\ [0.4,0.6] & 1\end{bmatrix}$$ □

定义 3.10.3　区间值 Fuzzy 关系 $R\in\mathscr{F}_I(X\times X)$ 称为区间值 Fuzzy 等价关系(interval-valued fuzzy equivalence relation),如果 R 满足:

(1)自反性,即 $R(x,x)=[1,1]$, $\forall x\in X$;

(2)对称性,即 $R(x,y)=R(y,x)$, $\forall x,y\in X$;

(3)传递性,即 $R\circ R\subseteq R$.

显然(3)等价于 $R(x,y)\wedge R(x,z)\leqslant_{LR}R(x,z)$, $\forall x,y,z\in X$ ($\leqslant_{LR}$ 参见 §2.5).

下设 $(L,\vee,\wedge,\leqslant)$ 为格,0 和 1 是 L 中最小元素和最大元素.

定义 3.10.4　设 X, Y 是两个论域,若

$$R:X\times Y\to L \tag{3.10.5}$$

即 $R\in\mathscr{F}_L(X\times Y)$, 则称 R 是 X 到 Y (或在 X 与 Y 之间)的格值 Fuzzy 关系或

L-Fuzzy 关系(L- fuzzy relation), $R(x,y)$ 表示 x 与 y 具有 R 关系的程度(为格值). 特别地,当 $X=Y$ 时, R 称为 X 上的 L-Fuzzy 关系.

当 $L=[0,1]$时,L-Fuzzy 关系即为 Fuzzy 关系;当 $L=I_{[0,1]}$ 时,L-Fuzzy 关系即为区间值 Fuzzy 关系.

定义 3.10.5 设 $R_1,R_2,R\in\mathscr{F}_L(X\times Y)$, 则定义:

(1) $R_1\subseteq R_2\Leftrightarrow(\forall(x,y)\in X\times Y)(R_1(x,y)\leqslant R_2(x,y))$;

(2) $(R_1\cup R_2)(x,y)=R_1(x,y)\vee R_2(x,y)$,

$(R_1\cap R_2)(x,y)=R_1(x,y)\wedge R_2(x,y)$, $\forall(x,y)\in X\times Y$;

(3) $R^{-1}(x,y)=R(y,x)$, $\forall(x,y)\in X\times Y$.

类似地,可以讨论 L-Fuzzy 关系的复合.

定义 3.10.6 设 L 是完备格, $Q\in\mathscr{F}_L(X\times Y)$, $R\in\mathscr{F}_L(Y\times Z)$,则 L-Fuzzy关系 Q 和 R 的复合运算为

$$Q\circ R(x,z)=\bigvee_{y\in Y}\{Q(x,y)\wedge R(y,z)\},\ \forall x\in X,\ z\in Z \quad (3.10.6)$$

定理 3.10.2 设 L 是可分配的完备格, $R_1,R_2,R\in\mathscr{F}_L(X\times Y)$, S_1,S_2, $S\in\mathscr{F}_L(Y\times Z)$ 并且 $T\in\mathscr{F}_L(Z\times W)$, 则:

(1) $(R\circ S)^{-1}=S^{-1}\circ R^{-1}$;

(2) $R_1\subseteq R_2\Rightarrow R_1\circ S\subseteq R_2\circ S$, $S_1\subseteq S_2\Rightarrow R\circ S_1\subseteq R\circ S_2$;

(3) $(R\circ S)\circ T=R\circ(S\circ T)$;

(4) $R\circ(S_1\cup S_2)=(R\circ S_1)\cup(R\circ S_2)$,

$(R_1\cup R_2)\circ S=(R_1\circ S)\cup(R_2\circ S)$;

(5) $R\circ(S_1\cap S_2)\subseteq(R\circ S_1)\cap(R\circ S_2)$,

$(R_1\cap R_2)\circ S\subseteq(R_1\circ S)\cap(R_2\circ S)$.

证明 只证明(4)中第一式,其他类似可证. 由于 $\forall(x,z)\in X\times Z$,

$$\begin{aligned}[R\circ(S_1\cup S_2)](x,z)&=\bigvee_{y\in Y}\{R(x,y)\wedge(S_1(y,z)\vee S_2(y,z))\}\\&=\left(\bigvee_{y\in Y}\{R(x,y)\wedge S_1(y,z)\}\right)\vee\left(\bigvee_{y\in Y}\{R(x,y)\wedge S_2(y,z)\}\right)\\&=(R\circ S_1)(x,z)\vee(R\circ S_2)(x,z)\\&=[(R\circ S_1)\cup(R\circ S_2)](x,z)\end{aligned}$$

则得证. □

定义 3.10.7 L-Fuzzy 关系 $R\in\mathscr{F}_L(X\times X)$ 称为 L-Fuzzy 等价关系(L-fuzzy equivalence relation),如果 R 满足:

(1)自反性,即 $R(x,x)=1$, $\forall x\in X$;

(2) 对称性,即 $R(x,y)=R(y,x)$, $\forall x,y\in X$;

(3) 传递性,即 $R \circ R \subseteq R$.
显然(3)等价于 $R(x,y) \wedge R(x,z) \leqslant R(x,z), \forall x,y,z \in X$.

类似地可以在 L 上引入 α 算子: $a\alpha b = \sup\{x \mid a \wedge x \leqslant b\}, a,b \in L$, 并且讨论 L-Fuzzy 关系的最小-α 复合运算及其运算性质和自反性、对称性与传递性等. 设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$ 与 $Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$, 若 R 是 $X \times Y$ 上的 L-Fuzzy 关系,则表示 R 的矩阵称为 $m \times n$ 阶的 L-Fuzzy 矩阵,用 $L^{m\times n}$ 表示全体 $m \times n$ 阶的 L-Fuzzy 矩阵. 类似地也可以讨论 L-Fuzzy 矩阵的复合运算及其性质. 对于这些内容可以查阅相关文献(Kehagias, Konstantinidou, 2003; Klir, Yuan, 1991; Nola, Pedrycz, et al., 1995; Sanchez, 1976,1979; 胡宝清, 1988b; 张文修, 1984).

§3.11 Fuzzy 图

有限的 Fuzzy 关系除了用矩阵表示外,还可以用 Fuzzy 关系图表示. 下面我们讨论的是满足一定条件的 Fuzzy 关系图.

定义 3.11.1 设 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_p\}$ 是有限点集, R 是 V 上具有反自反性和对称性的 Fuzzy 关系,则称序对 $G=(V,R)$ 为 Fuzzy(无向)图(fuzzy graph). 若 $E=\{e_k=v_iv_j \mid R(v_i,v_j)>0, v_i,v_j \in V\}$, 则称 $G^*=(V,E)$ 是 $G=(V,R)$ 的基础图(basic graph).

当 $e_k=v_iv_j$ 时,为了方便, $R(v_i,v_j)$ 可以记为 $R(e_k)$ 或 r_{ij}. V 中元素 $v_1,v_2,\cdots,v_p$ 称为 G 和 G^* 的顶点, V 为顶点集, E 中的元素称为 G 和 G^* 的边或枝, E 称为 G 和 G^* 的边集或枝集. 若 $e_k \in E$, 且 $e_k=v_iv_j$, 则称 v_i 与 v_j 通过 e_k 在 G 中连接,并称 v_i 与 v_j 是邻接的,称 v_i 与 v_j 是 e_k 的端点.

定义 3.11.2 设 $G=(V,R)$ 是 Fuzzy 图, $G^*=(V,E)$ 是 $G=(V,R)$ 的基础图,如果 G^* 是连通图,则称 G 是连通图(connected graph),并将 G^* 中连接 u 与 v 的路,称为 G 中连接 u 与 v 的路. 否则称为 G 是不连通图.

定义 3.11.3 设 $G=(V,R)$ 是连通的 Fuzzy 图, $u,v \in V$, 且 $u \neq v$, P 是 G^* 中连接 u 与 v 的路,用 $E(P)$ 表示 P 中全部边的集,记

$$S(P) = \bigwedge_{e \in E(P)} R(e) \tag{3.11.1}$$

称 $S(P)$ 是路 P 的强度(degree of path P). 又设在 G 中共有 l 条路 $P_1,P_2,\cdots,P_l$ 连接 u 与 v $(u \neq v)$ 两点,令

$$S(u,v) = \begin{cases} \bigvee_{i=1}^{l} S(P_i) = \bigvee_{i=1}^{l} \left\{ \bigwedge_{e \in E(P_i)} R(e) \right\}, & u \neq v \\ 1, & u = v \end{cases} \tag{3.11.2}$$

称 $S(u,v)$ 为 u，v 两点在 G 中的连通强度(degree of connectivity)．设 P 是在 G 中连接 u 与 v 两点的路，且 $S(P)=S(u,v)$，则称 P 是在 G 中连接 u 与 v 两点的最优路(optimal path).

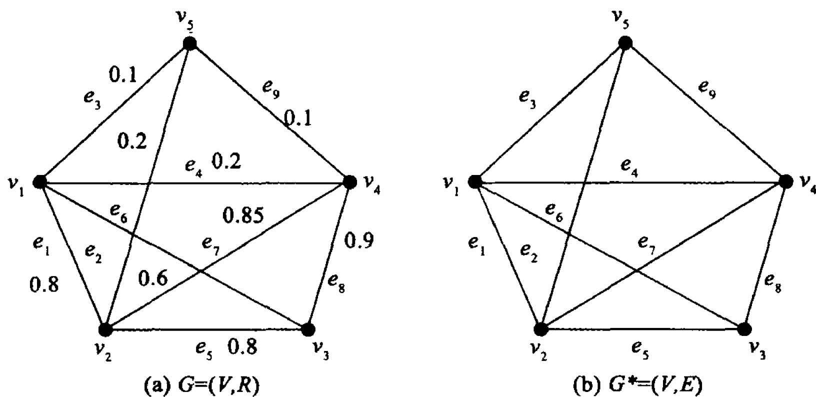
例 3.11.1 设 $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$，$R$ 是 V 上反自反的对称 Fuzzy 关系，且

$$R=\begin{bmatrix} 0 & 0.80 & 0.60 & 0.20 & 0.10 \\ 0.80 & 0 & 0.80 & 0.85 & 0.20 \\ 0.60 & 0.80 & 0 & 0.90 & 0 \\ 0.20 & 0.85 & 0.90 & 0 & 0.10 \\ 0.10 & 0.20 & 0 & 0.10 & 0 \end{bmatrix}$$

则 $G=(V,R)$ 是 Fuzzy 图，其基础图为 $G^*=(V,E)$，其中

$$E=\{v_1v_2,v_1v_3,v_1v_4,v_1v_5,v_2v_3,v_2v_4,v_2v_5,v_3v_4,v_4v_5\}$$

$G=(V,R)$ 与 $G^*=(V,E)$ 的图形如图 3.11.1 所示.



(a) $G=(V,R)$ (b) $G^*=(V,E)$

图 3.11.1

在 $G=(V,R)$ 中，连接 v_5、v_3 两点的路必经过 e_3、e_6、e_9 三条枝中的某一条，而 $R(e_3)=R(e_9)=0.1$，$R(e_6)=0.2$，且对于任意 $e_k\in E\backslash\{e_3,e_9\}$，都有 $R(e_k)\geqslant 0.2$，故 $S(v_5,v_3)=0.2$，从而

$$v_5e_6v_2e_5v_3;\quad v_5e_6v_2e_1v_1e_2v_3;\quad v_5e_6v_2e_1v_1e_4v_4e_8v_3$$

$$v_5e_6v_2e_7v_4e_8v_3;\quad v_5e_6v_2e_7v_4e_4v_1e_2v_3$$

等都是 G 中连接 v_5 与 v_3 的最优路．这说明最优路不是唯一的. □

定理 3.11.1 设 $G=(V,R)$ 是连通的 Fuzzy 图，$u,v\in V$，$S(u,v)$ 是 u 与 v 在 G 中的连通强度，则 $S(u,v)$ 是 V 上的 Fuzzy 等价关系.

证明　由定义知 S 满足自反性和对称性. 因

$$S^2(u,v)=\bigvee_{w\in V}(S(u,w)\wedge S(w,v)),\ \forall u,v\in V$$

若 $u=v$，则因 $S(u,u)=1$，总有 $S(u,u)=S^2(u,u)=1$. 现设 $u\neq v$，任取 $w\in V$，当 $w=u$ 或 $w=v$ 时，由 $S(u,u)=1$ 或 $S(v,v)=1$，必有 $S(u,v)=S(u,w)\wedge S(w,v)$，当 $w\neq u$ 且 $w\neq v$ 时，取 P_1,P_2 分别是 G 中连接 u 与 w 和 w 与 v 的最优路，则 $P_1\cup P_2$ 包含了 G 中连接 u 与 v 的路 P，从而 $E(P)\subseteq E(P_1)\cup E(P_2)$，由此得

$$S(u,v)\geqslant S(P)\geqslant S(P_1)\wedge S(P_2)=S(u,w)\wedge S(w,v)$$

从而 $\forall w\in V$，都有

$$S(u,v)\geqslant S(u,w)\wedge S(w,v)$$

故 $S(u,v)\geqslant S^2(u,v)$，即具传递性. □

设 $G=(V,E)$ 是连通图，T 是 G 的生成树，用 $E(T)$ 表示 T 的枝集，用 $T(G)$ 表示 G 的全部生成树的集. 我们常将由一个顶点所构成的图(没有枝)视为树.

定义 3.11.4　设 $G=(V,R)$ 是连通的 Fuzzy 图，T 是 G 的基础图 $G^*=(V,E)$ 的生成树. 记 $\widetilde{T}=(V,R(T))$，其中 $R(T)=E(T)\cap R$，称 $\widetilde{T}$ 为 Fuzzy 图 G 的生成树(spanning tree)．为了方便，在不混淆时，仍记 $\widetilde{T}$ 为 T. 又设 T^* 是 G^* 的生成树，且 $\forall T\in T(G^*)$，都有

$$\sum_{e\in E(T)}R(e)\leqslant\sum_{e\in E(T^*)}R(e)\tag{3.11.3}$$

称 T^* 为 G 的最大(生成)树(maximal spanning tree).

例 3.11.2　设 $G=(V,R)$ 是例 3.11.1 中的 Fuzzy 图，则图 3.11.2(a)，(b)，(c)都是 Fuzzy 图 $G=(V,R)$ 的生成树，而(c)是一棵最大生成树. (d)是其基础图的一棵生成树.

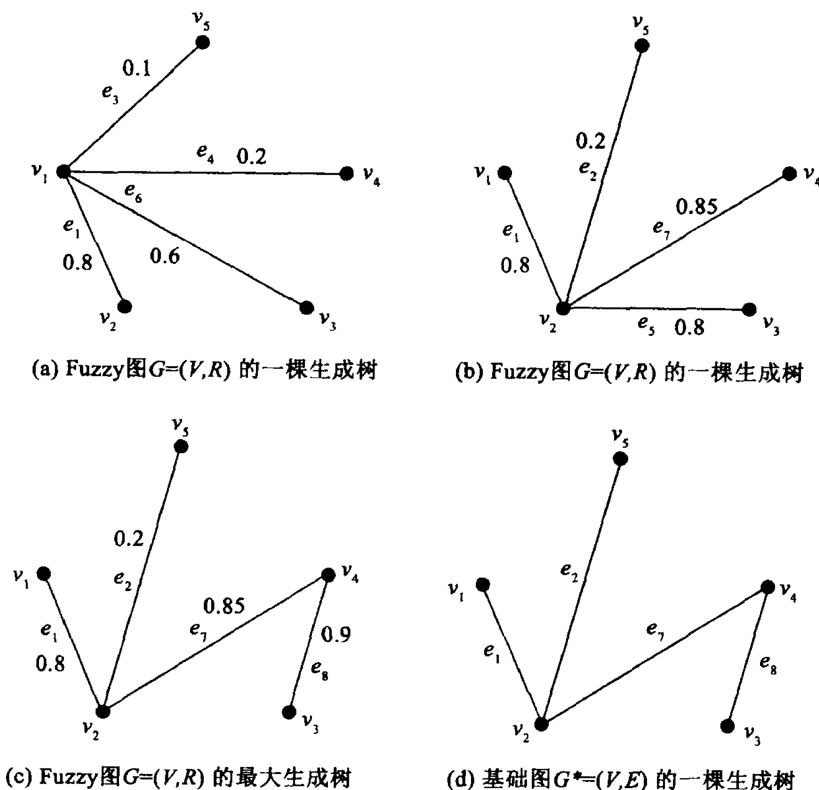
以下我们总约定：若 T 是连通 Fuzzy 图 $G=(V,R)$ 的一棵树，$e\in E(T)$，从 T 中移出 e 将 T 分为连通的两部分，并用 T_1 与 T_2 表示；又用 $V(T_1)$ 和 $V(T_2)$ 分别表示 T_1 和 T_2 的顶点集，显然 $V=V(T_1)\cup V(T_2)$，且 $V(T_1)\cap V(T_2)=\varnothing$；令

$$E^*(e)=\{uv\mid u\in V(T_1),v\in V(T_2),uv\in E\}\tag{3.11.4}$$

容易看出 $E^*\cap E(T)=\{e\}$，且任取 $e^*\in E^*$，则 T_1，T_2 加 e^* 构成 G 的一棵生成树.

定理 3.11.2　设 T 是连通的 Fuzzy 图 $G=(V,R)$ 的生成树，则下列陈述等价：

(1) T 是 G 的最大树；



(a) Fuzzy图$G=(V,R)$ 的一棵生成树　(b) Fuzzy图$G=(V,R)$ 的一棵生成树

(c) Fuzzy图$G=(V,R)$ 的最大生成树　(d) 基础图$G^*=(V,E)$ 的一棵生成树

图 3.11.2

(2) $\forall e' \in E(T)$，从 T 中移出 e' 得 T_1 与 T_2 及 $E^*(e')$，则

$$R(e') = \bigvee_{e \in E^*(e')} R(e) \tag{3.11.5}$$

(3) $\forall u,v \in V(u \neq v)$，$u$，$v$ 在 G 中的连通强度 $S(u,v)$ 等于在 T 中 u 与 v 之间唯一路 P 的强度 $S(P)$.

证明　(1) ⇒ (2)设 T 是 G 的最大树，但 $\exists e^* \in E(T)$ 使得

$$R(e^*) < \bigvee_{e \in E^*(e^*)} R(e) = R(e^{**})$$

其中 $e^{**} \in E^*(e^*)$，显然 $e^{**} \neq e^*$. 用 e^{**} 替换 e^*，获得 G 的一棵新的树 T^*，因为

$$\sum_{e \in E(T)} R(e) = \sum_{e \in E(T), e \neq e^*} R(e) + R(e^*) < \sum_{e \in E(T), e \neq e^*} R(e) + R(e^{**}) = \sum_{e \in E(T^*)} R(e)$$

这与 T 是最大树矛盾. 故(2)是正确的.

(2) ⇒ (3) 设 T 满足(2),任取 $u,v\in V$, P 是 T 中连接 u 与 v 的唯一路. 又设 $R(e')=S(P)$, 其中 $e'\in E(P)$. 从 T 中去掉 e', 得 T_1 与 T_2 及 $E^*(e')$, 且可以设 $u\in V(T_1)$, $v\in V(T_2)$. 由(2)知

$$R(e')=\bigvee_{e\in E^*(e')}R(e)$$

但在 G 中任何连接 u 与 v 的路 P^* 中必有枝 $e^*\in E^*(e')$, 故

$$S(P^*)\leqslant R(e^*)\leqslant R(e')=S(P)$$

从而 $S(u,v)=S(P)$. 即(3)成立.

(3) ⇒ (1) 设 T 满足(3), T^* 是 G 中最大树. 若 $T=T^*$, 则(1)成立. 现设 $T\neq T^*$, 且仅有 $e_1,e_2,\cdots,e_k\in E(T^*)$, 但它们都不属于 $E(T)$, 其中 $k\geqslant 1$. 考虑 $e_k=u_kv_k$, 因为 T^* 是最大树,所以 T^* 满足(3),又因 $u_ke_kv_k$ 是 T^* 中连接 u_k 与 v_k 的唯一路,故在 G 中 $S(u_k,v_k)=R(e_k)$. 从 T^* 中去掉 e_k 得 T_1、T_2 与 $E^*(e_k)$, 且可以设 $u_k\in V(T_1)$, $v_k\in V(T_2)$. 再设 P 是 T 中连接 u_k 与 v_k 的唯一路,则必有 $e_k^*\in E(P)$, 使得 $e_k^*\in E^*(e_k)$. 因为 $e_k\in E(T^*)$ 且 $e_k\notin E(T)$, 故 $e_k^*\neq e_k$. 因为 T 满足(3),故应有

$$S(u_k,v_k)=S(P)\leqslant R(e_k^*)$$

注意到 T^* 还满足(2),从而 $S(P)=R(e_k)\geqslant R(e_k^*)$, 故

$$R(e_k)=R(e_k^*)$$

用 e_k^* 代替 e_k 获得 G 的一棵树 T_1^*, 则有

$$\sum_{e\in E(T^*)}R(e)=\sum_{e\in E(T_1^*)}R(e)$$

即 T_1^* 是 G 的最大树,但仅有 $e_1,e_2,\cdots,e_{k-1}\in E(T_1^*)$, 而 $e_1,e_2,\cdots,e_{k-1}\notin E(T)$. 重复上述做法,可得 G 的最大树 T_2^*, 仅有 $e_1,e_2,\cdots,e_{k-2}\in E(T_2^*)$, 而 $e_1,e_2,\cdots,e_{k-2}\notin E(T)$. 如此继续下去,经 k 次后获得 T, 且

$$\sum_{e\in E(T^*)}R(e)=\sum_{e\in E(T)}R(e)$$

即 T 也是 G 中的最大树. □

定理 3.11.2 告诉我们:如果找到了 $G=(V,R)$ 的最大树,则这棵最大树中连接 u 与 v 的唯一路,就是 u 与 v 之间的最优路. 但对此确定的 u, v, 并不排斥 u 与 v 之间还有其他最优路.

依据这个定理给出寻求最大树的如下算法.

设 $G=(V,R)$ 是连通的 Fuzzy 图, V 中共有 p 个元素.

(1)在 V 中任取一元将其记做 u_1, 记 $A_1=\{u_1\}$, 令 $B_1=V\backslash A_1$. 设有 $v^*\in B_1$, 使得

$$R(u_1, v^*) = \bigvee_{v \in B_1} R(u_1, v) \tag{3.11.6}$$

则记此 v^* 为 u_2(这样的 v^* 自然存在,但不一定唯一,当 v^* 不唯一时,可以任取其中之一为 u_2). 记连接 u_1 与 u_2 的枝为 e_1, 记 $E_1 = \{e_1\}$, $A_2 = A_1 \cup \{u_2\}$.

(2)设已经取出了 k 个顶点 ($k < p$),即有 $A_k = \{u_1, u_2, \cdots, u_k\}$ 和 $k-1$ 条枝,且 $E_{k-1} = \{e_1, e_2, \cdots, e_{k-1}\}$, 令 $B_k = V \backslash A_k$, 记

$$E^* = \{e = uv \mid u \in A_k, v \in B_k\} \tag{3.11.7}$$

$$R(u^*, v^*) = \bigvee_{uv \in E^*} R(u, v) \tag{3.11.8}$$

将此 $v^* \in B_k$ 记做 u_{k+1} (当 v^* 不唯一时,任取其中之一记做 u_{k+1}),记 $e_k = u^* v^* = u^* u_{k+1} (u^* \in A_k)$, 令

$$A_{k+1} = A_k \cup \{u_{k+1}\},\ E_k = E_{k-1} \cup \{e_k\} \tag{3.11.9}$$

(3)若 $k+1 < p$, 则记 $k+1$ 为 k, 转向(2);若 $k+1 = p$, 则停止,获得

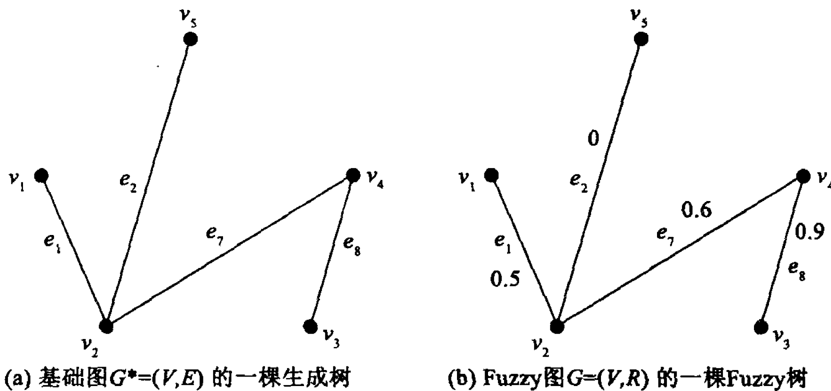
$$T = (V, E_{p-1} \cap R) \tag{3.11.10}$$

是 G 的最大生成树.

定义 3.11.5 设 T 是 G^* 的树, $E(T)$ 是 T 的全部枝的集, $E_T: E(T) \to [0,1]$, 则称 $T = (V, E_T)$ 是 G 中 Fuzzy 树(fuzzy tree)(注:未必是 G 的生成树).

例 3.11.3 设 $G = (V, R)$ 是例 3.11.1 中的 Fuzzy 图,则图 3.11.3(a)是基础图 $G^* = (V, E)$ 的一棵生成树, $T = \{e_1, e_2, e_7, e_8\}$; 图 3.11.3(b)是 Fuzzy 图 $G = (V, R)$ 的一棵 Fuzzy 树,且

$$E_T(e_1) = 0.5,\ E_T(e_2) = 0,\ E_T(e_7) = 0.6,\ E_T(e_8) = 0.9$$



(a) 基础图$G^*=(V,E)$ 的一棵生成树　(b) Fuzzy图$G=(V,R)$ 的一棵Fuzzy树

图 3.11.3

下面总用 S_{ij} $(i \neq j)$ 表示 Fuzzy 树 $T = (V, E_T)$ 中连接 v_i 与 v_j 的唯一路的

强度（S_{ij} 也可以取 0 值）.

定义 3.11.6　设 $T=(V,E_T)$ 是 G 的 Fuzzy 树，令

$$\rho(R,E_T)=\sum_{i=1}^{p-1}\sum_{j=i+1}^{p}(S_{ij}-r_{ij})^2 \tag{3.11.11}$$

称 $\rho(R,E_T)$ 为 G 与 T 的距离；设有 G 中的 Fuzzy 树 $T^*=(V,E_{T^*})$ 使得 $\forall T\in T(G)$，都有

$$\rho(R,E_{T^*})\leqslant\rho(R,E_T) \tag{3.11.12}$$

称 T^* 为 G 中的最优树(optimal tree).

定义 3.11.7　设 V_1，V_2 均非空，$V_1\cap V_2=\varnothing$，$V_1\cup V_2=V$，称 (V_1,V_2) 为 V 的二分割（或二划分）(bipartition)，且记

$$E^*(V_1,V_2)=\{e=uv\mid u\in V_1,v\in V_2\} \tag{3.11.13}$$

定义 3.11.8　设 $G=(V,R)$ 是 Fuzzy 图，(V_1,V_2)是 V 的二分割，记

$$r(V_1,V_2)=\frac{1}{|E^*(V_1,V_2)|}\sum_{u_iv_j\in E^*(V_1,V_2)}r_{ij} \tag{3.11.14}$$

若有 (V_1^*,V_2^*)是 V 的二分割，且对 V 的一切二分割 (V_1,V_2)，都有

$$r(V_1^*,V_2^*)\leqslant r(V_1,V_2) \tag{3.11.15}$$

称 (V_1^*,V_2^*)是在 G 中 V 的最小二分割(minimal bipartition)，简称为最小二分割.

最小二分割的具体计算步骤如下：

设 $G=(V,R)$ 是 Fuzzy 图，$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_p\}$，$R=[r_{ij}]_{p\times p}$ 反自反和对称的.

(1)记

$$r_i=\frac{1}{p-1}\sum_{j\neq i}r_{ij},\ i=1,2,\cdots,p \tag{3.11.16}$$

$$r_{i_1}=\min_{1\leqslant i\leqslant p}\{r_i\} \tag{3.11.17}$$

令

$$V_1^{(1)}=\{V_{i_1}\},\quad V_2^{(1)}=V\backslash V_1^{(1)},\quad S_1=r_{i_1} \tag{3.11.18}$$

(2)设已经选好了 $V_1^{(k)}=\left\{v_{i_1},v_{i_2},\cdots,v_{i_k}\right\}(k<p-1)$，记

$$V_2^{(k)}=V\backslash V_1^{(k)},\quad r(V_1^{(k)},V_2^{(k)})=S_k \tag{3.11.19}$$

$$r_i=\frac{1}{k}\sum_{v_j\in V_1^{(k)}}r_{ij},\ V_i\in V_2^{(k)} \tag{3.11.20}$$

$$U_k^*=\{v_i\mid r_i\geqslant S_k\}\subseteq V_2^{(k)} \tag{3.11.21}$$

若 $U_k^*=\varnothing$，则转向(5). 若 U_k^* 是单点集，则令 $U_k=U_k^*$ 转向(3)；否则令

$$r_i^* = \frac{1}{|V_2^{(k)}|-1} \sum_{v_j \in V_2^{(k)}-\{v_i\}} r_{ij}, \quad v_i \in U_k^* \tag{3.11.22}$$

$$U_k = \{v_i \mid r_i \geqslant r_i^*\} \subseteq U_k^* \tag{3.11.23}$$

(3)若 $U_k \neq \varnothing$，且有 $V_{21}^{(k)} (\subseteq U_k \subseteq V_2^{(k)})$ 是非空集，使得

$$r\left(V_1^{(k)} \cup V_{21}^{(k)}, V_{22}^{(k)}\right) \leqslant S_k = r(V_1^{(k)}, V_2^{(k)}) \tag{3.11.24}$$

(其中 $V_{22}^{(k)} = V_2^{(k)} \backslash V_{21}^{(k)}$)，则令 $V_1^{(k+1)} = V_1^{(k)} \cup V_{21}^{(k)}$ (其中 $l = |V_{21}^{(k)}|$)，仍记 $k+1$ 为 k，转向(2).

(4)若 $U_k = \varnothing$，或虽有 $U_k \neq \varnothing$，但对 U_k 的一切非空子集 $V_{21}^{(k)} (\subseteq U_k \subseteq V_2^{(k)})$，都有

$$r\left(V_1^{(k)} \cup V_{21}^{(k)}, V_{22}^{(k)}\right) > S_k = r(V_1^{(k)}, V_2^{(k)}) \tag{3.11.25}$$

转向(5).

(5)记 $V_1 = V_1^{(k)}$，$V_2 = V_2^{(k)}$，以 (V_1, V_2)作为 V 在 G 中的最小二分割. 计算结束.

设已知 (V_1, V_2)是 V 在 G 中的最小二分割，且在 G 中，$r(V_1, V_2) = S_1$，则任意 $v_{i_1} \in V_1$，$v_{i_2} \in V_2$，令 $E_T(v_{i_1}, v_{i_2}) = S_1$. 又记

$$E_k = \{e = v_i v_j \mid v_i, v_j \in V_k\}, \ k = 1,2 \tag{3.11.26}$$

$$G_k = (V_k, E_k \cap R), \ k = 1,2 \tag{3.11.27}$$

再使用上述方法分别就 $k = 1,2$ 计算出 V_k 在 G_k 中的最小二分割，设为 (V_{k1}, V_{k2})，且 $r(V_{k1}, V_{k2}) = S_{k1}$，任取 $v_{i_{k1}} \in V_{k1}$，$v_{i_{k2}} \in V_{k2}$，令 $E_T(v_{i_{k1}}, v_{i_{k2}}) = S_{k1} (k = 1,2)$. 继续上述过程，即可得 G 的近似的最优树.

例 3.11.4 设 $G = (V, R)$ 是例 3.11.1 中的 Fuzzy 图，即 $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$，$R$ 是 V 上的对称反自反的 Fuzzy 关系，且

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0.80 & 0.60 & 0.20 & 0.10 \\ 0.80 & 0 & 0.80 & 0.85 & 0.20 \\ 0.60 & 0.80 & 0 & 0.90 & 0 \\ 0.20 & 0.85 & 0.90 & 0 & 0.10 \\ 0.10 & 0.20 & 0 & 0.10 & 0 \end{bmatrix}$$

容易计算 $r_5 = 0.1 = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant 5} \left\{ \frac{1}{4} \sum\limits_{j \neq i} r_{ij} \right\}$，取 $V_1^{(1)} = \{v_5\}$，$V_2^{(1)} = V \backslash V_1^{(1)} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$，$r(V_1^{(1)}, V_2^{(2)}) = S_1 = 0.1$，$U_1^* = \{v_i \mid r_{i5} \geqslant 0.1\} = \{v_1, v_2, v_4\} \subset V_2^{(1)}$

$$r_1^* = r(\{v_1\}, V_2^{(1)} \backslash \{v_1\}) = \frac{1}{|V_2^{(k)}|-1} \sum_{v_j \in V_2^{(k)} \backslash \{v_1\}} r_{1j} = 0.5$$

$$r_2^* = r(\{v_2\}, V_2^{(1)} \setminus \{v_2\}) = \frac{1}{|V_2^{(k)}|-1} \sum_{v_j \in V_2^{(k)} \setminus \{v_2\}} r_{2j} = 0.825$$

$$r_4^* = r(\{v_4\}, V_2^{(1)} \setminus \{v_4\}) = \frac{1}{|V_2^{(k)}|-1} \sum_{v_j \in V_2^{(k)} \setminus \{v_4\}} r_{4j} = 0.525$$

$$U_1 = \{v_i \mid r_{i5} \geqslant r^*\} = \varnothing$$

故取 $V_1 = \{v_5\}$, $V_2 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, 以 (V_1, V_2) 作为 V 在 G 中的最小二分割，且 $r(V_1, V_2) = 0.1$. 可以取 $E_T(v_5, v_2) = 0.1$. 用同样的方法可以求出 $V_2 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ 在 $G_2 = (V, E_2 \cap R)$ $(E_2 = \{e = v_i v_j \mid v_i, v_j \in V_2\})$ 中的最小二分割为 $V_{21} = \{v_1\}$, $V_{22} = \{v_2, v_3, v_4\}$, $r(V_{21}, V_{22}) = 0.533$, 可以取 $E_T(v_1, v_2) = 0.533$. 继续上述过程，可以取 $E_T(v_2, v_4) = 0.825$, $E_T(v_4, v_3) = 0.9$. 由此获得最优树，表示在图 3.11.4 中. G 的最大树见图 3.11.2(c). 依据这两棵树及定义 3.11.6 中的距离公式，计算出

$$\rho(R, E_T) = 0.2083, \quad \rho(R, E_T) = 0.4625.$$

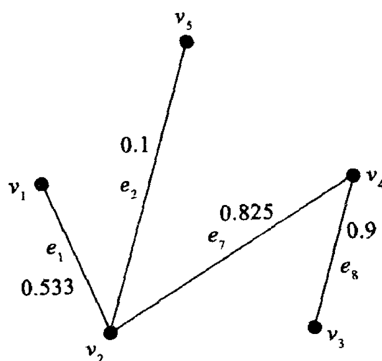


图 3.11.4

对于 Fuzzy 关系的研究主要集中在不同角度的推广上，如：Fuzzy 弱关系(Gonzálen, Martín, 1997)、Fuzzy 集间的 Fuzzy 关系(Chakraborty, Das, 1983; Gonzálen, Martín, 1995, 1996; Morsi, 1994)、在 t-模下的 Fuzzy 关系(Baets, Meyer, 2003; Bodenhofer, Klawonn, 2004; Boixader, 2003; Jacas, Recasens, 1995)、偏序值与关系值 Fuzzy 关系(Šešelja, Tepavcevic, 1995), L-Fuzzy关系(张文修, 1984; Ćirić, Ignjatović, et al., 2007, 2009)与直觉 Fuzzy 关系(Bustince, Burillo, 1996b; Deschrijver, Kerre, 2003b)等. 对 Fuzzy 关系的代数结构(Kawahara, Furusawa, 1999)等也有所研究.

本章所介绍的 Fuzzy 图是基于具有反自反性和对称性的 Fuzzy 关系，有的

Fuzzy 图是基于带约束的 Fuzzy 关系(Bhattacharya,1987; Bhutani, Rosenfeld, 2003; Mordeson, Nair,2000; Mordeson, Peng, 1994; Rosenfeld, 1975).

Fuzzy 矩阵是 Fuzzy 关系理论中最重要的内容,其主要研究论题有 Fuzzy 矩阵的可实现性及其容度(刘旺金,1982)、Fuzzy 矩阵的幂周期与幂序列收敛性(Fan, 2000; Imai, Okahara, et al., 2000; Li, 1994; Lur, Wu, et al., 2007; Thomason, 1977; Zhou, Liu, 1997,1998)等. 关于 Fuzzy 矩阵的逆将在第 7 章中讨论.

第 4 章 Fuzzy 聚类分析

"物以类聚,人以群分",聚类是一个古老的问题,这个问题伴随着人类社会的产生和发展而不断深化,人类要认识世界就必须区别不同的事物并认识事物间的相似性. 按确定的标准对客观事物进行分类的数学方法称为聚类分析. 例如,工业上对产品质量的分类;工程上对工程规模的分类;生物学中对优良种子的分类;图像识别中对几何图形的分类等都是聚类分析问题. 聚类分析是数量统计中多元分析的一个分支,这是一种硬划分,把每个待辨识的对象严格地划分到某个类中,具有非此即彼的性质,因此这种分类的类别界限是分明的. 由于现实的分类往往伴随着模糊性,所以用模糊理论来进行聚类分析会显得更自然,更符合客观实际,这就是 Fuzzy 聚类分析(fuzzy cluster analysis). 人们提出了多种聚类方法,如本章将要介绍的基于 Fuzzy 等价关系的 Fuzzy 聚类分析,利用 Fuzzy 图的最优树聚类以及基于 Fuzzy 划分、保序 Fuzzy 划分和 Fuzzy 预序关系的各类 Fuzzy 聚类分析等. 随着模糊理论的发展,Fuzzy 聚类分析得到了广泛的应用,是模糊理论应用最广泛和最富成果的领域之一.

§4.1 基于 Fuzzy 等价关系的 Fuzzy 聚类分析

4.1.1 基本方法(Fuzzy 传递闭包法)

对于 Fuzzy 等价关系 $R\in\mathscr{F}(X\times X)$,由定理 3.8.2 知,$\forall\alpha\in[0,1]$,$R_\alpha$ 是普通等价关系. 随着 α 取不同的值,便可以将 X 分成不同的类,且有下列关系.

定理 4.1.1 设 $R\in\mathscr{F}(X\times X)$,$0\leqslant\alpha<\beta\leqslant1$,则按 R_β 将 X 分成的每一类必定是按 R_α 将 X 分成的类的子类.

证明 $\forall x,y\in X$,$x\in[y]_{R_\beta}\Rightarrow R_\beta(x,y)=1\Rightarrow R(x,y)\geqslant\beta>\alpha$

$$\Rightarrow R_\alpha(x,y)=1\Rightarrow x\in[y]_{R_\alpha}.$$ □

例 4.1.1 设 $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$.

$$R=\begin{bmatrix}1 & 0.8 & 0.6 & 0.4 & 0.6\\0.8 & 1 & 0.6 & 0.4 & 0.6\\0.6 & 0.6 & 1 & 0.4 & 0.9\\0.4 & 0.4 & 0.4 & 1 & 0.4\\0.6 & 0.6 & 0.9 & 0.4 & 1\end{bmatrix}$$

显然 R 是自反的与对称的. 而

$$R^2=R\circ R=\begin{bmatrix}1 & 0.8 & 0.6 & 0.4 & 0.6\\0.8 & 1 & 0.6 & 0.4 & 0.6\\0.6 & 0.6 & 1 & 0.4 & 0.9\\0.4 & 0.4 & 0.4 & 1 & 0.4\\0.6 & 0.6 & 0.9 & 0.4 & 1\end{bmatrix}=R$$

所以，R 具有传递性，故 R 是 Fuzzy 等价关系.

再令 α 由 1 降至 0，写出 R_α，按 R_α 分类.

$$R_1=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

相应的分类：$\{x_1\},\{x_2\},\{x_3\},\{x_4\},\{x_5\}$ 共分为 5 类.

$$R_{0.9}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

相应的分类：$\{x_1\},\{x_2\},\{x_4\},\{x_3,x_5\}$ 共分为 4 类.

$$R_{0.8}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0 & 0\\1 & 1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

相应的分类：$\{x_1,x_2\},\{x_4\},\{x_3,x_5\}$ 共分为 3 类.

$$R_{0.6}=\begin{bmatrix}1&1&1&0&1\\1&1&1&0&1\\1&1&1&0&1\\0&0&0&1&0\\1&1&1&0&1\end{bmatrix}$$

相应的分类：$\{x_1,x_2,x_3,x_5\}$，$\{x_4\}$ 共分为 2 类.

$$R_{0.4}=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\end{bmatrix}$$

相应的分类：$\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$ 共分为 1 类.

从以上分类可以看出：

当 $0\leqslant\alpha\leqslant0.4$ 时，将 X 分为一类：$\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$

当 $0.4<\alpha\leqslant0.6$ 时，将 X 分为两类：$\{x_1,x_2,x_3,x_5\}$，$\{x_4\}$

当 $0.6<\alpha\leqslant0.8$ 时，将 X 分为三类：$\{x_1,x_2\}$，$\{x_4\}$，$\{x_3,x_5\}$

当 $0.8<\alpha\leqslant0.9$ 时，将 X 分为四类：$\{x_1\}$，$\{x_2\}$，$\{x_4\}$，$\{x_3,x_5\}$

当 $0.9<\alpha\leqslant1$ 时，将 X 分为五类：$\{x_1\}$，$\{x_2\}$，$\{x_3\}$，$\{x_4\}$，$\{x_5\}$

总起来得聚类图如图 4.1.1 所示.

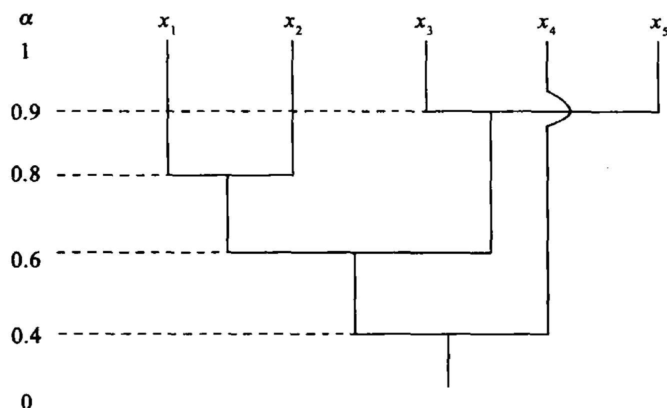


图 4.1.1

如果 R 是自反的与对称的，但不具有传递性，则求其传递闭包 $t(R)$，由 $t(R)_\alpha$ 给出聚类结果.

例 4.1.2 设 $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7\}$

$$R=\begin{bmatrix}1 & 0.3 & 0.1 & 0.4 & 0.8 & 0.7 & 0.6\\ 0.3 & 1 & 0.5 & 0.9 & 0.6 & 0.8 & 0.9\\ 0.1 & 0.5 & 1 & 0.7 & 0.6 & 0.2 & 0.1\\ 0.4 & 0.9 & 0.7 & 1 & 0.5 & 0.9 & 0.4\\ 0.8 & 0.6 & 0.6 & 0.5 & 1 & 0.7 & 0.5\\ 0.7 & 0.8 & 0.5 & 0.9 & 0.7 & 1 & 0.4\\ 0.6 & 0.9 & 0.1 & 0.4 & 0.5 & 0.4 & 1\end{bmatrix}$$

由例 3.7.5 得

$$t(R)=\begin{bmatrix}1 & 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.8 & 0.7 & 0.7\\ 0.7 & 1 & 0.7 & 0.9 & 0.7 & 0.9 & 0.9\\ 0.7 & 0.7 & 1 & 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.7\\ 0.7 & 0.9 & 0.7 & 1 & 0.7 & 0.9 & 0.9\\ 0.8 & 0.7 & 0.7 & 0.7 & 1 & 0.7 & 0.7\\ 0.7 & 0.9 & 0.7 & 0.9 & 0.7 & 1 & 0.9\\ 0.7 & 0.9 & 0.7 & 0.9 & 0.7 & 0.9 & 1\end{bmatrix}$$

$t(R)$ 是 Fuzzy 等价矩阵.

令 α 由 1 降至 0,分别求出 $t(R)_\alpha$(为简便计对称矩阵只写出了下半部分).

$$0.9<\alpha\leqslant 1: t(R)_\alpha=\begin{bmatrix}1 & & & & & & \\ 0 & 1 & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

故 X 分为七类:$\{x_1\},\{x_2\},\{x_3\},\{x_4\},\{x_5\},\{x_6\},\{x_7\}$.

$$0.8<\alpha\leqslant 0.9: t(R)_\alpha=\begin{bmatrix}1 & & & & & & \\ 0 & 1 & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

故 X 分为四类:$\{x_1\},\{x_2,x_4,x_6,x_7\},\{x_3\},\{x_5\}$.

$$0.7 < \alpha \leqslant 0.8 : t(R)_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ 0 & 1 & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

故 X 分为三类：$\{x_1, x_5\}, \{x_2, x_4, x_6, x_7\}, \{x_3\}$

$$0 \leqslant \alpha \leqslant 0.7 : t(R)_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ 1 & 1 & & & & & \\ 1 & 1 & 1 & & & & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & & & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

故 X 分为一类：$\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$.

综上我们也可以绘出聚类图如图 4.1.2 所示.

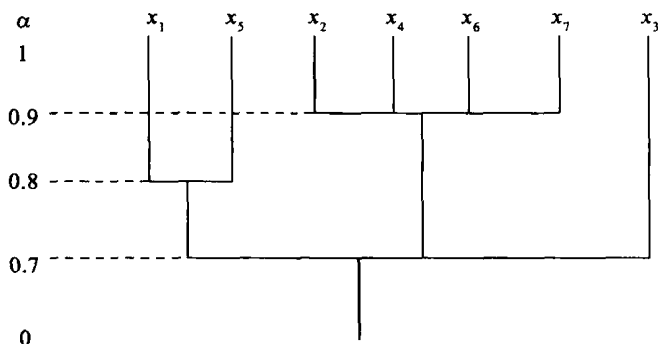


图 4.1.2

4.1.2　基本步骤

聚类分析的基本思想是用相似性尺度来衡量事物之间的亲疏程度，并以此来实现分类. Fuzzy 聚类分析的实质就是根据研究对象本身的属性来构造 Fuzzy 矩阵，在此基础上根据一定的隶属度来确定其分类关系.

利用 Fuzzy 等价关系进行聚类分析的具体步骤如下：

1. 确定分类对象,抽取因素数据

设分类对象之全体为 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$,而每一对象 x_i 由一组数据(m 个特征指标)

$$x_i=(x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{im})\in(\mathbf{R}^+)^m,\ i=1,2,\cdots,n$$

来表征.

2. 建立 Fuzzy 相似关系

用数 $r_{ij}\in[0,1]$ 来刻画对象 x_i,x_j 之间的相似程度. 在实际中,关键是如何确定 r_{ij} 的值. 由于 m 个特性指标的量纲和数量级不一定相同,在确定相似程度之前先要对数据进行规格化处理,以消除特征指标的量纲差别和数量级差所带来的影响. 当然如果特征指标没有量纲差别和数量级差,数据可以不必规格化处理.

下面介绍几种常用的数据规格化的方法.

方法 1 数据标准化

$$x'_{ij}=\frac{x_{ij}-\overline{x}_j}{\sigma_j},\quad i=1,2,\cdots,n;\quad j=1,2,\cdots,m \tag{4.1.1}$$

其中 $\overline{x}_j=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_{ij},\ \sigma_j^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_{ij}-\overline{x}_j)^2,\ j=1,2,\cdots,m.$

方法 2 均值规格化

$$x'_{ij}=\frac{x_{ij}}{\sigma_j},\quad i=1,2,\cdots,n;\quad j=1,2,\cdots,m \tag{4.1.2}$$

方法 3 中心规格化

$$x'_{ij}=x_{ij}-\overline{x}_j,\quad i=1,2,\cdots,n;\quad j=1,2,\cdots,m \tag{4.1.3}$$

方法 4 最大值规格化

$$x'_{ij}=\frac{x_{ij}}{M_j},\quad i=1,2,\cdots,n;\quad j=1,2,\cdots,m \tag{4.1.4}$$

其中 $M_j=\max\{x_{1j},x_{2j},\cdots,x_{nj}\},\ j=1,2,\cdots,m.$

方法 5 极差规格化

$$x'_{ij}=\frac{x_{ij}-m_j}{M_j-m_j},\quad i=1,2,\cdots,n;\quad j=1,2,\cdots,m \tag{4.1.5}$$

其中 $M_j=\max\{x_{1j},x_{2j},\cdots,x_{nj}\},\ m_j=\min\{x_{1j},x_{2j},\cdots,x_{nj}\},\ j=1,2,\cdots,m.$

数据规格化以后可以通过下列方法建立相似矩阵.

方法 1. 数量积法

$$r_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ \dfrac{1}{M}\sum_{k=1}^{m}x_{ik}\cdot x_{jk}, & i\neq j\end{cases} \tag{4.1.6}$$

其中 $M>0$ 为选定常数，满足 $M \geqslant \max\limits_{i \neq j}\left\{\sum_{k=1}^{m} x_{ik} \cdot x_{jk}\right\}$.

方法 2. 余弦幅度法

$$r_{ij}=\frac{\sum_{k=1}^{m} x_{ik} \cdot x_{jk}}{\sqrt{\left(\sum_{k=1}^{m} x_{ik}^{2}\right)\left(\sum_{k=1}^{m} x_{jk}^{2}\right)}} \tag{4.1.7}$$

方法 3. 相关系数法

$$r_{ij}=\frac{\sum_{k=1}^{m}\left|x_{ik}-\bar{x}_{i\cdot}\right| \cdot\left|x_{jk}-\bar{x}_{j\cdot}\right|}{\sqrt{\sum_{k=1}^{m}\left(x_{ik}-\bar{x}_{i\cdot}\right)^{2}} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{m}\left(x_{jk}-\bar{x}_{j\cdot}\right)^{2}}} \tag{4.1.8}$$

其中 $\quad \bar{x}_{i\cdot}=\frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} x_{ik}, \quad \bar{x}_{j\cdot}=\frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} x_{jk}$.

方法 4. 最大最小法

$$r_{ij}=\frac{\sum_{k=1}^{m}\left(x_{ik} \wedge x_{jk}\right)}{\sum_{k=1}^{m}\left(x_{ik} \vee x_{jk}\right)} \tag{4.1.9}$$

方法 5. 算术平均最小法

$$r_{ij}=\frac{\sum_{k=1}^{m}\left(x_{ik} \wedge x_{jk}\right)}{\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m}\left(x_{ik}+x_{jk}\right)} \tag{4.1.10}$$

方法 6. 几何平均最小法

$$r_{ij}=\frac{\sum_{k=1}^{m}\left(x_{ik} \wedge x_{jk}\right)}{\sum_{k=1}^{m} \sqrt{x_{ik} \cdot x_{jk}}} \tag{4.1.11}$$

方法 7. 绝对值指数法

$$r_{ij}=\exp\left\{-\sum_{k=1}^{m}\left|x_{ik}-x_{jk}\right|\right\} \tag{4.1.12}$$

方法 8. 绝对值减数法

$$r_{ij}=1-c \cdot \sum_{k=1}^{m}\left|x_{ik}-x_{jk}\right| \tag{4.1.13}$$

其中 $c>0$ 为常数,可以根据实际情况选定,使 $r_{ij}\in[0,1]$.

方法 9. 主观评定法

对于一些实际问题,很难用解析表达式来刻画事物间的相关程度,这时只有请相关的专家来打分统计评定.

如果 r_{ij} 中出现负值,可以采用下面方法将全体 r_{ij} 进行重新调整.

令 $r'_{ij}=\dfrac{r_{ij}+1}{2}$,或令 $r'_{ij}=\dfrac{r_{ij}-m}{M-m}(i\neq j)$,$m=\min\limits_{i\neq j}\{r_{ij}\}$,$M=\max\limits_{i\neq j}\{r_{ij}\}$.

于是 $r'_{ij}\in[0,1]$.

3. 改造 Fuzzy 相似关系为 Fuzzy 等价关系

用上述方法建立起来的相似关系 R,一般只满足自反性和对称性,不满足传递性,因而还不是 Fuzzy 等价关系. 为此,需要将 R 改造成 Fuzzy 等价关系后得到聚类图,在适当的阈值上进行截取,便可以得到所需要的分类. 可以用求传递闭包的方法将 R 改造成 $t(R)$. 此时 $t(R)$ 满足了传递性,于是 Fuzzy 相似矩阵 R 就被改造成了一个 Fuzzy 等价关系矩阵 $t(R)$.

4. Fuzzy 聚类

对 Fuzzy 等价关系 $t(R)$ 进行聚类处理,给定不同置信水平的 α,求矩阵 $t(R)_\alpha$,得到普通的分类关系. 当$\lambda=1$ 时,每个样品自成一类,随 α 值的降低,由细到粗逐渐归并,最后得到动态聚类谱系图.

例 4.1.3 对于环境单元进行分类. 设每个单元包含空气、水分、土壤、作物 4 个要素,环境单元的污染情况由污染物在 4 个要素的含量超过的程度来衡量. 现假设有 5 个环境单元,其污染数据为

$$X=\{\text{I},\text{II},\text{III},\text{IV},\text{V}\}$$

$$\text{I}=(5,5,3,2),\quad \text{II}=(2,3,4,5),\quad \text{III}=(5,5,2,3)$$

$$\text{IV}=(1,5,3,1),\quad \text{V}=(2,4,5,1)$$

首先,按方法 8(绝对值减数法)建立 Fuzzy 相似关系矩阵 $R=(r_{ij})_{5\times5}$,取 $c=0.1$

$$r_{ij}=1-c\cdot\sum_{k=1}^{m}|x_{ik}-x_{jk}|$$

从而计算可得(为简便计对称矩阵只写出下半部分)

$$R=\begin{bmatrix}1 & & & & \\ 0.1 & 1 & & & \\ 0.8 & 0.1 & 1 & & \\ 0.5 & 0.2 & 0.3 & 1 & \\ 0.3 & 0.4 & 0.1 & 0.6 & 1\end{bmatrix}$$

我们用平方法来求 $t(R)$

$$R^2=\begin{bmatrix}1&&&&\\0.3&1&&&\\0.8&0.2&1&&\\0.5&0.4&0.5&1&\\0.5&0.4&0.3&0.6&1\end{bmatrix}$$

$$R^4=\begin{bmatrix}1&&&&\\0.4&1&&&\\0.8&0.4&1&&\\0.5&0.4&0.5&1&\\0.5&0.4&0.5&0.6&1\end{bmatrix}$$

$$R^8=\begin{bmatrix}1&&&&\\0.4&1&&&\\0.8&0.4&1&&\\0.5&0.4&0.5&1&\\0.5&0.4&0.5&0.6&1\end{bmatrix}=R^4$$

这样，$t(R)=R^4$. 令 α 由 1 降至 0，分别求出 $t(R)_\alpha$.

$$0.8<\alpha\leqslant 1:t(R)_\alpha=\begin{bmatrix}1&&&&\\0&1&&&\\0&0&1&&\\0&0&0&1&\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

故 X 分为 5 类：{I}，{II}，{III}，{IV}，{V}.

$$0.6<\alpha\leqslant 0.8:t(R)_\alpha=\begin{bmatrix}1&&&&\\0&1&&&\\1&0&1&&\\0&0&0&1&\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

故 X 分为 4 类：{I，III}，{II}，{IV}，{V}.

$$0.5<\alpha\leqslant 0.6:t(R)_\alpha=\begin{bmatrix}1&&&&\\0&1&&&\\1&0&1&&\\0&0&0&1&\\0&0&0&1&1\end{bmatrix}$$

故 X 分为 3 类:{I,III},{II},{IV,V}

$$0.4<\alpha\leqslant 0.5: t(R)_\alpha=\begin{bmatrix}1 & & & & \\ 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

故 X 分为 2 类:{I,III,IV,V},{II}

$$0\leqslant\alpha\leqslant 0.4: t(R)_\alpha=\begin{bmatrix}1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & 1 & 1 & & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

故 X 分为 1 类:{I,II,III,IV,V}.

综上我们也可以绘出聚类图,如图 4.1.3 所示.

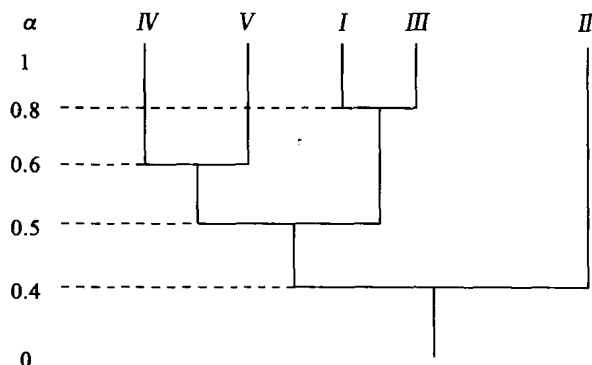


图 4.1.3

例 4.1.4 在加利福尼亚州产生断层的圣·安吉斯附近,有 5 个独立的地区遭受地震的灾害. 为了估算出保险公司给房主的赔付,必须对这 5 个地区按其受灾程度进行分类.

对每个地区的建筑物进行调查,把每个地区的所有建筑物表示成三种受灾情况之一:无损坏、中级损坏和严重损坏. 每个地区都给出了这三种受灾情况的建筑物总数百分数(比),表 4.1.1 概括了调查组所得到的结果. 试根据这些数据对这 5 个地区按其受灾程度进行分类.

表 4.1.1　五个地区受灾情况的建筑物总数百分数(比)

地 区	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_{i1}（无损坏的比值）	0.3	0.2	0.1	0.7	0.4
x_{i2}（中级损坏的比值）	0.6	0.4	0.6	0.2	0.6
x_{i3}（严重损坏的比值）	0.1	0.4	0.3	0.1	0

用余弦幅度法

$$r_{ij}=\frac{\sum_{k=1}^{3}x_{ik}x_{jk}}{\sqrt{\left(\sum_{k=1}^{3}x_{ik}^2\right)\left(\sum_{k=1}^{3}x_{jk}^2\right)}}$$

建立 Fuzzy 相似关系矩阵 $R=(r_{ij})_{3\times3}$. 例如，对于 $i=1,j=2$，得到

$$r_{12}=\frac{0.3\times0.2+0.6\times0.4+0.1\times0.4}{[(0.3^2+0.6^2+0.1^2)(0.2^2+0.4^2+0.4^2)]^{1/2}}=0.836$$

计算该关系的其他元素得到下列的相似关系

$$R=\begin{bmatrix}1 & & & & \\ 0.836 & 1 & & & \\ 0.914 & 0.934 & 1 & & \\ 0.682 & 0.6 & 0.441 & 1 & \\ 0.982 & 0.74 & 0.818 & 0.774 & 1\end{bmatrix}$$

经 3 次最大—最小复合得到一个等价关系

$$R^3=\begin{bmatrix}1 & & & & \\ 0.914 & 1 & & & \\ 0.914 & 0.934 & 1 & & \\ 0.774 & 0.774 & 0.774 & 1 & \\ 0.982 & 0.914 & 0.914 & 0.774 & 1\end{bmatrix}$$

现在，如果我们用两个不同的 α 值，即 $\alpha=0.914$ 和 $\alpha=0.934$ 进行 α 分割，则可以导出以下的等价关系及相应分类

$$R_{0.914}=\begin{bmatrix}1&1&1&0&1\\1&1&1&0&1\\1&1&1&0&1\\0&0&0&1&0\\1&1&1&0&1\end{bmatrix}\qquad R_{0.934}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&1\\0&1&1&0&0\\0&1&1&0&0\\0&0&0&1&0\\1&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$\{x_1,x_2,x_3,x_5\},\{x_4\}$　　　　$\{x_1,x_5\},\{x_2,x_3\},\{x_4\}$

因此，当保险赔付时，如果我们要在修改的 Mercalli 等级的基础上将地震损害分成两种强度(Mercalli 等级是一种对给定区域因地震而造成结构上平均损害的地震强度的测量)，则区域 1、2、3 和区域 5 属于大的 Mercalli 强度，而区域 4 则属于一个较小的 Mercalli 强度(见 $\alpha=0.914$). 但是如果我们想要有一个较细的划分，如 3 个 Mercalli 等级，我们可以按表 4.1.2 对区域分类.

表 4.1.2　当 $\lambda=0.934$ 时对地震损害地区的分类

地　　区	Mercalli 强度
$\{x_4\}$	VII
$\{x_1,x_5\}$	VIII
$\{x_2,x_3\}$	IX

4.1.3　直接相似关系聚类法

上述方法是应用 Fuzzy 等价关系将元素聚类. 当分类的元素比较多时，这种方法显得麻烦，下面介绍几种比较简单的方法.

1. 直接聚类法

定理 4.1.2　设 $R\in[0,1]^{n\times n}$ 是自反的，则 $\forall\alpha\in[0,1]$，$(t(R))_\alpha=(R^n)_\alpha=(R_\alpha)^n=t(R_\alpha)$.

定理 4.1.2 说明：按相似矩阵 R 的 α-截矩阵 R_α 分为相似类后，再增加传递性，所得的分类结果，与按 $(t(R))_\alpha$ 分类的结果相同. 由此我们得到下述聚类原则.

聚类原则：设 $R\in[0,1]^{n\times n}$ 是 Fuzzy 相似关系，则 x_i 与 x_j 在 α 水平上同类等价于在 Fuzzy 图 $G=(X,R\backslash I)$ 中，x_i，x_j 在 G 中的连通强度 $S(x_i,x_j)\geqslant\alpha$，即存在一条强度不低于 α 的路连接 x_i 与 x_j.

例 4.1.5　(Tamura et al., 1971)照片分类，现有 3 个家庭，每个家庭由 4～7 人组成，每人 1 张照片，共有 16 张. 通过照片按相貌相像程度分类，把 3 个家庭区分开来.

首先，建立相似关系. 用主观评定法得到相像关系的 Fuzzy 矩阵 R 如下：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	1															
2	0	1														
3	0	0	1													
4	0	0	0.4	1												
5	0	0.8	0	0	1											
6	0.5	0	0.2	0.2	0	1										
7	0	0.8	0	0	0.4	0	1									
8	0.4	0.2	0.2	0.5	0	0.8	0	1								
9	0	0.4	0	0.8	0.4	0.2	0.4	0	1							
10	0	0	0.2	0.2	0	0	0.2	0	0.2	1						
11	0	0.5	0.2	0.2	0	0	0.8	0	0.4	0.2	1					
12	0	0	0.2	0.8	0	0	0	0	0.4	0.8	0	1				
13	0.8	0	0.2	0.4	0	0.4	0	0.4	0	0	0	0	1			
14	0	0.8	0	0.2	0.4	0	0.8	0	0.2	0.2	0.6	0	0	1		
15	0	0	0.4	0.8	0	0.2	0	0	0.2	0	0	0.2	0.2	0	1	
16	0.6	0	0	0.2	0.2	0.8	0	0.4	0	0	0	0	0.4	0.2	0.4	1

若改造 R 为 Fuzzy 等价矩阵，则需平方 4 次，计算很麻烦. 这个矩阵的传递闭包 $t(R)=R^{16}=R^8$. 但按聚类原则，不需改造 R，直接将 $G=(X,R\backslash I)$ 中强度不低于 α ($r_{ij}\geqslant\alpha$)的路连接起来，构成最大连通子图，在连通子图上的所有元素就是一类. 取 α 从 1 到 0，便可以得到所有的分类.

例如，取 $\alpha=0.8$，强度不低于 0.8 的路如图 4.1.4 所示，共 5 个最大连通子图(包括 3 单独一点). 共分为 5 类.

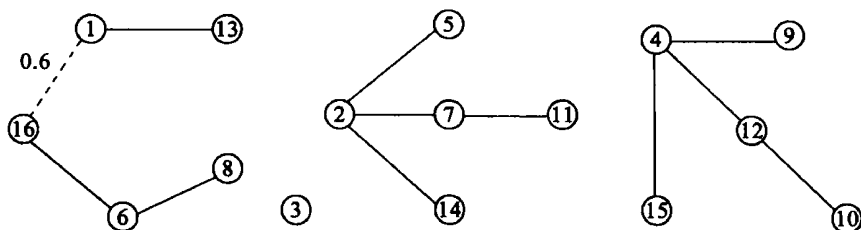


图 4.1.4

若 $\alpha=0.6$，则强度不低于 0.6 的路在上述路上把①和⑯连接起来. 这时，除③外，其余 15 张照片可以分为 3 类(即三家). 聚类图如图 4.1.5 所示.

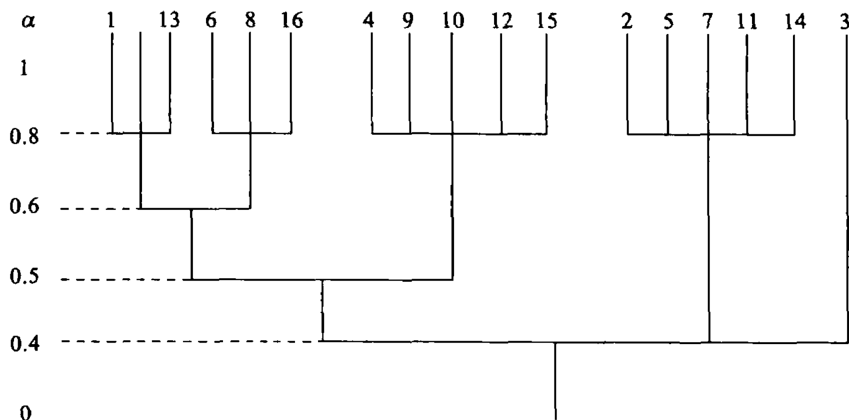


图 4.1.5

2. 编网法

编网法的主要步骤如下：

(1)求出截矩阵 R_α，且空去该布尔矩阵的主对角线的右上半部分；

(2)将主对角线上的"1"对应地用其对象 x_i 的标号 i 来代替；

(3)将剩下的"0,1"中的"0"去掉，而用" * "替代"1"；

(4)用经线(竖线)与纬线(横线)将" * "与对角线上的序号连接，即编网，通过如此打结而连接的对象归于一类.

按聚类原则，编网法聚类与 $t(R)$ 聚类是等价的.

仍以例 4.1.5 中照片分类为例. 取 $\alpha=0.6$，按上述步骤我们作图如图4.1.6所示.

由图 4.1.6 可得在 $\alpha=0.6$ 水平下的分类：

$$\{1,6,8,13,16\},\quad \{2,5,7,11,14\},\quad \{4,9,10,12,15\},\quad \{3\}$$

可见聚类结果与直接法所得结果一致.

3. 最大树法

设 R 是 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 上的相似关系，I 是 X 上的恒等关系，则 $G=(X,R\backslash I)$ 是 Fuzzy 图. 又设 T 是 G 的基础图 G^* 的生成树，$E_T=E(T)\cap R$，则 $T=(X,E_T)$ 是 G 的生成树. 因为 T 中恰有 $n-1$ 条枝，故 E_T 最多只有 $n-1$ 个不同的值，设为 $\alpha_1>\alpha_2>\cdots>\alpha_l(l\leqslant n-1)$。任取 α_i，将 $E_T(e_k)<\alpha_i$ 的枝从 T 中全部移出，即可以获得在水平 α_i 上的分类. 下面证明 $G=(X,R\backslash I)$ 的最大树聚类与用 Fuzzy 等价关系 $t(R)$ 的聚类结果完全相同.

定理 4.1.3 设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，$R=(r_{ij})_{n\times n}$ 是 X 上的相似关系，

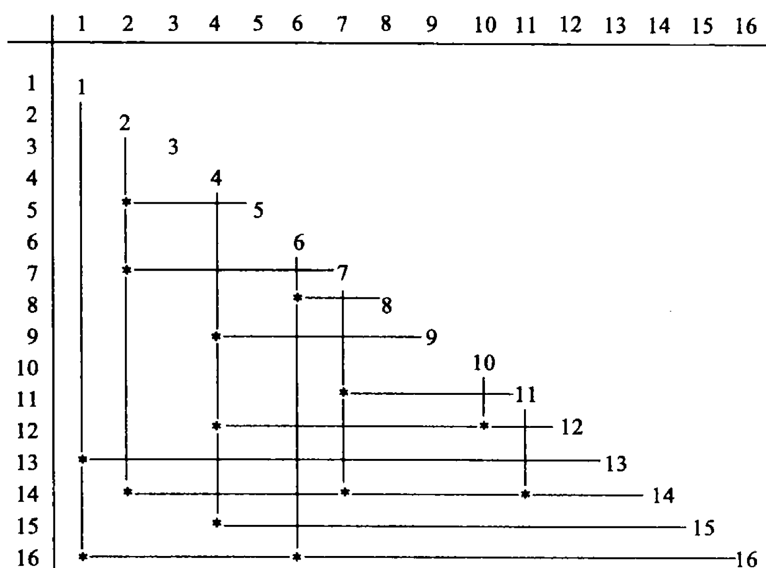


图 4.1.6

$t(R)=R^n=(r_{ij}^{(n)})_{n\times n}$ 是 R 的传递闭包，并且 Fuzzy 图 $G=(X,R\backslash I)$ 是连通的，$S(x_i,x_j)$ 是 G 中不同两点 x_i 与 x_j 的连通强度，则

$$t(R)(x_i,x_j)=r_{ij}^{(n)}=S(x_i,x_j),\ (x_i\neq x_j) \tag{4.1.14}$$

证明 任取 $x_i,x_j\in X$，且 $x_i\neq x_j$. 则

$$t(R)(x_i,x_j)=r_{ij}^{(n)}=\bigvee_{j_1=1}^{n}\bigvee_{j_2=1}^{n}\cdots\bigvee_{j_{n-1}=1}^{n}\{r_{ij_1}\wedge r_{j_1j_2}\wedge\cdots\wedge r_{j_{n-1}j}\}$$

任取 G 中连接 x_i 与 x_j 的路 $P=x_ix_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_l}x_j$，其中 $l\leqslant n-1$，则

$$t(R)(x_i,x_j)=r_{ij}^{(n)}\geqslant\underbrace{r_{ii}\wedge r_{ii}\wedge\cdots\wedge r_{ii}}_{n-l-1个}\wedge r_{ij_1}\wedge\cdots\wedge r_{j_lj}$$

$$=r_{ij_1}\wedge r_{j_1j_2}\wedge\cdots\wedge r_{j_lj}=S(P)$$

这里 $S(P)=r_{ij_1}\wedge\cdots\wedge r_{j_lj}$ 是路 P 的强度. 设在 G 中有 $P_1,P_2,\cdots,P_k$ 共 k 条路连接 x_i 与 x_j，则由上述 P 的任意性有

$$t(R)(x_i,x_j)\geqslant\bigvee_{t=1}^{k}S(P_t)=S(x_i,x_j)$$

另一方面，任取 $x_{j_1},x_{j_2},\cdots,x_{j_{n-1}}\in X$，则 $x_ix_{j_1},x_{j_1}x_{j_2},\cdots,x_{j_{n-1}}x_j$ 中必包含有从 x_i 到 x_j 的路 P，且该路 P 的强度

$$S(P)\geqslant r_{ij_1}\wedge r_{j_1j_2}\wedge\cdots\wedge r_{j_{n-1}j}$$

用 $P(x_i,x_j)$ 表示 G 中由 x_i 到 x_j 的全部路的集，则

$$S(x_i,x_j)=\bigvee_{P\in P(x_i,x_j)} S(P)\geqslant \bigvee_{j_1=1}^{n}\bigvee_{j_2=1}^{n}\cdots\bigvee_{j_{n-1}=1}^{n}\{r_{ij_1}\wedge r_{j_1j_2}\wedge\cdots\wedge r_{j_{n-1}j}\}$$
$$=t(R)(x_i,x_j)$$

故
$$t(R)(x_i,x_j)=S(x_i,x_j).$$ □

由定理 3.11.1 知，若 $S(x_i,x_j)$ 是连通的 Fuzzy 图 $G=(X,R\backslash I)$ 中连接 x_i 与 x_j（$x_i\neq x_j$）的连通强度，且 $S(x_i,x_i)=1(i=1,2,\cdots,n)$，则 $S:X\times X\to[0,1]$ 是 X 上的 Fuzzy 等价关系. 定理 3.11.2 则说明若 T 是 G 的最大树，当 $x_i\neq x_j$ 时 $S(x_i,x_j)$ 是 T 中由 x_i 到 x_j 的唯一路的强度. 定理 4.1.3 则进一步表明 $S=t(R)$，这说明用 $t(R)$ 聚类与按最大树聚类是等价的.

仍以例 4.1.5 照片分类为例，可以绘出其最大树，如图 4.1.7 所示.

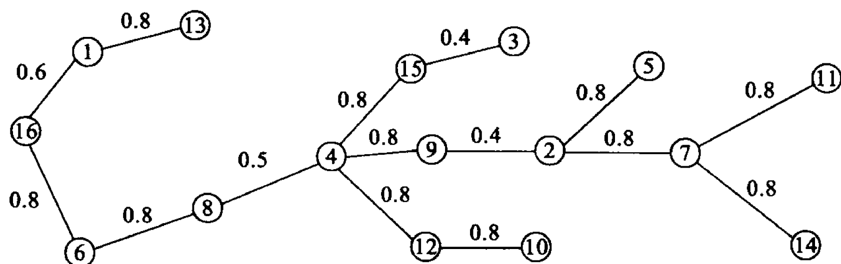


图 4.1.7

取 $\alpha=0.6$，去掉权重低于 0.6 的连线后，得图 4.1.8，分为 4 类（直线连起来的归一类），这与前两种方法所得结果一样.

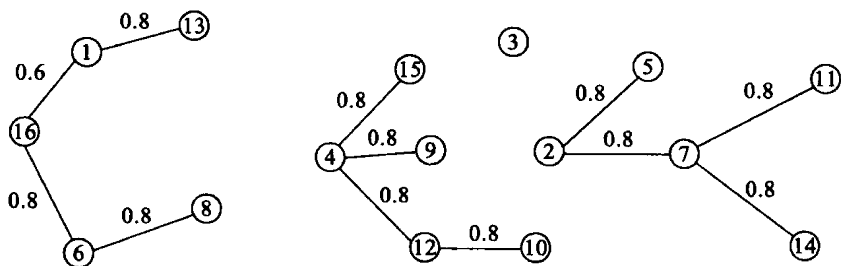


图 4.1.8

4.1.4 最佳算法

由于 Fuzzy 相似矩阵 R 一般不满足传递性，我们通常以 R 的传递闭包

$t(R)$ 来近似 R，而 $t(R)$ 的本质在于以最小的幅度提高 R 的每个元素，以达到传递性. 这样 $t(R)$ 对 R 就产生了传递误差. 下面介绍一个选取最佳算法使这种误差最小的方法.

定义 4.1.1　设 $R=(r_{ij})_{n\times n}$ 为 Fuzzy 相似矩阵，$t(R)=(\hat{r}_{ij})_{n\times n}$ 为 R 的传递闭包. $t(R)$ 对 R 的传递偏差定义为

$$\sigma(R)=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}(\hat{r}_{ij}-r_{ij}) \tag{4.1.15}$$

因 $R\subseteq t(R)$，所以 $\forall i,j\in\{1,2,\cdots,n\}$，$\hat{r}_{ij}-r_{ij}\geqslant 0$. 并且 R 满足传递性当且仅当 $\sigma(R)=0$.

当采用直接聚类法、编网法或最大树法而未经 $t(R)$ 进行 Fuzzy 聚类时，可以取

$$\hat{t}_{ij}=\max\{\lambda_R\in\Lambda_R\,|\,x_i,x_j\text{ 在 }\lambda_R\text{ 水平上属于同一个等价类}\}$$

其中，Λ_R 表示 $R=(r_{ij})_{n\times n}$ 中全部不同的元素所构成的集合.

设用来构造 $R=(r_{ij})_{n\times n}$ 的算法为

$$\mathscr{L}=\{L_1,L_2,\cdots,L_m\} \tag{4.1.16}$$

对于算法 $L_k\in\mathscr{L}$，求出 Fuzzy 相似矩阵 R_k，进而有 $(\hat{r}_{ij}^{(k)})_{n\times n}$，然后求得传递偏差 $\sigma(R_k)$. 求出一个算法 $L_0\in\mathscr{L}$，使其传递偏差达到最小，则该算法 L_0 就是最佳算法.

4.1.5　最佳置信水平的选择

上面的聚类方法是动态聚类，方法本身无法知道该分多少类，即置信水平 α 取多少. 下面介绍一个选取最佳置信水平的方法.

定义 4.1.2　设 $R=(r_{ij})_{n\times n}$ 为 Fuzzy 相似矩阵，C_α 为 $t(R)$ 的 α 水平的一个等价类，称

$$S(C_\alpha)=\max\{\alpha-r_{ij}\,|\,x_i,x_j\in C_\alpha\text{ 且 }r_{ij}\leqslant\alpha\} \tag{4.1.17}$$

为 R_α 的 α 偏差；而称

$$S(R_\alpha)=\max\{S(C_\alpha)\,|\,C_\alpha\text{ 为 }t(R)\text{ 的 }\alpha\text{ 水平的一个等价类}\} \tag{4.1.18}$$

为 $R=(r_{ij})_{n\times n}$ 的 α 偏差度.

由定义可以推出下面结论.

定理 4.1.4　设 $R=(r_{ij})_{n\times n}$ 为 Fuzzy 相似矩阵，$S(R_\alpha)$ 为 $R=(r_{ij})_{n\times n}$ 的 α 偏差度，则 $t(R)=R$ 当且仅当 $\forall\alpha\in[0,1]$，$S(R_\alpha)=0$.

证明　设 $t(R)=R$，则 $\forall\alpha\in[0,1]$，由 $x_i,x_j\in C_\alpha$ 可以推出 $r_{ij}=\hat{r}_{ij}\geqslant\alpha$. 如果 $r_{ij}\leqslant\alpha$，那么 $\alpha-r_{ij}=0$，于是 $S(C_\alpha)=0$. 因此 $\forall\alpha\in[0,1]$，$S(R_\alpha)=0$.

反之，设 $\forall \alpha \in [0,1], S(R_\alpha)=0$，则对于 $\alpha=\hat{r}_{ij}$，也有 $S(R_\alpha)=0$. 于是 $\forall i,j$，$\hat{r}_{ij}=r_{ij}$，即

$$t(R)=R. \qquad \square$$

如果 $S(R_\alpha)=0$，这时 R 形成的 Fuzzy 聚类称为无偏差聚类.

对于有偏差聚类，可以采用下面的方法.

选定 α_1 和 α_2 满足 $0<\alpha_1<\alpha_2<1$，对每个 $\alpha \in [\alpha_1,\alpha_2]$，计算 $S(R_\alpha)$，则

$$S(R_{\alpha_0})=\min\{S(R_\alpha) \mid \alpha_1 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_2\} \tag{4.1.19}$$

称 $S(R_{\alpha_0})$ 为置信约束 $[\alpha_1,\alpha_2]$ 之下的最优聚类.

以例 4.1.3 环境分类为例，给出 R 的 α 偏差度 $S(R_\alpha)$：

当 $\alpha=0.8$ 时，相应的等价类为

$$\{\text{I, III}\}, \quad \{\text{IV}\}, \quad \{\text{V}\}, \quad \{\text{II}\}$$

这时 $S(C_{0.8})=0, 0, 0, 0$，故 $S(R_{0.8})=0$.

当 $\alpha=0.6$ 时，相应的等价类为

$$\{\text{I, III}\}, \quad \{\text{IV, V}\}, \quad \{\text{II}\}$$

这时 $S(C_{0.6})=0, 0, 0$，故 $S(R_{0.6})=0$.

当 $\alpha=0.5$ 时，相应的等价类为

$$\{\text{I, III, IV, V}\}, \quad \{\text{II}\}$$

这时 $S(C_{0.5})=0.4, 0$，故 $S(R_{0.5})=0.4$.

当 $\alpha=0.4$ 时，相应的等价类为

$$\{\text{I, II, III, IV, V}\}$$

这时 $S(C_{0.5})=0.3$，故 $S(R_{0.5})=0.3$.

这时 $\min\{S(R_\alpha) \mid 0.4 \leqslant \alpha \leqslant 0.8\}=0$，$\alpha$ 取 0.6 或 0.8.

§4.2 基于 Fuzzy 相似关系的最优 Fuzzy 聚类

对于一般实际问题通常只能获得样本 X 上的 Fuzzy 相似关系 R，而上述按 Fuzzy 等价关系聚类，即按该 Fuzzy 相似关系 R 的传递闭包 $t(R)$ 聚类，这必然导致“失真”. 但“失真”是不可避免的，为了失真性达到最小，可以使用 Fuzzy 图的最优树聚类.

定义 4.2.1 设 $R=(r_{ij})_{n\times n}$ 是 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 上的 Fuzzy 相似关系，$S^*=(s_{ij}^*)_{n\times n}$ 是 X 上的 Fuzzy 等价关系，使得对 X 上的任意等价关系 $S=$

$(s_{ij})_{n\times n}$ 都有

$$\rho(R,S^*)=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}(s_{ij}^*-r_{ij})^2\leqslant\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}(s_{ij}-r_{ij})^2=\rho(R,S)\tag{4.2.1}$$

则按 S^* 对 X 进行聚类分析的结果称为关于 R 对 X 的最优 Fuzzy 聚类(optimal fuzzy clustering).

容易证明以下定理.

定理 4.2.1　若 $T=(X,E_T)$ 是 $G=(X,R\backslash I)$ 的任意一棵 Fuzzy 树，当 $x_i\neq x_j$ 时，用 $S(x_i,x_j)$ 表示 T 中由 x_i 到 x_j 的唯一路强度，且 $S(x_i,x_i)=1$，$(i=1,2,\cdots,n)$，则 S 是 X 上的 Fuzzy 等价关系.

由最优树的定义知，使用 $G=(X,R\backslash I)$ 的最优树作聚类时，所得结果就是关于 R 对 X 的最优聚类.

例 4.2.1　设 $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$，$R$ 是 X 上的 Fuzzy 相似关系，且

$$R=\begin{bmatrix}1&0.80&0.60&0.20&0.10\\0.80&1&0.80&0.85&0.20\\0.60&0.80&1&0.90&0\\0.20&0.85&0.90&1&0.10\\0.10&0.20&0&0.10&1\end{bmatrix}$$

则 $G=(X,R\backslash I)$ 是 Fuzzy 图，由例 3.11.4 得到 G 的最优树 T，如图 4.2.1 所示. 使用最优树可以获得聚类图，如图 4.2.2 所示. 另外，容易计算 R 的传递闭包

$$t(R)=R^2=\begin{bmatrix}1&0.80&0.80&0.80&0.20\\0.80&1&0.85&0.85&0.20\\0.80&0.85&1&0.90&0\\0.80&0.85&0.90&1&0.20\\0.20&0.20&0.20&0.20&1\end{bmatrix}$$

使用传递闭包 $t(R)$（亦即最大树）可以获得聚类图，如图 4.2.3 所示. 将图 4.2.2与图 4.2.3 作比较，其基本结构完全相同，只是聚类水平不同. 如在图 4.2.3中 x_1,x_2,x_3,x_4 在 0.8 的水平聚为一类，而图 4.2.2 说明 x_1,x_2,x_3,x_4 聚为一类是在 0.533 水平上. 实际上，x_1 与 x_3 只有 0.6 的相似性，x_1 与 x_4 只有 0.2 的相似性，仅凭 x_1 与 x_2 的相似性为 0.8，就判断 x_1 在 0.8 的水平上与 x_2，x_3，x_4 聚为一类是不太符合实际的. 但认为 x_1 在 $(0.8+0.6+0.2)/3\approx0.533$ 的水平上与 x_2,x_3,x_4 合为一类，这是可以被人接受的.

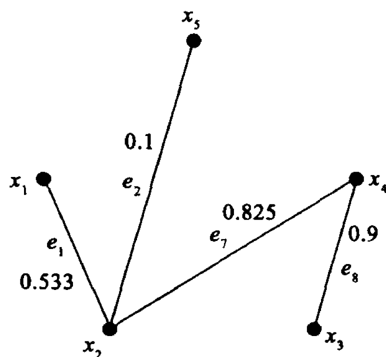


图 4.2.1

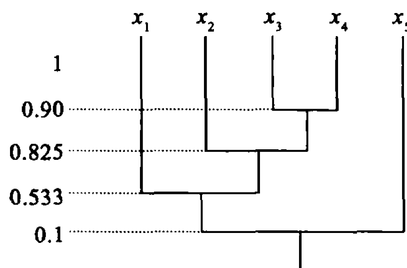


图 4.2.2

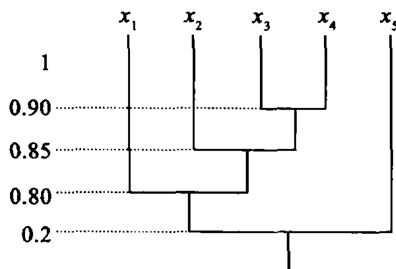


图 4.2.3

§4.3 基于 Fuzzy 划分的 Fuzzy 聚类分析

4.3.1 Fuzzy 划分

欲将数据集 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 分为 c 类 $(1\leqslant c\leqslant n)$，使得 X 中的任意样本 x_k 必须属于且只属于某一类，以及每一类至少包含一个样本. 这种问题的分类结果可以用一个 $c\times n$ 阶矩阵 D 来表示，D 中的元素 d_{ik} 为

$$d_{ik}=\begin{cases}1, & x_k\in A_i\\ 0, & x_k\overline{\in} A_i\end{cases}\tag{4.3.1}$$

式中，$A_i(i=1,2,\cdots,c)$ 表示第 i 类.

矩阵 D 具有如下性质：

(1) $d_{ik}\in\{0,1\}$，$\forall i,k$；

(2) $\sum_{i=1}^{c}d_{ik}=1$，$\forall k$；

(3) $\sum_{k=1}^{n} d_{ik} > 0, \forall i$.

称 D 为 X 的硬 c -划分(crisp c -partitions). 当无需强调 c 参数时,就简称为硬划分. 硬 c -划分的全体记做 $\mathscr{D}(c)$.

例 4.3.1 设 $X=\{x_1,x_2,x_3\}$,则下列矩阵是 X 的硬 2-划分

$$D_1 = \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_3 = \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad \square$$

当上述分类矩阵的元素的取值并非限于 $\{0,1\}$ 二值,而位于区间$[0,1]$时,则演变为 Fuzzy 划分.

定义 4.3.1 (Ruspini, 1969) 设 c,n 是给定的两个正整数且 $1 \leqslant c \leqslant n$, $D=(d_{ik})_{c\times n}$ 是 Fuzzy 矩阵,且满足条件:

(1) $d_{ik} \in [0,1], \forall i,k$;

(2) $\sum_{i=1}^{c} d_{ik} = 1, \forall k$;

(3) $\sum_{k=1}^{n} d_{ik} > 0, \forall i$.

称 D 为 Fuzzy c -划分(fuzzy c -partitions). 当无需强调 c 参数时,就简称为 Fuzzy 划分. Fuzzy c -划分的全体记做 $\mathscr{D}_f(c)$.

例 4.3.2 设 $X=\{x_1,x_2,x_3\}$, $c=2$,则下列两种情况是可能存在的 Fuzzy 划分

$$D_1 = \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

以及

$$D_2 = \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 & 0.9 \\ 0.2 & 0.7 & 0.1 \end{bmatrix}. \quad \square$$

4.3.2 基于 Fuzzy 划分的聚类方法

由于 Fuzzy 划分可以得到样本分属于各个类别的不确定性程度,建立了对于类别的不确定性的描述,因此更能客观地反映现实世界.

设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 是样本集, $x_k=(x_{k1},x_{k2},\cdots,x_{km})' \in \mathbf{R}^m$, $D=$

$(d_{ik})_{c\times n}$ 为硬划分矩阵，v_i（$i=1,2,\cdots,c$）表示第 i 类的代表（典型）向量或聚类原型（clustering prototype）向量，$v_i=(v_{i1},v_{i2},\cdots,v_{im})'\in\mathbf{R}^m$. 定义硬聚类分析的目标函数为

$$J(D,V)=\sum_{i=1}^{c}\left(\sum_{x_k\in X_i}(s_{ik})^2\right) \tag{4.3.2}$$

式中，X_i 为样本集 X 的第 i 类. s_{ik} 表示第 i 类中的样本 x_k 与第 i 类的典型样本 v_i 之间的距离. $J(D,V)$ 表示各类中样本与其典型样本的误差平方和. 利用硬划分矩阵 $D=(d_{ik})_{c\times n}$，$J(D,V)$ 也可以表示为

$$J(D,V)=\sum_{i=1}^{c}\sum_{k=1}^{n}d_{ik}(s_{ik})^2 \tag{4.3.3}$$

聚类准则为寻找最佳组对 (D, V)，以使得在满足约束 $D\in\mathscr{D}(c)$ 条件下 $J(D,V)$ 为最小. 解决这类优化问题常用的方法是用迭代法求取 $J(D,V)$ 的近似最小值.

Dunn(1974)按照 Ruspini(1969)定义的 Fuzzy 划分的概念，把硬聚类的目标函数推广到 Fuzzy 聚类的情形. 为了避免产生平凡解，保证这一推广有意义，Dunn 对每个样本与每类原型之间的距离用其隶属度平方加权，从而把类内误差平方和目标函数扩展为类内加权误差平方和目标函数

$$J(D,V)=\sum_{i=1}^{c}\sum_{k=1}^{n}(d_{ik})^2(s_{ik})^2 \tag{4.3.4}$$

Bezdek(1981)又将 Dunn 的目标函数推广为更普通的形式. 下面我们讨论基于 Bezdek 目标函数的聚类问题，首先给出下面的定义.

定义 4.3.2 （Bezdek，1981）设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}\subseteq\mathbf{R}^m$ 是样本集；$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_c\}\subseteq\mathbf{R}^m$，且 $1\leqslant c\leqslant n$；$D=(d_{ij})_{c\times n}\in\mathscr{D}_f(c)$；$p\in\mathbf{R}$，且 $p>1$，令

$$J(D,V)=\sum_{i=1}^{c}\sum_{k=1}^{n}(d_{ik})^p\|v_i-x_k\|^2 \tag{4.3.5}$$

$J(D,V)$ 称为依 Fuzzy 划分聚类的准则函数（criterion function）. 其中 $\|\cdot\|$ 为向量的模，即

$$\|x\|=\sqrt{(x,x)}=\left[\sum_{i=1}^{m}(x^{(i)})^2\right]^{\frac{1}{2}},\ x=(x^{(1)},x^{(2)},\cdots,x^{(m)})'\in\mathbf{R}^m \tag{4.3.6}$$

这里

$$(x,y)=\sum_{i=1}^{m}x^{(i)}y^{(i)}\ (x=(x^{(1)},x^{(2)},\cdots,x^{(m)})',y=(y^{(1)},y^{(2)},\cdots,y^{(m)})'\in\mathbf{R}^m)$$

为向量 x 和 y 的内积或数量积.

定义 4.3.3　若对于给定的 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}\subseteq\mathbf{R}^m$，有 $V^*=\{v_1^*,v_2^*,\cdots,v_c^*\}\subseteq\mathbf{R}^m$ 和 $D^*\in\mathscr{D}_f(c)$，使对 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_c\}\subseteq\mathbf{R}^m$ 和 $D\in\mathscr{D}_f(c)$ 都有

$$J(D^*,V^*)\leqslant J(D,V) \tag{4.3.7}$$

称 D^* 为 X 的最优 Fuzzy c-划分(optimal fuzzy c-partitions)或最优 Fuzzy 划分，V^* 称为最优 Fuzzy 聚类中心(optimal fuzzy clustering centre)或最优聚类中心.

定理 4.3.1　设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}\subseteq\mathbf{R}^m$ 是样本集，$D\in\mathscr{D}_f(c)$ 是确定的，则当 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_c\}\subseteq\mathbf{R}^m$，且

$$v_i=\frac{\sum_{k=1}^{n}(d_{ik})^p x_k}{\sum_{k=1}^{n}(d_{ik})^p},\qquad i=1,2,\cdots,c \tag{4.3.8}$$

时，$J(D,V)$ 取极小值(其中 $p>1$ 为常数).

证明　因为 $D=(d_{ik})_{c\times n}$ 是确定的，故 d_{ik} 都是定数，$J(D,V)$ 只与 V 有关，记

$$H(V)\triangleq J(D,V)=\sum_{i=1}^{c}\sum_{k=1}^{n}(d_{ik})^p\|v_i-x_k\|^2$$

为使 $H(V)$ 达到极小值，只需对每个 i，能使

$$H_i(v_i)=\sum_{k=1}^{n}(d_{ik})^p\|v_i-x_k\|^2$$

取极小值. 现固定 i，设 $H_i(v_i)$ 在 v_i 处取极小值，则对于该确定的 i 和任意确定的 $u\in\mathbf{R}^m$，函数

$$\begin{aligned}h(t)&=\sum_{k=1}^{n}(d_{ik})^p\|v_i+tu-x_k\|^2=\sum_{k=1}^{n}(d_{ik})^p(v_i+tu-x_k,v_i+tu-x_k)\\&=\sum_{k=1}^{n}(d_{ik})^p[(v_i-x_k,v_i-x_k)+2t(v_i-x_k,u)+t^2(u,u)]\end{aligned}$$

当 $t=0$ 时，取极小值，故 $\left.\dfrac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=0$，而

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}&=\sum_{k=1}^{n}(d_{ik})^p[2(v_i-x_k,u)+2t(u,u)]_{t=0}\\&=2\sum_{k=1}^{n}(d_{ik})^p(v_i-x_k,u)=2\left(v_i\sum_{k=1}^{n}(d_{ik})^p-\sum_{k=1}^{n}(d_{ik})^p x_k,u\right)=0\end{aligned}$$

因为 u 是任意的,故只能有

$$v_i \sum_{k=1}^{n} (d_{ik})^p - \sum_{k=1}^{n} (d_{ik})^p x_k = 0$$

又因 $D \in \mathscr{D}_f(c)$, 故 $\sum_{k=1}^{n} (d_{ik})^p > 0$, 于是可以得到式(4.3.8). □

定理 4.3.2 设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\} \subseteq \mathbf{R}^m$ 是样本集,固定 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_c\} \subseteq \mathbf{R}^m$, 并取定 $p>1$, $c<n$. 任取 $k\ (1 \leqslant k \leqslant n)$.

(1)若有 $l(1 \leqslant l \leqslant c)$ 使 $x_k = v_l$, 则令

$$d_{ik}^* = \begin{cases} 1, & i=l \\ 0, & i \neq l \end{cases} \tag{4.3.9}$$

(2)若对于任意 i, 都有 $x_k \neq v_i$, 则令

$$d_{ik}^* = \frac{1}{\sum_{t=1}^{c} \left(\frac{\| v_i - x_k \|}{\| v_t - x_k \|} \right)^{\frac{2}{p-1}}}, \quad i=1,2,\cdots,c \tag{4.3.10}$$

设 $D^* = (d_{ik}^*)_{c\times n}$, 则 $D^* \in \mathscr{D}_f(c)$, 且使

$$G(D) = J(D,V) \tag{4.3.11}$$

取极小值.

证明 设 $D=(d_{ik})_{c\times n}$, 令 $D_k = (d_{1k},d_{2k},\cdots,d_{ck})'$, 则 $D=(D_1,D_2,\cdots,D_n)$. 因为 V 是固定的,故 $J(D,V)$ 只与 D 有关,记做 $G(D)$. 令

$$G_k(D_k) = \sum_{i=1}^{c} (d_{ik})^p \| v_i - x_k \|^2, \ k=1,2,\cdots,n$$

$$G(D) = J(D,V) = \sum_{k=1}^{n} G_k(D_k)$$

因此, $D=(D_1,D_2,\cdots,D_n)$ 使 $G(D)$ 取极小值,当且仅当对于每一个 k, D_k 使 $G_k(D_k)$ 取极小值.

现任取 $k(1 \leqslant k \leqslant n)$.

(1)若有 $l(1 \leqslant l \leqslant c)$ 使 $x_k = v_l$, 则令

$$d_{ik}^* = \begin{cases} 1, & i=l \\ 0, & i \neq l \end{cases}$$

这时 $G_k(D_k^*)=0$, 达到了极小值.

(2)若对于任意 i 都有 $x_k \neq v_i$, 由此立即推知,对于任意 i

$$\| v_i - x_k \| > 0$$

可以将 $G_k(D_k)$ 取极小值的问题归结为如下条件极值问题

$$\min G_k(D_k) = \sum_{i=1}^{c} (d_{ik})^p \| v_i - x_k \|^2$$

$$\text{s.t.}\quad \sum_{i=1}^{c} d_{ik} = 1$$

记
$$F_k(D_k,\lambda) = \sum_{i=1}^{c} (d_{ik})^p \| v_i - x_k \|^2 - \lambda\Big(\sum_{i=1}^{c} d_{ik} - 1\Big)$$

令
$$\frac{\partial F_k(D_k,\lambda)}{\partial d_{ik}} = p\,(d_{ik})^{p-1} \| v_i - x_k \|^2 - \lambda = 0,\ i=1,2,\cdots,c$$

因为 $\| v_i - x_k \| \neq 0$，故

$$d_{ik}^* = \left(\frac{\lambda}{p}\right)^{\frac{1}{p-1}} \frac{1}{\| v_i - x_k \|^{\frac{2}{p-1}}} \tag{4.3.12}$$

由
$$\sum_{i=1}^{c} d_{ik}^* = 1$$

得
$$1 = \sum_{t=1}^{c} d_{tk}^* = \left(\frac{\lambda}{p}\right)^{\frac{1}{p-1}} \sum_{t=1}^{c} \frac{1}{\| v_t - x_k \|^{\frac{2}{p-1}}}$$

由此得

$$\left(\frac{\lambda}{p}\right)^{\frac{1}{p-1}} = \frac{1}{\sum_{t=1}^{c} \frac{1}{\| v_t - x_k \|^{\frac{2}{p-1}}}} \tag{4.3.13}$$

将式(4.3.13)代入式(4.3.12)就得式(4.3.10).

由假设 $c < n$，故至少有一个 k，使得对于任意 i，都有 $x_k \neq v_i$. 对此 k，d_{ik}^* 由式(4.3.10)确定，显然，对于任意 i，都有 $d_{ik}^* > 0$. 故对于任意 i，都有 $\sum_{k=1}^{n} d_{ik}^* > 0$，则 $D^* = (d_{ik}^*)_{c\times n} \in \mathcal{D}_f(c)$. □

若数据集 X、聚类类别数 c 和权重 m 值已知，就能由式(4.3.8)和式(4.3.10)确定最佳 Fuzzy 分类矩阵和 Fuzzy 聚类中心. 这类优化问题可以用迭代算法来求解.

现由定理 4.3.1 和定理 4.3.2 给出基于 Fuzzy 聚类的具体算法如下：

(1)对于给定的样本集 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\} \subset \mathbf{R}^m$，确定正整数 c(要求将 X 分为 c 类，$c < n$)和 $p > 1$ 及某个 $\varepsilon > 0$(允许误差).

(2)任意置定 Fuzzy 划分矩阵 $D^{(0)} = (d_{ik}^{(0)})_{c\times n} \in \mathcal{D}_f(c)$.

(3)依次取 $l=0,1,2,\cdots$.

(4)根据 $D^{(l)}$，计算 $v_i^{(l)}$

$$v_i^{(l)} = \frac{\sum_{k=1}^{n} (d_{ik}^{(l)})^p x_k}{\sum_{k=1}^{n} (d_{ik}^{(l)})^p},\quad i=1,2,\cdots,c \tag{4.3.14}$$

(5)按如下方法更新 $D^{(l)}$ 为 $D^{(l+1)}$.

对 $k=1,2,\cdots,n$

① 若有 $j(1\leqslant j\leqslant c)$ 使 $x_k=v_j^{(l)}$，则令

$$d_{ik}^{(l+1)}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases},\quad i=1,2,\cdots,c \tag{4.3.15}$$

② 若对于任意 i，都有 $x_k\neq v_j^{(l)}$，则令

$$d_{ik}^{(l+1)}=\frac{1}{\sum_{t=1}^{c}\left(\frac{\| v_i^{(l)}-x_k\|}{\| v_t^{(l)}-x_k\|}\right)^{\frac{2}{p-1}}},\quad i=1,2,\cdots,c. \tag{4.3.16}$$

(6)计算出 $J(D^{(l)},V^{(l)})$ 和 $J(D^{(l+1)},V^{(l+1)})$. 由定理 4.3.1 和定理 4.3.2 易得

$$0\leqslant J(D^{(l+1)},V^{(l+1)})\leqslant J(D^{(l)},V^{(l)})$$

故 $\lim\limits_{l\to+\infty}J(D^{(l)},V^{(l)})$ 存在. 因此若

$$J(D^{(l)},V^{(l)})-J(D^{(l+1)},V^{(l+1)})<\varepsilon$$

则停止,以 $D^{(l+1)}$ 和 $V^{(l+1)}$ 作为最优 Fuzzy 划分和最优聚类中心,否则置 $l=l+1$,并返回(4).

复杂的计算工作由计算机完成. 下面给出简单的算例.

例 4.3.3 设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_7\}\subset\mathbf{R}$，各自的坐标分别是 $x_1=1$，$x_2=2$，$x_3=3$，$x_4=4$，$x_5=5$，$x_6=6$，$x_7=7$. 给定 $c=2$，即将 X 分为 2 类；又选定 $p=2$. 如果取初始 Fuzzy 划分为

$$d_{ik}^{(0)}=\begin{cases}1, & i=1,k=1,3,5,7;i=2,k=2,4,6\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

则 $\forall l\in\mathbf{N}$，都有

$$v_1^{(l)}=v_2^{(l)}=4$$

$$D^{(l)}=\begin{bmatrix}0.5 & 0.5 & 0.5 & 1 & 0.5 & 0.5 & 0.5\\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0.5\end{bmatrix}$$

$$J(D^{(l)},V^{(l)})=7.00.$$

□

例 4.3.4 对于例 4.3.3，$c=2$ 和 $p=2$ 不变，取定初始 Fuzzy 划分 $d_{ik}^{(0)}$，$\varepsilon=0.001$，依据上述算法列表计算如下. 如表 4.3.1 所示.

因为 $J(D^{(5)},V^{(5)})-J(D^{(6)},V^{(6)})=0.000746<0.001=\varepsilon$

故可以取

表 4.3.1

l	X	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$V=\{v_1,v_2\}$
	x_k 的坐标	1	2	3	4	5	6	7	与 $J(D,V)$
0	$d_{1k}^{(0)}$	1	1	1	0	1	0	1	$v_1^{(0)}=3.6$
	$d_{2k}^{(0)}$	0	0	0	1	0	1	0	$v_2^{(0)}=5$
	$\Vert v_1^{(0)}-x_k\Vert^2$	6.76	2.56	0.36	0.16	0.96	5.76	11.56	$J(D^{(0)},V^{(0)})$
	$\Vert v_2^{(0)}-x_k\Vert^2$	16.00	9.00	4.00	1.00	0	1.00	4.00	$=25.2$
1	$d_{1k}^{(1)}$	0.70	0.78	0.92	0.86	0	0.15	0.26	$v_1^{(1)}=2.81$
	$d_{2k}^{(1)}$	0.30	0.22	0.08	0.14	1	0.85	0.74	$v_2^{(1)}=5.53$
	$\Vert v_1^{(1)}-x_k\Vert^2$	3.28	0.66	0.04	1.41	4.79	10.16	17.54	$J(D^{(1)},V^{(1)})$
	$\Vert v_2^{(1)}-x_k\Vert^2$	20.53	12.47	6.41	2.35	0.28	0.22	2.16	$=8.625874$
2	$d_{1k}^{(2)}$	0.86	0.95	0.99	0.62	0.06	0.02	0.11	$v_1^{(2)}=2.36$
	$d_{2k}^{(2)}$	0.14	0.05	0.01	0.38	0.94	0.98	0.89	$v_2^{(2)}=5.83$
	$\Vert v_1^{(2)}-x_k\Vert^2$	1.85	0.13	0.41	2.69	6.97	13.24	0.11	$J(D^{(2)},V^{(2)})$
	$\Vert v_2^{(2)}-x_k\Vert^2$	23.30	14.64	7.99	3.34	0.68	0.03	0.89	$=5.911534$
3	$d_{1k}^{(3)}$	0.93	0.99	0.95	0.55	0.09	0.00	0.06	$v_1^{(3)}=2.23$
	$d_{2k}^{(3)}$	0.07	0.01	0.05	0.45	0.91	1.00	0.94	$v_2^{(3)}=5.87$
	$\Vert v_1^{(3)}-x_k\Vert^2$	1.51	0.05	0.59	3.14	7.68	14.22	22.76	$J(D^{(3)},V^{(3)})$
	$\Vert v_2^{(3)}-x_k\Vert^2$	23.72	14.98	8.24	3.50	0.76	0.02	1.28	$=5.609265$
4	$d_{1k}^{(4)}$	0.94	1.00	0.93	0.53	0.09	0.00	0.05	$v_1^{(4)}=2.19$
	$d_{2k}^{(4)}$	0.06	0.00	0.07	0.47	0.91	1.00	0.95	$v_2^{(4)}=5.86$
	$\Vert v_1^{(4)}-x_k\Vert^2$	1.42	0.04	0.65	3.27	7.89	14.51	23.12	$J(D^{(4)},V^{(4)})$
	$\Vert v_2^{(4)}-x_k\Vert^2$	23.63	14.91	8.19	3.46	0.74	0.02	1.30	$=5.590508$
5	$d_{1k}^{(5)}$	0.94	1.00	0.93	0.51	0.09	0.00	0.05	$v_1^{(5)}=2.18$
	$d_{2k}^{(5)}$	0.06	0.00	0.07	0.49	0.91	1.00	0.95	$v_2^{(5)}=5.85$
	$\Vert v_1^{(5)}-x_k\Vert^2$	1.38	0.03	0.68	3.32	7.97	14.62	23.27	$J(D^{(5)},V^{(5)})$
	$\Vert v_2^{(5)}-x_k\Vert^2$	23.53	14.83	8.13	3.43	0.72	0.02	1.32	$=5.587598$
6	$d_{1k}^{(6)}$	0.94	1.00	0.92	0.51	0.08	0.00	0.05	$v_1^{(6)}=2.17$
	$d_{2k}^{(6)}$	0.06	0.00	0.08	0.49	0.92	1.00	0.95	$v_2^{(6)}=5.84$
	$\Vert v_1^{(6)}-x_k\Vert^2$	1.37	0.03	0.69	3.35	8.01	14.67	23.33	$J(D^{(6)},V^{(6)})$
	$\Vert v_2^{(6)}-x_k\Vert^2$	23.47	14.78	8.09	3.40	0.71	0.02	1.33	$=5.586852$

$$D^{(6)}=\begin{bmatrix}0.94 & 1.00 & 0.92 & 0.51 & 0.08 & 0.00 & 0.05\\0.06 & 0.00 & 0.08 & 0.49 & 0.92 & 1.00 & 0.95\end{bmatrix}$$

$$v_1^{(6)}=2.17,\quad v_2^{(6)}=5.84$$

如果取 $p=\frac{3}{2}$

$$D^{(8)}=\begin{bmatrix}0.996 & 1 & 0.994 & 0.519 & 0.007 & 0 & 0.004\\0.004 & 0 & 0.006 & 0.481 & 0.993 & 1 & 0.996\end{bmatrix}$$

$$v_1^{(8)}=2.22,\quad v_2^{(8)}=5.80$$

如果取 $p=3$

$$D^{(7)}=\begin{bmatrix}0.813 & 0.968 & 0.768 & 0.502 & 0.237 & 0.028 & 0.186\\0.187 & 0.032 & 0.232 & 0.498 & 0.763 & 0.972 & 0.814\end{bmatrix}$$

$$v_1^{(7)}=2.12,\quad v_2^{(7)}=5.89.$$

□

4.3.3 聚类效果的检验

在上述聚类方法中,不同的 c, $D^{(0)}$, ε 和 p, 得到不同的局部最优解. 如何从这些最优解中选出最佳呢? 这就需要有鉴别聚类效果的指标. 下面介绍两种检验聚类效果的方法.

1. *分类系数法*

考虑分类系数

$$F_c(D)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{c}d_{ik}^2,\ D=(d_{ik})_{c\times n}\in\mathscr{D}_f(c) \tag{4.3.17}$$

当 $D\in\mathscr{D}(c)$时, $F_c(D)=1$. 因此, $F_c(D)$ 越接近于 1, 聚类效果越好.

2. *平均 Fuzzy 熵法*

考虑平均 Fuzzy 熵法

$$H_c(D)=-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{c}d_{ik}\ln(d_{ik}) \tag{4.3.18}$$

当 $D\in\mathscr{D}(c)$时, $H_c(D)=0$. 因此, $H_c(D)$ 越接近于 0, 聚类效果越好.

4.3.4 目标函数的改进

设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}\subseteq\mathbf{R}^m$ 是样本集; $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_c\}\subseteq\mathbf{R}^m$, 且 $1\leqslant c\leqslant n$; $D=(d_{ij})_{c\times n}\in\mathscr{D}_f(c)$; $p\in\mathbf{R}$, 且 $p>1$.

1. *利用 Fuzzy 协方差矩阵来刻画目标函数*

考虑目标函数

$$J(D,V)=\sum_{i=1}^{c}\sum_{k=1}^{n}(d_{ik})^{p}\left(\| v_i-x_k \|_{A_i}\right)^2 \tag{4.3.19}$$

其中 A_i 是 $n\times n$ 对称矩阵($\det(A_i)=\rho_i$ 为固定值)，而 $(\| v_i-x_k\|_{A_i})^2=(v_i-x_k)A_i(v_i-x_k)'$. 当 A 为单位阵时，目标函数即为定义 4.3.2 中的准则函数.

为求 Fuzzy c-划分 D 和 Fuzzy 聚类中心 V 使目标函数 $J(D,V)$ 达到最小值，算法中的式(4.3.14)和式(4.3.16)分别采用如下迭代公式：$l=0,1,2,\cdots$

$$v_i^{(l)}=\frac{\sum_{k=1}^{n}(d_{ik}^{(l)})^{p}x_k}{\sum_{k=1}^{n}(d_{ik}^{(l)})^{p}},\quad i=1,2,\cdots,c \tag{4.3.20}$$

$$d_{ik}^{(l+1)}=\frac{1}{\sum_{t=1}^{c}\left(\frac{\| v_i^{(l)}-x_k\|_{A_i}}{\| v_t^{(l)}-x_k\|_{A_i}}\right)^{\frac{2}{p-1}}},\quad i=1,2,\cdots,c. \tag{4.3.21}$$

其中 $A_i=(\rho_i\det(S_i))^{\frac{1}{2}}S_i^{-1}$，而 $S_i=\sum_{k=1}^{n}(d_{ik}^{(l)})^{p}(x_k-v_i^{(l)})'(x_k-v_i^{(l)})\quad (i=1,2,\cdots,c)$.

2. Fuzzy c-shell (FCS) 聚类算法(Dave，1992)

考虑目标函数

$$J(D,V)=\sum_{i=1}^{c}\sum_{k=1}^{n}(d_{ik})^{p}\left(\| v_i-x_k\|_{A_i}-r_i\right)^2 \tag{4.3.22}$$

其中 $r=(r_1,r_2,\cdots,r_c)$ 为半径.

为求 Fuzzy c-划分 D 和 Fuzzy 聚类中心 V 使目标函数 $J(D,V)$ 达到最小值，算法中的式(4.3.14)和式(4.3.16)分别采用如下迭代公式：$l=0,1,2,\cdots$

$$v_i^{(l)}=\frac{\sum_{k=1}^{n}(d_{ik}^{(l)})^{p}x_k}{\sum_{k=1}^{n}(d_{ik}^{(l)})^{p}},\quad i=1,2,\cdots,c \tag{4.3.23}$$

$$d_{ik}^{(l+1)}=\frac{1}{\sum_{t=1}^{c}\left(\frac{\| v_i^{(l)}-x_k\|_{A_i}-r_i}{\| v_t^{(l)}-x_k\|_{A_i}-r_i}\right)^{\frac{2}{p-1}}},\quad i=1,2,\cdots,c \tag{4.3.24}$$

3. 加权 Fuzzy 聚类算法

考虑目标函数

$$J(D,V)=\sum_{i=1}^{c}\sum_{k=1}^{n}(d_{ik})^{p}\left(\| w(v_i-x_k)\|\right)^2 \tag{4.3.25}$$

其中 $w=(w_1,w_2,\cdots,w_m)$ 为指标权向量.

为求 Fuzzy c-划分 D 和 Fuzzy 聚类中心 V 使目标函数 $J(D,V)$ 达到最小值，算法中的式(4.3.14)和式(4.3.16)分别采用如下迭代公式：$l=0,1,2,\cdots$

$$v_i^{(l)}=\frac{\sum_{k=1}^{n}(d_{ik}^{(l)})^p x_k}{\sum_{k=1}^{n}(d_{ik}^{(l)})^p},\quad i=1,2,\cdots,c \tag{4.3.26}$$

$$d_{ik}^{(l+1)}=\frac{1}{\sum_{t=1}^{c}\left(\frac{\| w(v_i^{(l)}-x_k)\|}{\| w(v_t^{(l)}-x_k)\|}\right)^{\frac{2}{p-1}}},\quad i=1,2,\cdots,c \tag{4.3.27}$$

§4.4 基于保序 Fuzzy 划分的 Fuzzy 聚类分析

在基于 Fuzzy 划分的 Fuzzy 聚类分析中，我们提出了“聚类中心”的概念. 所谓“聚类中心”即某一类的代表，因此，理应有远离这类中心的元素隶属于该类的程度小，而靠近这类中心的元素隶属于该类的程度大. 但从例 4.3.4 中的聚类结果可以看出，无论取 $p=\frac{3}{2},2,3$，$x_7=7$ 比 $x_6=6$ 更远离 v_1(略大于 2)，但 $d_{17}>d_{16}$；$x_1=1$ 比 $x_2=2$ 更远离 v_2(略小于 6)，但 $d_{21}>d_{22}$. 这是不能令人满意的结果. 下面就 $m=1$(即在 $\mathbf{R}$ 内)如何消除这样的结果而进行讨论，并提出保序 Fuzzy 聚类的概念.

定义 4.4.1 设 $D=(d_{ik})_{c\times n}$ 是 Fuzzy 矩阵，且满足

(1)对于任意 i，$\sum_{k=1}^{n}d_{ik}>0$；

(2)对于任意 k，$\sum_{i=1}^{c}d_{ik}=1$，且存在 $1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_c\leqslant n$，使得：

① 当 $k\leqslant j_1$ 时，$d_{1k}=1$，

② 当 $k>j_c$ 时，$d_{ck}=1$，

③ 当 $j_i<k\leqslant j_{i+1}$ 时，$d_{ik}+d_{i+1,k}=1(i=1,2,\cdots,c-1)$.

D 称为 $(j_1,j_2,\cdots,j_c)$ 型保序 Fuzzy 划分(order-preserving fuzzy partition)，简称为保序 Fuzzy 划分.

例 4.4.1 设

$$D=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0.2 & 0.3 & 0.8 & 0.4 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0.7 & 0.2 & 0.6 & 0.9 & 0.8 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.2 & 1\end{bmatrix}$$

则 D 是(2,3,6,8)型保序 Fuzzy 划分. □

例 4.3.4 中所给的 D 都不是保序 Fuzzy 划分.

以下总设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}\subset R$, $x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n$ 和给定的正整数 $1<c<n$, 取定 $Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_c\}\subset\mathbf{R}$, $y_1<y_2<\cdots<y_c$, 并补记 $y_0=-\infty$, $y_{c+1}=+\infty$, 令

$$J_i=\{k\,|\,y_{i-1}<x_k\leqslant y_i\},\ i=1,2,\cdots,c+1 \tag{4.4.1}$$

定义 4.4.2　如果 $\forall i\in\{1,2,\cdots,c\}$, 都有 $J_i\neq\varnothing$, 又当 $J_{c+1}=\varnothing$ 时, $y_c=x_n$, 称 Y 为关于 X 的中心集,也简称为中心集.

定义 4.4.3　设 $Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_c\}$ 是 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 的中心集,令

$$j_i=\max_{k\in J_i}\{k\},\quad i=1,2,\cdots,c \tag{4.4.2}$$

如果 $D=(d_{ik})_{c\times n}$ 是 $(j_1,j_2,\cdots,j_c)$ 型保序 Fuzzy 划分,则称 D 为关于 X 与 Y 的保序 Fuzzy 划分.

定义 4.4.4　设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}\subset\mathbf{R}$ 是样本集; Y 是 X 的中心集, D 为关于 X 与 Y 的保序 Fuzzy 划分, $p\in\mathbf{R}$, 且 $p>1$, 令

$$J(D,Y)=\sum_{i=1}^{c}\sum_{k=1}^{n}(d_{ik})^p(y_i-x_k)^2=\sum_{i=1}^{c}\sum_{k\in J_i\cup J_{i+1}}(d_{ik})^p(y_i-x_k)^2 \tag{4.4.3}$$

$J(D,Y)$ 称为保序 Fuzzy 划分聚类的准则函数(criterion function of order-preserving fuzzy partition clustering).

定义 4.4.5　对于给定的样本集 X, 若有中心集 Y^* 和关于 X 与 Y 的保序 Fuzzy 划分 D^*, 使得对于一切关于 X 的中心集 Y 和关于 X 与 Y 的保序 Fuzzy 划分 D, 都有

$$J(D^*,Y^*)\leqslant J(D,Y) \tag{4.4.4}$$

称 D^* 为关于 X 的最优保序 Fuzzy 划分(optimal order-preserving fuzzy partition),称 Y^* 为关于 X 的保序 Fuzzy 聚类中心(order-preserving fuzzy clustering centre).

为了找到最优保序 Fuzzy 划分和保序 Fuzzy 聚类中心的算法,现证明如下定理.

定理 4.4.1　给定样本集 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}\subset\mathbf{R}$ 以及 $p>1$. 取定 $Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_c\}$ 是 X 的中心集. 则对此确定的 Y, 使

$$G(D)=J(D,Y)=\sum_{i=1}^{c}\sum_{k\in J_i\cup J_{i+1}}(d_{ik})^p(y_i-x_k)^2 \tag{4.4.5}$$

取最小值的 $D=(d_{ik})_{c\times n}$ 由以下方式确定:

(1)若 $x_k < y_1$，则取 $d_{1k}=1, d_{ik}=0\ (i=2,\cdots,c)$，

若 $x_k > y_c$，则取 $d_{ck}=1, d_{ik}=0\ (i=1,2,\cdots,c-1)$.

(2)若有 l 使 $x_k = y_l$，则令

$$d_{ik}=\begin{cases}1, & i=l\\ 0, & i\neq l\end{cases}$$

(3) 若有 l 使 $y_{l-1} < x_k < y_l$，则取

$$d_{ik}=\begin{cases}\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{y_{l-1}-x_k}{y_l-x_k}\right)^{\frac{1}{p-1}}}, & i=l-1\\ \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{y_l-x_k}{y_{l-1}-x_k}\right)^{\frac{1}{p-1}}}, & i=l\\ 0, & \text{其他}\end{cases} \tag{4.4.6}$$

且由以上方式确定的 $D=(d_{ik})_{c\times n}$ 满足条件：$\forall i\in\{2,3,\cdots,c\}$，若 $y_{i-1} < x_k \leqslant y_i$，即 $k\in J_i$，则

(1) $d_{i-1,k} < d_{ik} \Leftrightarrow (y_{i-1}-x_k)^2 > (y_i-x_k)^2$；

(2) $d_{i-1,k} = d_{ik} = 0.5 \Leftrightarrow (y_{i-1}-x_k)^2 = (y_i-x_k)^2$.

证明 使用证明定理 4.3.2 的方法，即可得当 Y 被确定时定理中所列 $D=(d_{ik})_{c\times n}$ 的计算方法. 现任取 $k\in J_i (i=2,3,\cdots,c)$ 由式(4.4.6)可得

$$d_{ik}-d_{i-1,k}=\frac{(y_{i-1}-x_k)^{\frac{2}{p-1}}-(y_i-x_k)^{\frac{2}{p-1}}}{(y_{i-1}-x_k)^{\frac{2}{p-1}}+(y_i-x_k)^{\frac{2}{p-1}}}$$

由此得 $d_{ik}-d_{i-1,k}>0$ 当且仅当 $(y_{i-1}-x_k)^2-(y_i-x_k)^2>0$；$d_{ik}=d_{i-1,k}=0.5$ 当且仅当

$$(y_{i-1}-x_k)^2=(y_i-x_k)^2.$$

□

定理 4.4.2 给定样本集 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}\subset \mathbf{R}$ 及 $p>1$. 设 $D=(d_{ik})_{c\times n}$ 是由关于 X 的某个中心集 Y 依定理 4.4.1 中计算方式所得的结果. 则固定这个 D，使

$$H(Y)=J(D,Y)=\sum_{i=1}^{c}\sum_{k\in J_i\cup J_{i+1}}^{n}(d_{ik})^p(y_i-x_k)^2 \tag{4.4.7}$$

取最小值的 $Y^*=\{y_1^*,y_2^*,\cdots,y_p^*\}$ 由下式确定

$$y_i^*=\frac{\sum\limits_{k\in J_i\cup J_{i+1}}(d_{ik})^p x_k}{\sum\limits_{k\in J_i\cup J_{i+1}}(d_{ik})^p},\quad i=1,2,\cdots,c \tag{4.4.8}$$

证明　使用证明定理 4.3.1 的方法即可得式(4.4.8)成立. 下证 Y^* 是关于 X 的中心集. 首先注意到 Y 是关于 X 的中心集,则任取 i, 当 $1 \leqslant i \leqslant c$ 时, $J_i \neq \varnothing$.

(1)设 $J_{c+1} \neq \varnothing$, 则任取 $i \geqslant 2$, 总有 $J_{i-1} \neq \varnothing$, $J_i \neq \varnothing$, $J_{i+1} \neq \varnothing$. 记 $t = j_{i-1} + 1$, 则 $J_i = \{t, t+1, \cdots, j_i\}$, 由定理 4.4.1 知

$$d_{i-1,t} \geqslant d_{i-1,t+1} \geqslant \cdots \geqslant d_{i-1,j_i};\ d_{i,t} \leqslant d_{i,t+1} \leqslant \cdots \leqslant d_{i,j_i}$$

又因 $x_t \leqslant x_{t+1} \leqslant \cdots \leqslant x_{j_i}$, 故

$$a_1 = \frac{1}{\sum\limits_{k \in J_i} (d_{i-1,k})^p} \sum_{k \in J_i} (d_{i-1,k})^p x_k \leqslant \frac{1}{\sum\limits_{l \in J_i} (d_{il})^p} \sum_{l \in J_i} (d_{il})^p x_l = b_1 \tag{4.4.9}$$

当且仅当 $x_t = x_{t+1} = \cdots = x_{j_i}$ 时才有等式成立. 再注意到 $y_{i-1} < y_i$, 故对于任意 $k \in J_{i-1}$ 和 $l \in J_{i+1}$ 总有

$$x_k \leqslant y_{i-1} < y_i < x_l$$

因此

$$a_2 = \frac{1}{\sum\limits_{k \in J_{i-1}} (d_{i-1,k})^p} \sum_{k \in J_{i-1}} (d_{i-1,k})^p x_k < \frac{1}{\sum\limits_{l \in J_{i+1}} (d_{il})^p} \sum_{l \in J_{i+1}} (d_{il})^p x_l = b_2$$

由此得

$$y_{i-1}^* = \frac{1}{\sum\limits_{k \in J_{i-1} \cup J_i} (d_{i-1,k})^p} \left(a_2 \sum_{k \in J_{i-1}} (d_{i-1,k})^p + a_1 \sum_{k \in J_i} (d_{i-1,k})^p\right)$$

$$< \frac{1}{\sum\limits_{l \in J_i \cup J_{i+1}} (d_{il})^p} \left(b_1 \sum_{l \in J_i} (d_{il})^p + b_2 \sum_{l \in J_{i+1}} (d_{il})^p\right) = y_i^*.$$

(2)再设 $J_{c+1} = \varnothing$, 则 $y_c = x_n$. 因为对于任意 $k \in J_{c-1}$ 和 $l \in J_c$, 都有 $x_k \leqslant y_{c-1} < x_l$, 参考式(4.4.8)也可得

$$y_{c-1}^* = \frac{\sum\limits_{k \in J_{c-1} \cup J_c} (d_{c-1,k})^p x_k}{\sum\limits_{k \in J_{c-1} \cup J_c} (d_{c-1,k})^p} < \frac{\sum\limits_{l \in J_c} (d_{cl})^p x_l}{\sum\limits_{l \in J_c} (d_{cl})^p} = y_c^*$$

综合以上讨论得 $Y^* = \{y_1^*, y_2^*, \cdots, y_c^*\}$, 且 $y_1^* < y_2^* < \cdots < y_c^*$. 记 $y_0^* = -\infty$, $y_{c+1}^* = +\infty$

$$J_i^* = \{k \mid y_{i-1}^* < x_k \leqslant y_i^*\}, \quad i = 1, 2, \cdots, c+1 \tag{4.4.10}$$

注意到 $J_{c+1} = \varnothing$, $y_c = x_n$, 故

$$y_c^* = \frac{\sum_{l \in J_c} (d_{cl})^p x_l}{\sum_{l \in J_c} (d_{cl})^p} \leqslant x_n$$

即或 $J_{c+1}^* \neq \varnothing$（上式“<”成立时），或 $J_{c+1}^* = \varnothing$，但 $y_c^* = x_n$（上式“=”成立时）.

现在考虑 $J_i \neq \varnothing\ (i=1,2,\cdots,c+1)$. 先设在式(4.4.8)中成立 $a_1 = b_1$，从而 $x_t = x_{t+1} = \cdots = x_{j_i}$，又由式(4.4.8)和式(4.4.9)立即可以推导出 $a_2 < y_{i-1}^* < a_1 = b_1 < y_i^* < b_2$，由式(4.4.10)即知 $t,t+1,\cdots,j_i \in J_i^* \neq \varnothing$. 再假设在式(4.4.8)中成立 $a_1 < b_1$，因为 b_1 是 $x_t, x_{t+1},\cdots,x_{j_i}$ 的加权平均值，故必有 $t \in J_i$ 使 $x_t \geqslant b_1$. 现设

$$x_s = \min\{x_t \mid x_t \geqslant b_1, t \in J_i\}$$

若 $J_i^* = \varnothing$，则必有 $y_i^* < x_s$，记 $\delta = \frac{x_s - y_i^*}{2} > 0$，$y^0 = \{y_1^0, y_2^0, \cdots, y_c^0\}$，且

$$y_l^0 = \begin{cases} y_i^* + \delta, & l = i \\ y_l^*, & l \neq i \end{cases}$$

则对于任意 $x_k \in J_{i+1}^*$，$(y_i^0 - x_k)^2 < (y_i^* - x_k)^2$，从而

$$H(Y^*) - H(Y^0) = \sum_{i=1}^{c} \left(\sum_{k \in J_{i+1}^*} (d_{ik})^p (y_i^* - x_k)^2 - \sum_{k \in J_{i+1}^*} (d_{ik})^p (y_i^0 - x_k)^2 \right) > 0$$

这与前面证明了的 Y^* 使 $H(Y)$ 取得最小值矛盾. 故 $J_i^* \neq \varnothing$，综上所述知 Y^* 是关于 X 的中心集. □

现由定理 4.4.1 和定理 4.4.2 给出 **R** 中保序 Fuzzy 聚类的具体算法如下：

(1) 对于给定的样本集 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \subset \mathbf{R}$，$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n$，并设 X 中共有 r 个元素互不相同. 确定正整数 $1 < c < r$ 和 $p > 1$ 及某个 $\varepsilon > 0$（允许误差）.

(2) 任意置定保序 Fuzzy 划分矩阵 $D^{(0)} = (d_{ik}^{(0)})_{c \times n}$.

(3) 依次取 $l = 0, 1, 2, \cdots$.

(4) 根据 $D^{(l)}$，计算 $y_i^{(l)}$

$$y_i^{(l)} = \frac{\sum_{k \in J_i \cup J_{i+1}} (d_{ik}^{(l)})^p x_k}{\sum_{k \in J_i \cup J_{i+1}} (d_{ik}^{(l)})^p},\ i = 1, 2, \cdots, c \tag{4.4.11}$$

令 $J_i^{(l-1)} = \{k \mid y_{i-1}^{(l-1)} < x_k \leqslant y_i^{(l-1)}\}\ (i = 1, 2, \cdots, c+1)$.

(5)按如下方法更新 $D^{(l)}$ 为 $D^{(l+1)}$.

对 $k = 1, 2, \cdots, n$

① 若 $k \in J_1^{(l)}$，令 $d_{1k}^{(l+1)}=1, d_{ik}^{(l+1)}=0(i=2,\cdots,c)$，

若 $k \in J_{c+1}^{(l)}$，令 $d_{ck}^{(l+1)}=1, d_{ik}^{(l+1)}=0(i=1,2,\cdots,c-1)$.

② $\exists t$，使 $x_k=y_t^{(l)}$，令

$$d_{ik}^{(l+1)}=\begin{cases}1, & i=t\\0, & i\neq t\end{cases}$$

③ $k \in J_i^{(l)}(i=2,\cdots,c)$ 且 $x_k \neq y_i^{(l)}$，令

$$d_{i-1,k}^{(l+1)}=\frac{1}{1+\left(\dfrac{y_{i-1}^{(l)}-x_k}{y_i^{(l)}-x_k}\right)^{\frac{2}{p-1}}},\quad d_{i,k}^{(l+1)}=\frac{1}{1+\left(\dfrac{y_i^{(l)}-x_k}{y_{i-1}^{(l)}-x_k}\right)^{\frac{2}{p-1}}}$$

$$d_{ik}^{(l+1)}=0, l\neq i-1, l\neq i$$

(6)计算出 $J(D^{(l)},Y^{(l)})$ 和 $J(D^{(l+1)},Y^{(l+1)})$. 由定理 4.3.1 和定理 4.3.2 易得

$$0\leqslant J(D^{(l+1)},Y^{(l+1)})\leqslant J(D^{(l)},Y^{(l)}) \tag{4.4.12}$$

故 $\lim\limits_{l\to+\infty} J(D^{(l)},Y^{(l)})$ 存在. 因此若

$$J(D^{(l)},Y^{(l)})-J(D^{(l+1)},Y^{(l+1)})<\varepsilon \tag{4.4.13}$$

则停止，以 $D^{(l+1)}$ 和 $Y^{(l+1)}$ 作为最优保序 Fuzzy 划分和保序聚类中心，否则置 $l=l+1$，并返回(4).

例 4.4.2　设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_7\}\subset \mathbf{R}$，各自的坐标分别是 $x_1=1$，$x_2=2$，$x_3=3$，$x_4=4$，$x_5=5$，$x_6=6$，$x_7=7$. 给定 $c=2$，$\varepsilon=0.001$，为了保序地将 X 分为 2 类，分别选定 $p=2$，$p=\frac{3}{2}$ 和 $p=3$，计算结果列于表 4.4.1 中.

表 4.4.1

p	l	D	Y
2	5	$\begin{bmatrix}1 & 1 & 0.911 & 0.493 & 0.083 & 0 & 0\\0 & 0 & 0.089 & 0.507 & 0.917 & 1 & 1\end{bmatrix}$	2.109 5.878
3/2	7	$\begin{bmatrix}1 & 1 & 0.993 & 0.482 & 0.006 & 0 & 0\\0 & 0 & 0.007 & 0.518 & 0.994 & 1 & 1\end{bmatrix}$	2.198 5.780
3	5	$\begin{bmatrix}1 & 0.970 & 0.734 & 0.498 & 0.262 & 0.027 & 0\\0 & 0.030 & 0.266 & 0.502 & 0.738 & 0.973 & 1\end{bmatrix}$	1.876 6.117

§4.5　基于 Fuzzy 预序关系的 Fuzzy 聚类分析

在实际应用中，有些 Fuzzy 关系 R 只满足自反性和传递性，即 R 为 Fuzzy

预序关系. 下面将讨论基于Fuzzy预序关系的聚类问题. 为此,首先讨论普通预序关系.

X 的一个关系 R 称为预序关系,如果满足:

(1)自反性 xRx;

(2)传递性 $xRy, yRz \Rightarrow xRz$.

设 R 是 X 的预序关系,在 X 中规定关系 $\sim$

$$x \sim y \Leftrightarrow xRy \text{ 且 } yRx$$

称$\sim$为由 R 诱导的等价关系.

在商集 $X/\sim = \{[x] \mid x \in X\}$ 中规定关系 $\rightarrow$

$$[x] \rightarrow [y] \Leftrightarrow xRy$$

不难验证 $(X/\sim, \rightarrow)$ 是偏序集,因此预序关系 R 也可以将 X 分类(按其诱导的等价关系$\sim$分类). 同时还给出类之间的一个偏序关系 $\rightarrow$. 很容易得到 $\rightarrow$ 的性质.

定理 4.5.1 设 $X=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, $R=(r_{ij})_{n\times n}$ 是 X 的一个预序关系,则

(1) $x_iRx_j \Leftrightarrow r_{ik} \geqslant r_{jk}, \forall k \in \{1,2,\cdots,n\}$;

(2) $x_i \sim x_j \Leftrightarrow r_{ik} = r_{jk}, \forall k \in \{1,2,\cdots,n\}$;

(3) $x_iR^cx_j$ 且 $x_jR^cx_i \Leftrightarrow \exists k, r_{ik} < r_{jk}$ 且 $\exists l, r_{jl} < r_{il}$.

证明 (1)设 x_iRx_j, 则 $\forall k, r_{jk}=1 \Rightarrow x_jRx_k \Rightarrow x_iRx_k \Rightarrow r_{ik}=1$. 反之

$$\forall k, (r_{ik} \geqslant r_{jk}) \Rightarrow r_{ij} \geqslant r_{jj} = 1 \Rightarrow x_iRx_j.$$

(2)、(3)可以由(1)直接推出. □

例 4.5.1 设 $X=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, 且

$$R=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

则易知 $r_{ii}=1$, $R\circ R=R$, 即 R 是预序关系.

$$\{x_1, x_2\} \longleftarrow \{x_3\} \longrightarrow \{x_4, x_5\}$$

$$\overrightarrow{\qquad\qquad\qquad}$$

□

定义 3.8.1 给出了Fuzzy预序关系的概念. 由定理 3.7.1 知 R 是Fuzzy预序关系当且仅当 $\forall \alpha \in [0,1]$, R_α 是预序关系. 从而Fuzzy预序关系可以通过预序关系 R_α, 不同的 α, 得到 X 的不同类.

例 4.5.2 设 $X=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$, 且

$$R=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 0.6 & 0.8 & 0.8 & 0.8\\ 1 & 1 & 1 & 0.6 & 0.8 & 0.8 & 0.8\\ 1 & 1 & 1 & 0.6 & 0.8 & 0.8 & 0.8\\ 0.8 & 0.8 & 0.8 & 1 & 1 & 0.8 & 0.8\\ 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.6 & 1 & 0.7 & 0.7\\ 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.6 & 1 & 1 & 1\\ 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.6 & 0.8 & 0.8 & 1\end{bmatrix}$$

则易知 $r_{ii}=1$，$R\circ R=R$，即 R 是 Fuzzy 预序关系.

$$R_1=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

当 $0.8<\alpha\leqslant 1$ 时，X 的分类有类的偏序关系为

$$\{x_1,x_2,x_3\}\leftarrow\{x_4\}\rightarrow\{x_5\}\leftarrow\{x_6\}\rightarrow\{x_7\}$$

$$R_{0.8}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

当 $0.7<\alpha\leqslant 0.8$ 时，X 的分类有类的偏序关系为

$$\longrightarrow$$

$$\{x_1,x_2,x_3\}\leftarrow\{x_4\}\rightarrow\{x_6,x_7\}\rightarrow\{x_5\}$$

$$R_{0.7}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

当 $0.6 < \alpha \leqslant 0.7$ 时，X 的分类有类的偏序关系为

$$\{x_1, x_2, x_3, x_5, x_6, x_7\} \leftarrow \{x_4\}$$

$$R_{0.6} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

当 $\alpha \leqslant 0.6$ 时，X 的分类有类的偏序关系为

$$\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\} = X$$

其关系如图 4.5.1 所示.

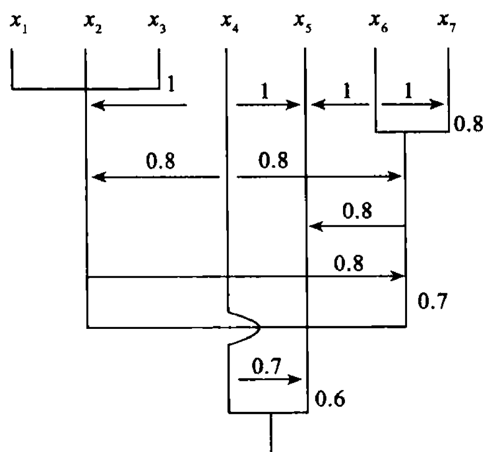


图 4.5.1

例 4.5.3 设 $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$，且

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0.8 & 1.0 & 0.6 & 0.5 & 0.4 & 0.3 \\ 1 & 1 & 0.8 & 0.6 & 0.4 & 0.8 & 0.5 \\ 0.8 & 1 & 1 & 0.6 & 0.7 & 0.8 & 0.4 \\ 0.6 & 0.3 & 0.8 & 1 & 1 & 0.5 & 0.3 \\ 0.5 & 0.2 & 0.5 & 0.5 & 1 & 0.7 & 0.6 \\ 0.5 & 0.5 & 0.7 & 0.3 & 1 & 1 & 1 \\ 0.3 & 0.6 & 0.4 & 0.5 & 0.5 & 0.8 & 1 \end{bmatrix}$$

则易知 $r_{ii}=1$，即 R 是自反关系. 但

$$R\circ R=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 0.6 & 0.7 & 0.8 & 0.5\\ 1 & 1 & 1 & 0.6 & 0.8 & 0.8 & 0.8\\ 1 & 1 & 1 & 0.6 & 0.8 & 0.8 & 0.8\\ 0.8 & 0.8 & 0.8 & 1 & 1 & 0.8 & 0.6\\ 0.5 & 0.6 & 0.7 & 0.5 & 1 & 0.7 & 0.7\\ 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.6 & 1 & 1 & 1\\ 0.6 & 0.6 & 0.7 & 0.6 & 0.8 & 0.8 & 1\end{bmatrix}\supset R$$

$$R^4=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 0.6 & 0.8 & 0.8 & 0.8\\ 1 & 1 & 1 & 0.6 & 0.8 & 0.8 & 0.8\\ 1 & 1 & 1 & 0.6 & 0.8 & 0.8 & 0.8\\ 0.8 & 0.8 & 0.8 & 1 & 1 & 0.8 & 0.8\\ 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.6 & 1 & 0.7 & 0.7\\ 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.6 & 1 & 1 & 1\\ 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.6 & 0.8 & 0.8 & 1\end{bmatrix}=R^8.$$

R^4 是 Fuzzy 预序，例 4.5.2 给出了 R^4 的分类结果. □

基于模糊关系人们提出了多种聚类方法，如本章所介绍的基于相似性关系和模糊关系的方法(Tamura, Higuchi, etc. 1971)，基于模糊等价关系的传递闭包方法(Zkim, 1996)和基于模糊图论最大树方法(Wu, Leathy, 1993)等. 然而上述方法不适用于大数据量情况，难以满足实时性要求高的场合，因此其实际的应用不够广泛. 实际中受到普遍欢迎的是基于目标函数的方法，该方法设计简单、解决问题的范围广，最终还可以转化为优化问题而借助经典数学的非线性规划理论求解，并易于计算机实现. 由 Dunn(1974)定义并由 Bezdek 推广的 Fuzzy c 均值聚类算法 FCM(即本章介绍的基于 Fuzzy 划分的 Fuzzy 聚类分析)在理论与应用上为这种 Fuzzy 聚类分析方法奠定了基础. 随着计算机技术的应用和发展，这类方法成为聚类研究的热点(Hathaway, Bezdek, Hu, 2000; Hoppner, 1997; Kamel, Selim, 1991; Li, H., 1989; Li, Mukaidino, 1995; Pedrycz, Loia, Senatore, 2004; Wang, Hu, et al., 2009.). 关于 Fuzzy 聚类方法的系统成果可以参阅综述性的文献(Anderberg, 1973; Dubes, Jain, 1988; Ryzin, 1977; Yang, 1993; 何清, 1998)和专著(Hoppner, Klawonn, et al., 1999; Miyamoto, Ichihashi, Honda, 2008; 李相镐等, 1994).

第5章 Fuzzy模式识别

在日常生活中，人们常常通过感官来识别图形、文字、语言等；在气象科学领域，可以通过卫星和气象资料的分析处理，对未来天气属于何种类型作出预报；在工程勘察领域，可以通过地质资料分析，对矿藏资源情况作出判断；在环境工程领域，可以根据各级环境标准浓度，对环境的污染程度进行评判；在医学领域，可以通过对病人的病情分析，对病人所患疾病作出诊断；在刑侦工作中对指纹图像的鉴别；在军事上对雷达目标的识别，等等. 这些工作有一个共同的特点，就是已知各种类型来识别给定对象属于哪一个类型的问题，这就是模式识别问题，模式识别问题广泛地出现在工程科技领域中. 由于客观事物本身的模糊性，例如雷达目标识别时，目标环境由于杂波干扰的存在以及其他因素的影响受到严重污染，目标信息转换过程中特征信息的随机交叠等，加上人们对客观事物的反映过程也产生模糊性，使得经典的识别方法越来越不适应客观实际的要求. Fuzzy模式识别正是为了满足这一要求而产生与发展起来的. Fuzzy模式识别大致有两种方法：一种是直接方法，按“最大隶属原则”归类，主要应用于个体的识别；另一种是间接方法，按“择近原则”归类，一般应用于群体模型的识别. 本章分别从单特征模式识别和多特征模式识别的基本原则出发，通过实例介绍几何图形识别、文字与图像等识别的方格矩阵法与Fuzzy方位转换技术以及与聚类分析相结合的Fuzzy模式识别.

§5.1 单特征模式的识别

模式识别的典型问题就是从物理过程中收集数据并将数据分类到已知的模式中，这种已知模式通常都是用类结构表示的，每一种类结构由若干特征来描述. 为了表示的简便，下面提出的类或模式均用一个特征来描述，因此，这种表示是一维的.

5.1.1 个体的识别

最大隶属原则1 设$A_1, A_2, \cdots, A_n \in \mathscr{F}(X)$. 取定对象$x_0 \in X$，如果存在

指标 $i \in \{1,2,\cdots,n\}$，使得

$$A_i(x_0)=\max\{A_1(x_0),A_2(x_0),\cdots,A_n(x_0)\} \tag{5.1.1}$$

则认为 x_0 相对隶属于 A_i.

最大隶属原则 2　（阈值原则）设 $A_1,A_2,\cdots,A_n \in \mathscr{F}(X)$. 取定对象 $x_0 \in X$，规定一个阈值（水平）$\lambda \in (0,1]$，记

$$a=\max\{A_1(x_0),A_2(x_0),\cdots,A_n(x_0)\} \tag{5.1.2}$$

若 $a<\lambda$，则作“拒识”的判决，应查找原因另作分析. 若 $a \geqslant \lambda$，则认为识别可行，按最大隶属原则 1 判决.

最大隶属原则 2 可以避免因隶属度都很小而由最大隶属原则 1 做出偏离实际较远的判决.

例 5.1.1　考虑人的年龄问题，分为年轻、中年、老年三类，分别对应于 Fuzzy 集 A_1,A_2,A_3. 设论域 $X=(0,100]$（单位：岁），而且

$$A_1(x)=\begin{cases}1, & 0<x\leqslant 20\\ 1-2\left(\dfrac{x-20}{20}\right)^2, & 20<x\leqslant 30\\ 2\left(\dfrac{x-40}{20}\right)^2, & 30<x\leqslant 40\\ 0, & 40<x\leqslant 100\end{cases}$$

$$A_3(x)=\begin{cases}0, & 0<x\leqslant 50\\ 2\left(\dfrac{x-50}{20}\right)^2, & 50<x\leqslant 60\\ 1-2\left(\dfrac{x-70}{20}\right)^2, & 60<x\leqslant 70\\ 1, & 70<x\leqslant 100\end{cases}$$

而

$$A_2(x)=1-A_1(x)-A_3(x)=\begin{cases}0, & 0<x\leqslant 20\\ 2\left(\dfrac{x-20}{20}\right)^2, & 20<x\leqslant 30\\ 1-2\left(\dfrac{x-40}{20}\right)^2, & 30<x\leqslant 40\\ 1, & 40<x\leqslant 50\\ 1-2\left(\dfrac{x-50}{20}\right)^2, & 50<x\leqslant 60\\ 2\left(\dfrac{x-70}{20}\right)^2, & 60<x\leqslant 70\\ 0 & 70<x\leqslant 100\end{cases}$$

其曲线如图 5.1.1 所示.

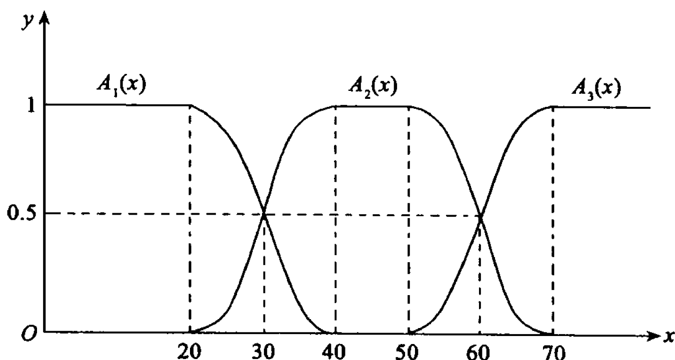


图 5.1.1 年轻、中年与老年的隶属函数曲线

设 $x_0=40$，则由于 $A_1(40)=0$，$A_2(40)=1$，$A_3(40)=0$，故

$$A_2(40)=\max\{A_1(40),A_2(40),A_3(40)\}=\max\{0,1,0\}=1$$

按最大隶属原则，40 岁应为“中年”. 若又取 $x_0=30$，则 $A_1(30)=A_2(30)=0.5$，而 $A_3(30)=0$，故同样由最大隶属原则，30 岁既可以视为“中年”，也可以视为“年轻”. □

例 5.1.2 许多模式识别，常常归结为对一些简单的几何图形的识别(Lee, 1972). 例如，机器自动识别染色体，就是应用几何图形识别. 三角形是几何图形中最基本的，所以首先考虑三角形的识别问题. 三角形的主要特征是三个内角，故取

$$X=\{x\mid x=(\alpha,\beta,\gamma)\mid \alpha+\beta+\gamma=180,\ 180>\alpha\geqslant\beta\geqslant\gamma>0\}$$

其中 α,β,γ 为三角形的三个内角. 下面给出各种“近似三角形”的隶属函数.

(1) $R=$“近似直角三角形”. 令 $t=|\alpha-90|$，因为 $x=(\alpha,\beta,\gamma)\in X$ 是直角三角形的充要条件是 $\alpha=90$，即 $t=0$；而 t 的上确界是 90，故令

$$R(x)=\begin{cases}1-\left(\dfrac{t}{90}\right)^{\frac{1}{t}}, & t=|\alpha-90|\neq 0\\ 1, & t=|\alpha-90|=0\end{cases},\ \forall x=(\alpha,\beta,\gamma)\in X$$

(2) $I=$“近似等腰三角形”. 令 $t=\min\{\alpha-\beta,\beta-\gamma\}$，因为 $x=(\alpha,\beta,\gamma)\in X$ 是等腰三角形的充要条件是 $\alpha=\beta$ 或 $\beta=\gamma$，即 $t=0$；而 t 的上确界是 60，故令

$$I(x)=\begin{cases}1-\left(\dfrac{t}{60}\right)^{\frac{1}{t}}, & t=\min\{\alpha-\beta,\beta-\gamma\}\neq 0\\ 1, & t=\min\{\alpha-\beta,\beta-\gamma\}=0\end{cases},\ \forall x=(\alpha,\beta,\gamma)\in X$$

(3) IR ="近似等腰直角三角形"$= I \cap R$.

$$IR(x) = I(x) \wedge R(x), \ \forall x = (\alpha,\beta,\gamma) \in X$$

(4) E ="近似等边三角形". 令 $t = \alpha - \gamma$, 因为 $x = (\alpha,\beta,\gamma) \in X$ 是等边三角形的充要条件是 $\alpha = \gamma$, 即 $t = 0$; 而 t 的上确界是 180,故令

$$E(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{t}{180}\right)^{\frac{1}{t}}, & t = \alpha - \gamma \neq 0 \\ 1, & t = \alpha - \gamma = 0 \end{cases}, \ \forall x = (\alpha,\beta,\gamma) \in X$$

(5) T ="非典型三角形"$= (I \cup R \cup E)^c = I^c \cap R^c \cap E^c$

注意到若 $a > t > 0$, 则 $\lim\limits_{t \to 0^+} \left(\frac{t}{a}\right)^{\frac{1}{t}} = 0$, 上面定义的 R, I, E, IR, T 都是连续的. 又当 $a > t > 0$ 时

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\left(\frac{t}{a}\right)^{\frac{1}{t}}\right] = \left(\frac{t}{a}\right)^{\frac{1}{t}} \frac{1}{t^2}\left(1 - \ln \frac{t}{a}\right) > 0$$

即 $\left(\frac{t}{a}\right)^{\frac{1}{t}}$ 关于 t 是严格单增的,从而 R, I, E 都随 t 的增大而减小. 这些都是合理的.

现在给定阈值 $\lambda = 0.95$ 和 $x_1 = (61,60,59)$, $x_2 = (60.7,60,59.3)$, $x_3 = (89,46,45)$, $x_4 = (85,50,45)$. 则

$$R(x_1) = 0.038, I(x_1) = 0.983, E(x_1) = 0.895,$$
$$IR(x_1) = 0.038, T(x_1) = 0.017$$
$$R(x_2) = 0.038, I(x_2) = 0.998, E(x_2) = 0.969,$$
$$IR(x_2) = 0.038, T(x_2) = 0.002$$
$$R(x_3) = 0.989, I(x_3) = 0.983, E(x_3) = 0.032,$$
$$IR(x_3) = 0.983, T(x_3) = 0.017$$
$$R(x_4) = 0.439, I(x_4) = 0.392, E(x_4) = 0.284,$$
$$IR(x_4) = 0.392, T(x_4) = 0.561$$

由给定的阈值 $\lambda = 0.95$ 和最大隶属原则 2 可知: x_1 近似于等腰三角形,但不是等边的,因为 $E(x_1) = 0.895 < 0.95$; x_2 近似于等边三角形,自然也是等腰的; 因为 $IR(x_3) = I(x_3) \wedge R(x_3) = 0.983 > 0.95$, 故 x_3 近似于等腰直角三角形; 因为

$$\max\{R(x_4), I(x_4), E(x_4)\} = 0.439 < 0.95$$

说明 x_4 不是直角三角形、等腰三角形、等边三角形中任何一种. 当然按阈值 $\lambda = 0.95$, x_4 也不是非典型三角形. 例 5.1.2 也说明在进行识别中,阈值的设定是

不可或缺的. 若不然,由 $\max\{R(x_4),I(x_4),E(x_4)\}=R(x_4)=0.439$,按最大隶属原则 1(不设阈值),则仅以此判断 x_4 是直角三角形,这是欠妥的,因为 x_4 属于直角三角形的程度还不到 0.5. □

值得注意的是,在使用最大隶属原则进行 Fuzzy 模式识别时,首先应合理地刻画模型才能使识别的结果具有实际意义. 以上面的三角形识别为例,如果将 R,I,E 的隶属函数分别设为

$$R(x)=1-\frac{1}{90}|\alpha-90|,\ I(x)=1-\frac{1}{60}\min\{\alpha-\beta,\beta-\gamma\}$$

$$E(x)=1-\frac{1}{180}(\alpha-\gamma),\ \forall x=(\alpha,\beta,\gamma)\in X$$

则对于给定的 $x_4=(85,50,45)$ 应有

$$R(x_4)=0.994,\quad I(x_4)=0.917,\quad E(x_4)=0.778$$

这说明最大角只有 85°的三角形可以 0.994 的程度属于直角三角形;两底角分别为 50°和 45°的三角形,以 0.917 的程度属于等腰三角形;甚至最大内角与最小内角之差达 40°的三角形还以 0.778 的程度属于等边三角形. 这是很难使人信服的.

例 5.1.3 利用同样的方法可以识别四边形,值得注意的是,四边形不仅与内角有关,而且也与各边长的比例密不可分,所以此时取

$$X=\{x\,|\,x=(\alpha,\beta,\gamma,\theta;a,b,c,d)\,|\,\alpha+\beta+\gamma+\theta=360,\ \alpha,\beta,\gamma,\theta,a,b,c,d>0\}$$

下面用定义"近似三角形"的方法给出"近似四边形"的隶属函数如下:

(1) $P=$"近似平行四边形", $\forall x=(\alpha,\beta,\gamma,\theta;a,b,c,d)\in X$

$$P(x)=\begin{cases}1-\left(\dfrac{t}{180}\right)^{\frac{1}{t}}, & t=\max\{|\alpha-\gamma|,|\beta-\theta|\}\neq 0\\ 1, & t=\max\{|\alpha-\gamma|,|\beta-\theta|\}=0\end{cases}$$

(2) $RE=$"近似矩形", $\forall x=(\alpha,\beta,\gamma,\theta;a,b,c,d)\in X$

$$RE(x)=\begin{cases}1-\left(\dfrac{t}{90}\right)^{\frac{1}{t}}, & t=|\alpha-90|+|\beta-90|+|\gamma-90|+|\theta-90|\neq 0\\ 1, & t=|\alpha-90|+|\beta-90|+|\gamma-90|+|\theta-90|=0\end{cases}$$

(3) $T=$"近似梯形", $\forall x=(\alpha,\beta,\gamma,\theta;a,b,c,d)\in X$

$$T(x)=\begin{cases}1-\left(\dfrac{t}{180}\right)^{\frac{1}{t}}, & t=\min\{|\alpha+\beta-180|,|\beta+\gamma-180|\}\neq 0\\ 1, & t=\min\{|\alpha+\beta-180|,|\beta+\gamma-180|\}=0\end{cases}$$

(4) $RH=$"近似菱形", $\forall x=(\alpha,\beta,\gamma,\theta;a,b,c,d)\in X$

$$RH(x)=\begin{cases}1-\left(\dfrac{t}{\max\{a,b,c,d\}}\right)^{\frac{1}{t}}, & \max\{|a-b|,|b-c|,|c-d|,|d-a|\}\neq 0\\ 1, & \max\{|a-b|,|b-c|,|c-d|,|d-a|\}=0\end{cases}$$

(5)"近似正方形"$=RE\cap RH$. □

例 5.1.4 通货膨胀识别.

设论域 $X=[0,+\infty)$，对 $x\in X$，x 表示物价上涨 $x\%$，通货膨胀状态分为 5 个类型：通货稳定，轻度通货膨胀，中度通货膨胀，重度通货膨胀和恶性通货膨胀，这 5 个类型依次用 X 上的 Fuzzy 集 A_1,A_2,A_3,A_4,A_5 表示，根据统计资料分别取其隶属函数为

$$A_1(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 5\\ e^{-(x-5)^2/3^2}, & x>5\end{cases}$$

$$A_2(x)=e^{-(x-10)^2/5^2}$$

$$A_3(x)=e^{-(x-20)^2/7^2}$$

$$A_4(x)=e^{-(x-30)^2/9^2}$$

$$A_5(x)=\begin{cases}e^{-(x-50)^2/15^2}, & 0\leqslant x\leqslant 50\\ 1, & x>50\end{cases}$$

试问 $x_1=8$，$x_2=40$ 相对隶属于哪种类型？

$A_1(8)=0.3679$，$A_2(8)=0.8521$，$A_3(8)=0.0529$，$A_4(8)=0.003$，$A_5(8)=0$；

$A_1(40)=0$，$A_2(40)=0$，$A_3(40)=0.0003$，$A_4(40)=0.1299$，$A_5(40)=0.6412$.

由最大隶属原则 1，$x_1=8$ 应相对隶属于 A_2，即当物价上涨率为 8%时，应视为轻度通货膨胀；$x_2=40$ 相对隶属于 A_5，即应视为恶性通货膨胀. □

例 5.1.5 癌细胞的模式识别. 取论域

$$X=\{x\,|\,x=\{NA,NL,A,L,NI,MI,ME\}\}$$

式中：NA——核面积(拍照)；NL——核周长；A——细胞面积；L——细胞周长；NI——核内总光密度；MI——核内平均光密度；ME—核内平均透光率.

根据病理医生的实际经验，选出下列 6 种主要因素，它们都是 X 上的 Fuzzy 集.

$\underset{\sim}{A}$：核增大　　$\underset{\sim}{A}(x)=\left(1+\alpha_1\left(\dfrac{NA_0}{NA}\right)^2\right)^{-2}$，其中 NA_0 是正常核面积；

$\underset{\sim}{B}$：核增深　　$\underset{\sim}{B}(x)=\left(1+\dfrac{\alpha_2}{(NI)^2}\right)^{-2}$；

$\underset{\sim}{C}$：核浆比倒置 $\underset{\sim}{C}(x)=\left(1+\frac{\alpha_3}{(NA)^2}\right)^{-2}$；

$\underset{\sim}{D}$：染色体不均 $\underset{\sim}{D}(x)=\left(1+\frac{\alpha_4(ME)^2}{(ME+\lg MI)^2}\right)^{-2}$；

$\underset{\sim}{E}$：核畸变 $\underset{\sim}{E}(x)=\left[1+\frac{\alpha_5}{\left(\frac{(NL)^2}{NA}-4\pi\right)^2}\right]^{-2}$；

$\underset{\sim}{F}$：细胞畸变 $\underset{\sim}{F}(x)=\left[1+\frac{\alpha_2}{\left(\frac{L^2}{A}-\frac{L_0^2}{A_0}\right)^2}\right]^{-1}$，其中 A_0, L_0 是正常值.

以上 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_6$ 是可以调整的参数.

$\underset{\sim}{A}$，$\underset{\sim}{B}$，…，$\underset{\sim}{F}$ 这 6 个因素的 Fuzzy 集可以组成如下细胞识别中的几个标准模型：

$\underset{\sim}{M}$：癌 $\underset{\sim}{M}=(\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}\cap\underset{\sim}{C}\cap(\underset{\sim}{D}\cup\underset{\sim}{E}))\cup\underset{\sim}{F}$

$\underset{\sim}{N}$：重度核异质 $\underset{\sim}{N}=\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}\cap\underset{\sim}{C}\cap\underset{\sim}{M}^c$

$\underset{\sim}{R}$：轻度核异质 $\underset{\sim}{R}=\underset{\sim}{A}^{\frac{1}{2}}\cap\underset{\sim}{B}^{\frac{1}{2}}\cap\underset{\sim}{C}^{\frac{1}{2}}\cap\underset{\sim}{M}^c\cap\underset{\sim}{N}^c$

其中，$A^{\frac{1}{2}}$ 表示一个 Fuzzy 集，$A^{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{A(x)}$.

$\underset{\sim}{K}$：正常 $\underset{\sim}{K}=\underset{\sim}{M}^c\cap\underset{\sim}{N}^c\cap\underset{\sim}{R}^c$

给定一个具体细胞，按最大隶属原则 1，鉴别它应归属 $\underset{\sim}{M}$，$\underset{\sim}{N}$，$\underset{\sim}{R}$，$\underset{\sim}{R}$ 中哪一种. □

最大隶属原则 3 （择优原则）设 $A\in\mathscr{F}(X)$. 取定 n 个对象 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in X$，如果存在指标 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$，使得

$$A(x_i)=\max\{A(x_1),A(x_2),\cdots,A(x_n)\} \tag{5.1.3}$$

则认为 x_i 相对隶属于 A.

5.1.2 群体的识别

择近原则 1 设 $A_i,B\in\mathscr{F}(X)$ $(i=1,2,\cdots,n)$，N 为贴近度函数或格贴近度函数(参见 §1.4). 若存在 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$，使得

$$N(A_i,B)=\max\{N(A_1,B),N(A_2,B),\cdots,N(A_n,B)\} \tag{5.1.4}$$

则认为 B 与 A_i 最贴近，将 B 与 A_i 归为一类.

择近原则 2 （阈值原则）设 $A_i,B\in\mathscr{F}(X)$ $(i=1,2,\cdots,n)$，N 为贴近度函数或格贴近度函数. 规定一个阈值(水平) $\lambda\in(0,1]$，记

$$a=\max\{N(A_1,B),N(A_2,B),\cdots,N(A_n,B)\} \tag{5.1.5}$$

若 $a<\lambda$，则作“拒识”的判决，应查找原因另作分析. 若 $a\geqslant\lambda$，则认为识别可

行，按择近原则 1 判决.

例 5.1.6 设岩石按抗压强度可以分为很好、好、较好、差、很差 5 类，它们都服从半梯形分布与梯形分布. 每类对应的 Fuzzy 集分别为 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5，其隶属函数如下

$$A_1(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 1800\\ \dfrac{1}{400}(x-1800), & 1800<x\leqslant 2200\\ 1, & x>2200\end{cases}$$

$$A_2(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 900\\ \dfrac{1}{200}(x-900), & 900<x\leqslant 1100\\ 1, & 1100<x\leqslant 1800\\ -\dfrac{1}{400}(x-2200), & 1800<x\leqslant 2200\\ 0, & x>2200\end{cases}$$

$$A_3(x)=\begin{cases}0, & x<400\\ \dfrac{1}{200}(x-400), & 400\leqslant x\leqslant 600\\ 1, & 600<x\leqslant 900\\ -\dfrac{1}{200}(x-1100), & 900<x\leqslant 1100\\ 0, & x>1100\end{cases}$$

$$A_4=\begin{cases}0, & x<100\\ \dfrac{1}{200}x, & 0\leqslant x\leqslant 200\\ 1, & 200<x\leqslant 400\\ -\dfrac{1}{200}(x-600), & 400<x\leqslant 600\\ 0, & x>600\end{cases}$$

$$A_5(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 100\\ -\dfrac{1}{100}(x-200), & 100<x\leqslant 200\\ 0, & x>200\end{cases}$$

其曲线如图 5.1.2 所示.

今有某项岩体工程，经实地测量，用统计的方法获得了以抗压强度为论域的 Fuzzy 集 B，即

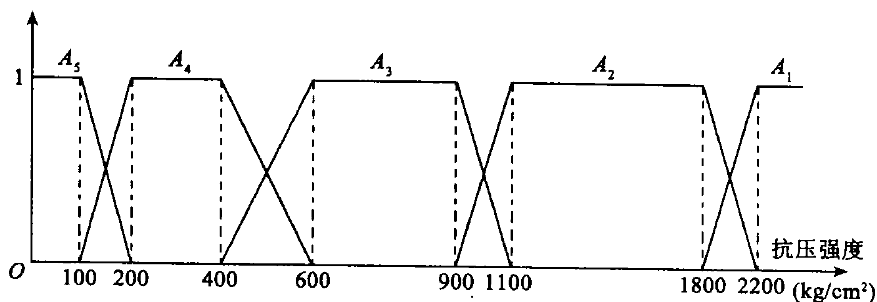


图 5.1.2　5 类岩石的隶属函数曲线

$$B(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 712\\ \frac{1}{88}(x-712), & 712<x\leqslant 800\\ 1, & 800<x\leqslant 1000\\ -\frac{1}{120}(x-1120), & 1000<x\leqslant 1120\\ 0, & x>1120\end{cases}$$

其曲线如图 5.1.3 所示.

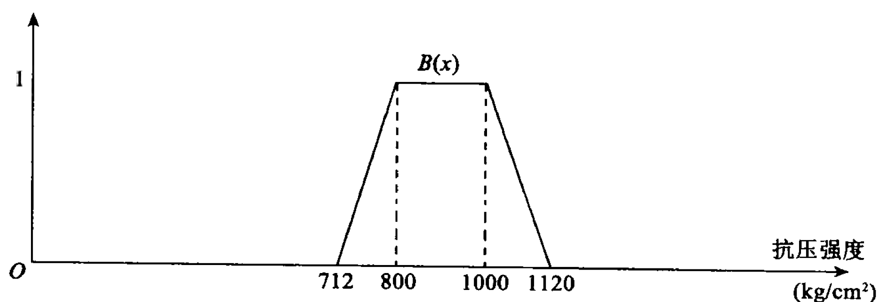


图 5.1.3　待识别岩石的隶属函数曲线

利用格贴近度 N_{Lm}（参见定义 1.4.11），显然

$N_{Lm}(A_1,B)=0$，　$N_{Lm}(A_3,B)=1$，　$N_{Lm}(A_4,B)=0$，　$N_{Lm}(A_5,B)=0$

而由

$$\frac{1}{200}(x-900)=-\frac{1}{120}(x-1120)$$

得 $x_0=1037.5$，计算 $A_2(x_0)=0.6875$，于是 $N_{Lm}(A_2,B)=0.6875$.

因此，按择近原则，该岩体应属“较好”的岩石. □

例 5.1.7 假若你是一名咨询工程师，要对大地震影响某一地区的地震损害进行评估. 你的损害评估对该地区居民来说是非常重要的，因为保险公司将根据你的评估对他们的索赔进行支付，你必须尽可能地公平. 根据以前的历史记录你确定了最适合于这一地区建筑物损坏程度的 6 种表示 Mercalli 强度的等级(从 VI～XI)，这些损坏模式都能用下列形式的高斯分布函数来表示：

$$A_i(x)=\exp\left(\frac{-(x-a_i)^2}{\sigma_i^2}\right),\quad i=1,2,3,4,5,6$$

式中的参数 a_i 和 σ_i 决定每一个分布函数的形状，原来的数据库所提供的有关 6 个地区的信息如表 5.1.1 所示.

表 5.1.1 高斯分布函数的参数

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
	VI	VII	VIII	IX	X	XI
a_i	5	20	35	49	71	92
σ_i	3	10	13	26	18	4

根据观察你决定用具有以下特征的 Fuzzy 集 B 来表示某一个所给地点建筑物损坏的模式.

$$B(x)=\exp\left(\frac{-(x-41)^2}{10^2}\right)$$

用格贴近度 N_{La} (参见定义 1.4.11)进行下列计算

$$N_{La}(B,A_1)=(0.004+1)/2\approx 0.5,\quad N_{La}(B,A_4)=0.98$$

$$N_{La}(B,A_2)=0.67,\quad N_{La}(B,A_5)=0.65$$

$$N_{La}(B,A_3)=0.97,\quad N_{La}(B,A_6)=0.5,$$

从以上所列我们可以看出：与受灾地区最接近的是 Mercalli 强度 IX(A_4).

如果你假定受灾地区的分布函数是单个具有下列特性的样本

$$B(x)=\begin{cases}1, & x=x_0=41\\ 0, & x\neq 41\end{cases}$$

考虑格贴近度，这时有 $N_L(B,A_i)=A_i(x_0)\wedge 1=A_i(x_0)$，计算得

$$A_1(41)=0,\quad A_4(41)=0.91$$

$$A_2(41)=0.01,\quad A_5(41)=0.06$$

$$A_3(41)=0.81,\quad A_6(41)\approx 0$$

基于最大隶属度(0.91)仍将选择 Mercalli 等级 IX(A_4)，如果我们不考虑分布函数的形式，而仅根据每一个区域的平均值来做出选择，我们将错误地选择区域 VIII,因为该区域的平均值 (35)要比区域 IX 的平均值(49)更接近所给定的单个样值(41). □

例 5.1.8 文字识别.

在计算机内存放 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 等 10 个数字模板，如图 5.1.4 所示，是一个样本数字放在一个 4×4 的小方格内. 我们规定:每一个含有笔画的小方格用 1 表示，不含笔画的小方格用 0 表示. 于是，样本 6 的模板可以记为

$$X^{(6)}=(0,1,1,0,0,1,0,0,0,1,1,0,0,1,1,0)$$

也可以用矩阵

$$X^{(6)}=\begin{bmatrix}0&1&1&0\\0&1&0&0\\0&1&1&0\\0&1&1&0\end{bmatrix}$$

表示.

现有待识别的手写字(未知模板)，如图 5.1.5 所示. 按上述规定，该手写字记为

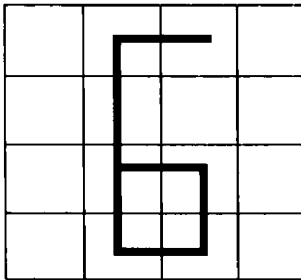


图 5.1.4

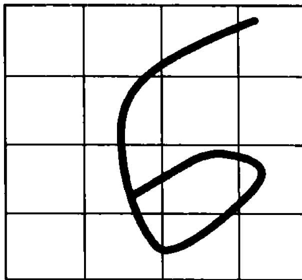


图 5.1.5

$$Y=(0,1,1,1,0,1,0,0,0,1,1,1,0,1,1,0)$$

或

$$Y=\begin{bmatrix}0&1&1&1\\0&1&0&0\\0&1&1&1\\0&1&1&0\end{bmatrix}$$

用 Hamming 贴近度，计算得

$$N_H(Y,X^{(6)})=1-\frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16}|y_i-x_i^{(6)}|=1-\frac{2}{16}=0.875$$

同样可以计算出与其他数字模板的 Hamming 贴近度，由择近原则识别. 如果规定允许的阈值 $\lambda=0.8$，现在 $N_H(Y,X^{(6)})=0.875>0.8$，则可以断言图 5.1.5中待识别的 Y 就是 6. □

例 5.1.9 条码识别.

条码识别技术有成本低、识别率高的特点，因此若将字母或数字转换为条码进行识别，是一种简易实用的途径.

以数字为例. 每个数字可以用黑白不同的五条条码来确定，其中三条黑，两条白. 若黑条记为 1，白条记为 0，则数字 0，1，…，9 对应的条码如表 5.1.2 所示.

表 5.1.2

数 字	1	2	3	4	5
0	1	1	1	0	0
1	1	1	0	1	0
2	1	0	1	1	0
3	0	1	1	1	0
4	1	1	0	0	1
5	1	0	1	0	1
6	0	1	1	0	1
7	1	0	0	1	1
8	0	1	0	1	1
9	0	0	1	1	1

对于每个条码，将其等分为 4 段，于是黑白对应的条码分别如图 5.1.6(a)、(b)所示.

于是，一个数字 $k(k=0,1,2,\cdots,9)$ 就对应于 4×5 的 0－1 矩阵 M_k，称为模板矩阵，例如数字 0 的模板矩阵为

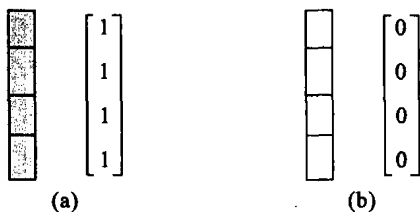


图 5.1.6

$$M_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

由于条码在印刷过程中会产生污点、飞白点、颜色深度不够或背景灰色不一等干扰，因此待识别的数字条码所对应的矩阵变成[0,1]上 4×5 阶的 Fuzzy 矩阵

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} & r_{15} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} & r_{25} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34} & r_{35} \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} & r_{44} & r_{45} \end{bmatrix}$$

其中 r_{ij} 表示位置 (i,j) 的灰度，当 $r_{ij}=1$ 时表示黑色，当 $r_{ij}=0$ 时表示白色，当 $0<r_{ij}<1$ 时表示灰色，随着灰色程度的不同在[0,1]中取相应的值.

例如，设待识别条码对应的矩阵为

$$R = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.8 & 0.5 & 0.1 & 0.3 \\ 0.5 & 0.9 & 0.9 & 0.2 & 0.2 \\ 0.8 & 0.5 & 0.9 & 0.8 & 0.3 \\ 0.7 & 0.5 & 0.8 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

用 Hamming 贴近度公式 $N_H(M_k,R)=1-\frac{1}{20}\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{5}|m_{ij}-r_{ij}|$，计算得

$N_H(M_0,R)=0.67$，$N_H(M_1,R)=0.52$，$N_H(M_2,R)=0.56$，$N_H(M_3,R)=0.58$，$N_H(M_4,R)=0.49$，$N_H(M_5,R)=0.53$，$N_H(M_6,R)=0.55$，$N_H(M_7,R)=0.38$，$N_H(M_8,R)=0.40$，$N_H(M_9,R)=0.44$.

因 $N_H(M_0,R)$ 最大，由择近原则，R 应判断为数字 0 的条码. □

§5.2 多特征模式的识别

到目前为止，我们所讨论的都是一维模式识别，也就是说这里的模式仅仅局限于单个特性. 例如 Mercalli 地震. 假若前面的例子不仅要考虑地震损害，还要考虑地震震级强度、特殊建筑物(学校或工厂)的重要性、地区灾害地震的历年记录等因素时，那么在进行模式识别时我们应如何考虑这么多个特征呢?

对每一个数据样本我们可以考虑 m 个特征，这样每一个样本 x_i 就是一个特征向量

$$x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{im}) \in X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_m = X$$

5.2.1 个体的识别

最大隶属原则 1 设在 m 维空间中的每个已知模式就是由 $A_i = \{A_{i1}, A_{i2}, \cdots, A_{im}\}$ 表示的一个模糊类(或模式)，这里 A_{ij} 是论域 X_j 上的 Fuzzy 集，$i=1,2,\cdots,n$, $j=1,2,\cdots,m$.

$$A_i(x) = \sum_{j=1}^{m} w_j A_{ij}(x_j) \tag{5.2.1}$$

其中 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_m) \in X$, w_j 为加权因子，$0 < w_j < 1$, $\sum_{j=1}^{m} w_j = 1$. 取定对象 $x_0 = (x_{01}, x_{02}, \cdots, x_{0m}) \in X$，如果存在指标 $i \in \{1,2,\cdots,n\}$，使得

$$A_i(x_0) = \max\{A_1(x_0), A_2(x_0), \cdots, A_n(x_0)\} \tag{5.2.2}$$

则认为单数据样本 x_0 相对隶属于 A_i 或最接近模式 A_i.

也可以有类似的最大隶属原则的阈值原则 2(略)和择优原则 3.

最大隶属原则 3 (择优原则) 设在 m 维空间中的已知模式就是由 $A = \{A_1, A_2, \cdots, A_m\}$ 表示的一个模糊类(或模式)，这里 A_j 是论域 X_j 上的 Fuzzy 集，$j=1,2,\cdots,m$.

$$A(x) = \sum_{j=1}^{m} w_j A_j(x_j) \tag{5.2.3}$$

其中 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_m) \in X$, w_j 为加权因子，$0 < w_j < 1$, $\sum_{j=1}^{m} w_j = 1$. 取定 n 个待录取对象 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in X$，如果存在指标 $i \in \{1,2,\cdots,n\}$，使得

$$A(x_i) = \max\{A(x_1), A(x_2), \cdots, A(x_n)\} \tag{5.2.4}$$

则应优先择取 x_i.

例 5.2.1 学生成绩的综合评价.

设某班学生某阶段共学习了 4 门课程：数学、物理、化学、外语，4 门课程“优”的隶属函数为

$$A_1(x)=A_2(x)=A_3(x)=A_4(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 80\\ \dfrac{x-80}{10}, & 80< x\leqslant 90\\ 1, & 90< x\leqslant 100\end{cases}$$

现有 3 位学生张三、李四和王五的 4 门课程成绩分别为：$x_1=(96,84,76,92)$，$x_2=(86,74,76,90)$，$x_3=(78,66,67,76)$. 考虑权重 $w_1=w_2=w_3=w_4=\dfrac{1}{4}$，相对于这 3 位学生，看谁最接近优.

将 x_1,x_2,x_3 分别代入式(5.2.3)中，计算

$$A(x_1)=\frac{1}{4}[A_1(96)+A_2(84)+A_3(76)+A_4(92)]=\frac{1}{4}(1+0.4+0+1)=0.6$$

$$A(x_2)=\frac{1}{4}[A_1(86)+A_2(74)+A_3(76)+A_4(90)]=0.4$$

$$A(x_3)=\frac{1}{4}[A_1(78)+A_2(66)+A_3(67)+A_4(76)]=0$$

由最大隶属原则 3 知，张三最接近优. □

5.2.2 群体的识别

择近原则 1 设在 m 维空间中的每个已知模式就是由 $A_i=\{A_{i1},A_{i2},\cdots,A_{im}\}$ 表示的一个模糊类(或模式)，这里 $i=1,2,\cdots,n$. 定义在相同 m 维空间的一个由相互独立的 Fuzzy 集所组成的集合 $B=\{B_1,B_2,\cdots,B_m\}$ 为识别对象，计算

$$N(B,A_i)=\sum_{j=1}^{m}w_jN(B_j,A_{ij}) \tag{5.2.5}$$

其中 w_j 为加权因子，$0<w_j<1$，$\sum_{j=1}^{m}w_j=1$. 如果存在指标 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$，使得

$$N(B,A_i)=\max\{N(B,A_1),N(B,A_2),\cdots,N(B,A_n)\} \tag{5.2.6}$$

则认为样本 B 最接近模式 A_i.

类似地也有择近原则的阈值原则.

例 5.2.2 某工厂产品的生产过程可以用 3 种特征来描述：(i)压力；(ii)温度；(iii)流量. 这些特征的组合，可以指示产品生产过程中当前操作模型(模式). 对于每一种操作模式的各处特性的典型语言表述值用表 5.2.1 中的 Fuzzy

集来定义.

表 5.2.1　操作模型和特征值的关系

模型(模式)	压力	温度	流量
热压	高	高	0
退火	高	低	0
烧结	低	0	低
传送	0	0	高

这 3 个特征的隶属函数如图 5.2.1～图 5.2.3 所示.

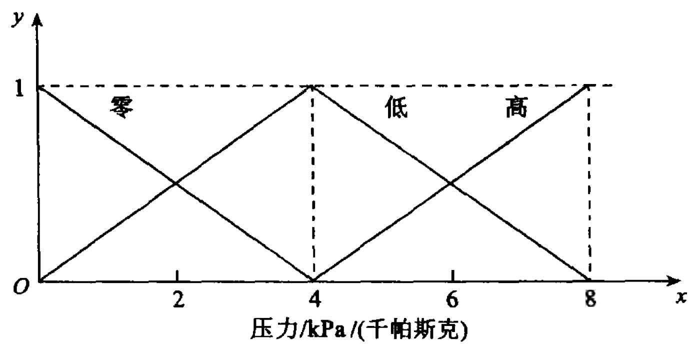


图 5.2.1　压力的隶属函数曲线

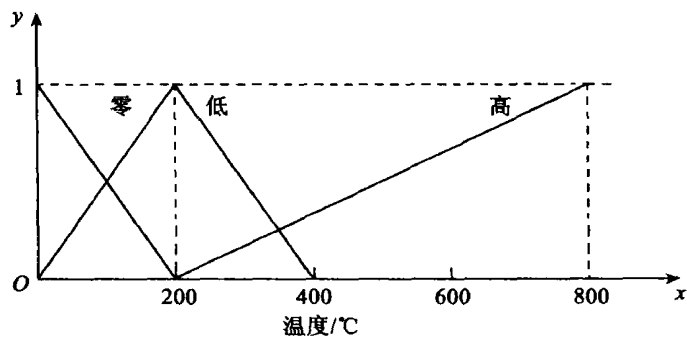


图 5.2.2　温度的隶属函数曲线

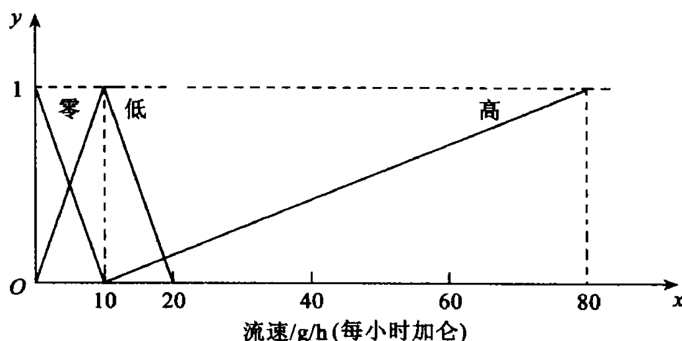


图 5.2.3 流速的隶属函数曲线

考虑到生产过程中存在一个与压力值有关的爆炸危险，给予“压力”比另两个特征较重的权重：$w_{压力}=0.5$，$w_{温度}=0.25$，$w_{流量}=0.25$.

(1) 假设系统从一组传感器读得一组清晰值 x(压力=5kPa，温度=150℃，流量=5g/p). 由式(5.2.1)我们求得

“热压”$(x)=w_{压力}\times$“压力高”$(5)+w_{温度}\times$“温度高”$(150)+w_{流量}\times$“流量零”(5)

$=0.5\times0.25+0.25\times0+0.25\times0.5=0.25$

“退火”$(x)=w_{压力}\times$“压力高”$(5)+w_{温度}\times$“温度低”$(150)+w_{流量}\times$“流量零”(5)

$=0.5\times0.25+0.25\times0.75+0.25\times0.5=0.4375$

“烧结”$(x)=w_{压力}\times$“压力低”$(5)+w_{温度}\times$“温度零”$(150)+w_{流量}\times$“流量低”(5)

$=0.5\times0.75+0.25\times0.25+0.25\times0.5=0.5625$

“传送”$(x)=w_{压力}\times$“压力零”$(5)+w_{温度}\times$“温度零”$(150)+w_{流量}\times$“流量高”(5)

$=0.5\times0+0.25\times0.25+0.25\times0=0.0625$

清晰值 $x=$(5kPa，150℃，5g/p)与烧结过程的压力、温度和流量最相符合(0.5625 最大)，所以，我们可以将生产模式记录为“烧结”，作为三个传感数值所指示的生产模式.

(2) 假设这时压力、温度和流量的信息或取值是 Fuzzy 集而不是清晰的单个数据样值，即 $B=\{B_{压力},B_{温度},B_{流量}\}$，图 5.2.4～图 5.2.6 给出了这些 Fuzzy 集的定义. 由新模式 B 的这些模糊定义，我们用式(5.2.5)可以求新值 B 所最适配的模式.

对于新模式的压力特征和所存储的热压模式的压力特性(如图 5.2.7)，可得 $B_{压力}\circ$ 热压压力$=0$，$B_{压力}\hat{\circ}$ 热压压力$=0$，$N_{La}(B_{压力}$，热压压力$)=(0+1)/2=0.5$.

对于新模式的温度特征和所存储的热压模式的温度特性(如图 5.2.8)，可得

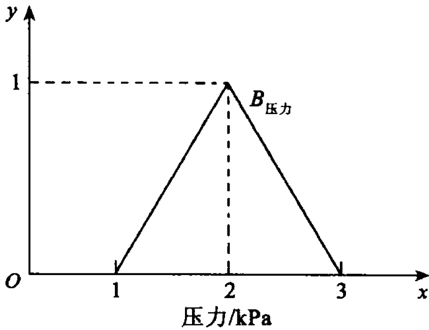


图 5.2.4　模糊传感器的压力读数

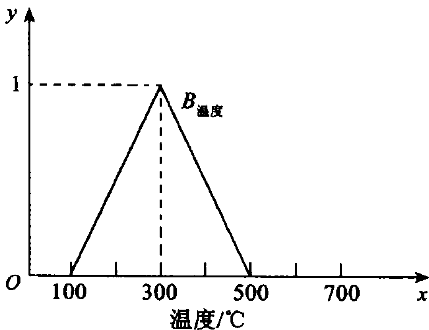


图 5.2.5　模糊传感器的温度读数

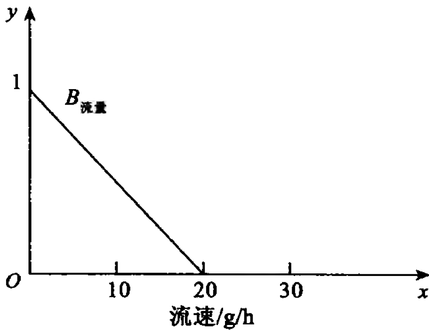


图 5.2.6　模糊传感器的流速读数

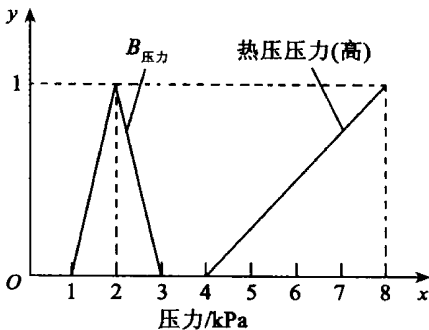


图 5.2.7 热压模式的压力比较

$B_{温度}\circ$热压温度$=0.375$，$B_{温度}\hat{\circ}$热压温度$=0$，N_{La}（$B_{温度}$，热压温度）$=(0.375+1)/2=0.6875$.

对于新模式的流量特征和所存储的热压模式的流量特性（如图 5.2.9），可得

$B_{流量}\circ$热压流量$=1$，$B_{流量}\hat{\circ}$热压流量$=0$，N_{La}（$B_{流量}$，热压流量）$=(1+1)/2=1$.

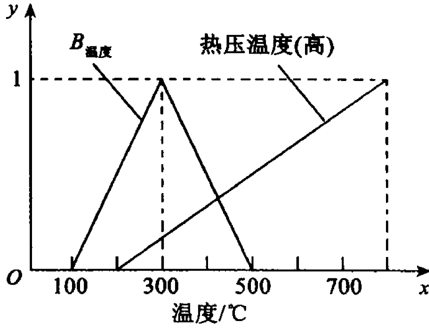


图 5.2.8　热压模式的温度比较

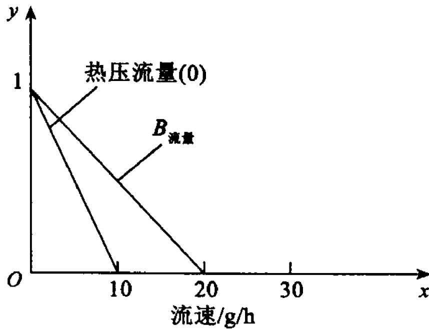


图 5.2.9　热压模式的流量比较

到此，可以利用格贴近度公式和式(5.2.5)确定新的传感器与热压模式之间的贴近度数值：

$$
\begin{aligned}
N_{La}(B,\text{热压}) &= 0.5N_{La}(B_{\text{压力}},\text{热压压力})+0.25N_{La}(B_{\text{温度}},\text{热压温度})+\\
&\quad 0.25N_{La}(B_{\text{流量}},\text{热压流量})\\
&=(0.5)(0.5)+(0.25)(0.6875)+(0.25)(1)=0.671875.
\end{aligned}
$$

同理可以得到

$$
\left.\begin{aligned}
&N_{La}(B_{\text{压力}},\text{退火压力})=(0+1)/2=0.5,\\
&N_{La}(B_{\text{温度}},\text{退火温度})=(0.75+1)/2=0.875,\\
&N_{La}(B_{\text{流量}},\text{退火流量})=(1+1)/2=1
\end{aligned}\right\} N_{La}(B,\text{退火})=0.71875
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&N_{La}(B_{\text{压力}},\text{烧结压力})=(0.6+1)/2=0.8,\\
&N_{La}(B_{\text{温度}},\text{烧结温度})=(0.25+1)/2=0.625,\\
&N_{La}(B_{\text{流量}},\text{烧结流量})=(0.6667+1)/2=0.8333
\end{aligned}\right\} N_{La}(B,\text{烧结})=0.764575
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&N_{La}(B_{\text{压力}},\text{传送压力})=(0.6+1)/2=0.8,\\
&N_{La}(B_{\text{温度}},\text{传送温度})=(0.25+1)/2=0.625,\\
&N_{La}(B_{\text{流量}},\text{传送量})=(0.1111+1)/2=0.5555
\end{aligned}\right\} N_{La}(B,\text{传送})=0.695125
$$

按择近原理，结合压力、温度和流量的模糊读数，最为匹配的模式是烧结模式，所以我们确定该生产过程为“烧结”过程，并记入运行情况记录表中. □

§5.3 图 像 处 理

有些图像的识别，如指纹识别、染色体分析、细胞识别、景物分析等. 若规定每一小格按其内图形的有、无情况，分别记为 1 和 0，就显得不够精确；若改用[0,1]上的实数来表示有图的程度，则比较准确.

例如，让机器识别如图 5.3.1 所示的简单图形，对这 4×4 个小方快，按其灰度确定各小快的隶属度，得一模糊矩阵

$$
R=\begin{bmatrix}0.5 & 1 & 0.7 & 0\\ 0 & 0 & 0.4 & 1\\ 0.7 & 0.4 & 0 & 0.4\\ 0.9 & 0 & 0.7 & 0.4\end{bmatrix}
$$

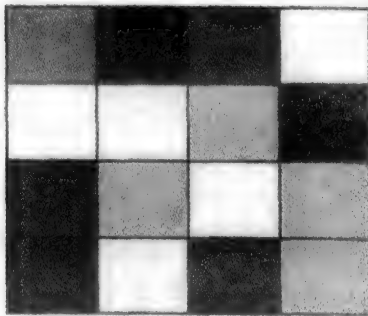


图 5.3.1

也可以将 R 看成一个用 $4\times4=16$ 维的 Fuzzy 向量表示的 Fuzzy 集

$$R=(0.5,1,0.7,0,0,0,0.4,1,0.7,0.4,0,0.4,0.7,0,0.7,0.4).$$

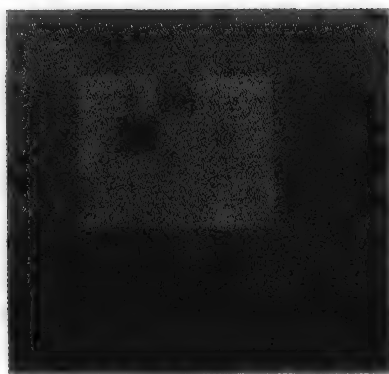
当人们能够对图像进行有效的模式识别操作之前，人们有必要对这个图像进行预处理，以获得尽量好的图像用于识别处理. 与所有图像处理技术一样，我们必须特别注意：若被处理后的图像与原始图像并无明显的差别，则图像处理是无效的. 为了增强一幅图像的对比度，可以使用下列的增强算子（该算子将在 §10.3.2 中详细讨论）.

设 $A\in\mathscr{F}(X)$ 是论域 X 上的 Fuzzy 集，定义另一 Fuzzy 集 $I^{(2)}(A)\in\mathscr{F}(X)$，并且

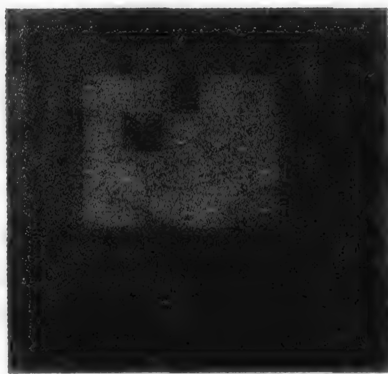
$$I^{(2)}(A)(x)\triangleq\begin{cases}2(A(x))^2, & A(x)\in[0,0.5]\\ 1-2(1-A(x))^2 & A(x)\in(0.5,1]\end{cases}\tag{5.3.1}$$

算子 $I^{(2)}$ 使 Fuzzy 集 A 的模糊度降低了（Pal，King，1980），称之为清晰度增强算子.

下面将用图 5.3.2(a)所示的图像说明图像增强过程. 图像 5.3.2(a)所示的黑色方形图像中有一浅色方块，由于背景阴影与浅色方块几乎相同，故该方块不是很明显. 表 5.3.1 列出了图 5.3.2(a)的 10×10 像素阵列中个像素在 256 种灰度强度中的取值. 将这些值除以 256 得强度集合的隶属度，如表 5.3.2 所示. 表 5.3.3 是表 5.3.2 经过增强算法后的强度. 图 5.3.2(b)是增强后的图像. 图 5.3.3(a)～图 5.3.3(f)分别显示了重复利用增强算子 $I^{(2)}$ 对图像增强的结果.



(a) 原始图像



(b) 经过一次 $I^{(2)}$ 运算操作后的图像

图 5.3.2 小方形的浅色方块

表 5.3.1 图 5.3.2(a)所示图像的 10×10 像素阵列中各像素灰度强度值

77	89	77	64	77	71	99	56	51	38
77	122	125	125	125	122	117	115	51	26
97	115	140	135	133	153	166	112	56	31
82	112	145	130	150	166	166	107	74	23
84	107	140	138	135	158	158	120	71	18
77	110	143	148	153	145	148	122	77	13
79	102	99	102	97	94	92	115	77	18
71	77	74	77	71	64	77	89	51	20
64	64	48	51	51	38	51	31	26	18
51	38	26	26	31	13	26	26	26	13

表 5.3.2 表 5.3.1 强度值的标度矩阵

0.30	0.35	0.30	0.25	0.30	0.28	0.39	0.22	0.20	0.15
0.30	0.48	0.49	0.49	0.49	0.48	0.46	0.45	0.20	0.10
0.38	0.45	0.55	0.53	0.52	0.60	0.65	0.44	0.22	0.12
0.32	0.44	0.57	0.51	0.59	0.65	0.65	0.42	0.29	0.09
0.33	0.42	0.55	0.54	0.53	0.62	0.62	0.47	0.28	0.07
0.30	0.43	0.56	0.58	0.60	0.57	0.58	0.48	0.30	0.05
0.31	0.40	0.39	0.40	0.38	0.37	0.36	0.45	0.30	0.07
0.28	0.30	0.29	0.30	0.28	0.25	0.30	0.35	0.20	0.08
0.25	0.25	0.19	0.20	0.20	0.15	0.20	0.12	0.10	0.07
0.20	0.15	0.10	0.10	0.12	0.05	0.10	0.10	0.10	0.05

表 5.3.3 经过增强算法后的强度矩阵

0.18	0.24	0.18	0.12	0.18	0.16	0.30	0.10	0.08	0.05
0.18	0.46	0.48	0.48	0.48	0.46	0.42	0.40	0.08	0.02
0.29	0.40	0.60	0.56	0.54	0.68	0.75	0.39	0.10	0.03
0.20	0.39	0.63	0.52	0.66	0.75	0.75	0.35	0.17	0.02
0.22	0.35	0.60	0.58	0.56	0.71	0.71	0.44	0.16	0.01
0.18	0.37	0.61	0.65	0.68	0.63	0.65	0.46	0.18	0.01
0.19	0.32	0.30	0.32	0.29	0.27	0.26	0.40	0.18	0.01
0.16	0.18	0.17	0.18	0.16	0.12	0.18	0.24	0.08	0.01
0.12	0.12	0.07	0.08	0.08	0.05	0.08	0.03	0.02	0.01
0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01

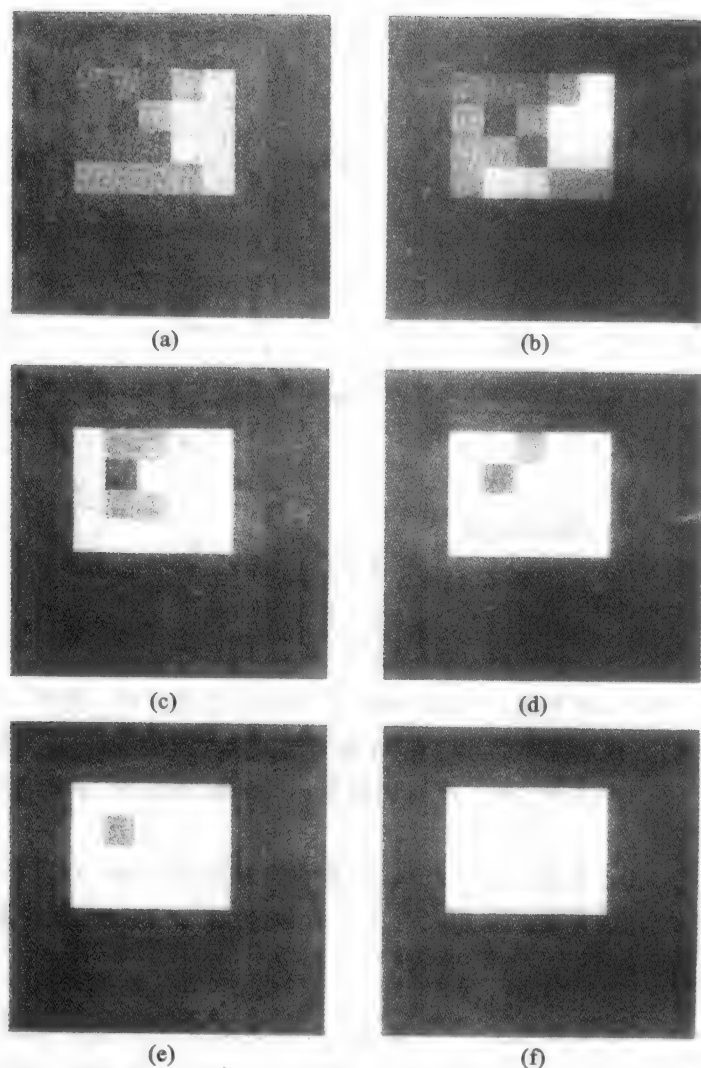


图 5.3.3 图像 5.3.2(a)的带浅色方块的小方形的增强算子 $I^{(2)}$ 的递归应用结果

§5.4 Fuzzy 方位转换技术

数字与西文字母的笔画都具有一定的方向与位置. 所以只要把相应的方位描述清楚,数字或字母就可以唯一确定. 我们将待识别的文字固定在一个方框框内,方框框的位置不能倒置,然后确定各方向的编码. 如图 5.4.1 所示共有 8 个方向,分别用 0,1,2,3,4,5,6,7 表示.

现给定一数 327,则可以将这个数分解为如图 5.4.2 所示的形式.

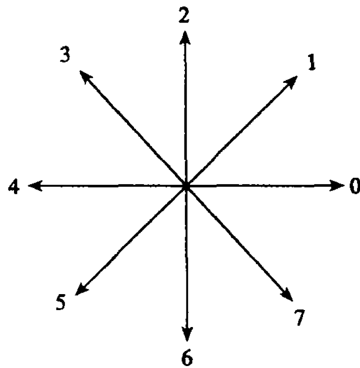
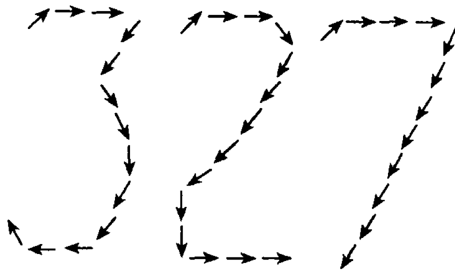


图 5.4.1


图 5.4.2

从而,获得如下三个号码串向量

3=(1 0 0 5 5 7 7 6 5 5 4 4 3)

2=(1 0 0 7 5 5 5 5 5 6 6 0 0 0)

7=(1 0 0 0 5 5 5 5 5 5 5 5)

显然,沿着文字的方向,与给定的八个方向不完全一致. 例如,327 这三个数字中的方向"5"彼此都不相同. 所以,所示的方向都是模糊的,即可以用 Fuzzy 集来表示. 在实际应用中,为了使识别结果保持较高的精度,要给出 16 个以上的方向.

下面建立对应于这 16 个模糊方向的隶属函数. 取 $X=[-11.25^\circ, 348.75^\circ]$,各方向的隶属函数如表 5.4.1 所示,表 5.4.1 中所给隶属函数在标定区间以外均为零,且 $k=\dfrac{1}{11.25}$.

可以将 10 个数字 0,1,2,…,9 的 Fuzzy 方向用隶属度给定,称其为号码串 Fuzzy 向量,将 10 个 Fuzzy 向量存储到计算机中去作为标准向量. 将待识别字的号码串 Fuzzy 向量与标准向量相比较,利用择近原则即可以对该字进行识别.

表 5.4.1

方向名称	模糊方向码	隶属函数表示式	标定区间
右	0	$1-k\mid x-0\mid$	[−11.25,11.25]
右上偏右	1	$1-k\mid x-22.5\mid$	[11.25, 33.75]
右上	2	$1-k\mid x-45\mid$	[33.75,56.25]

续表

方向名称	模糊方向码	隶属函数表示式	标定区间
右上偏上	3	$1-k\mid x-67.5\mid$	[56.25,78.75]
上	4	$1-k\mid x-90\mid$	[78.75, 101.25]
左上偏上	5	$1-k\mid x-112.5\mid$	[101.25, 123.75]
左上	6	$1-k\mid x-135\mid$	[123.75, 146.25]
左上偏左	7	$1-k\mid x-157.5\mid$	[146.25, 168.75]
左	8	$1-k\mid x-180\mid$	[168.75, 191.25]
左下偏左	9	$1-k\mid x-202.5\mid$	[191.25, 213.75]
左下	10	$1-k\mid x-225\mid$	[213.75, 236.25]
左下偏下	11	$1-k\mid x-247.5\mid$	[236.25, 258.75]
下	12	$1-k\mid x-270\mid$	[258.75, 281.25]
右下偏下	13	$1-k\mid x-292.5\mid$	[281.25, 303.75]
右下	14	$1-k\mid x-315\mid$	[303.75, 326.25]
右下偏右	15	$1-k\mid x-337.5\mid$	[326.25, 348.75]

§5.5 Fuzzy 聚类分析与 Fuzzy 模式识别

聚类分析与模式识别常常是同一问题的两个方面(Bezdek, 1973; Bezdek, Pal, 1992). 没有聚类就无所谓识别,没有识别问题也就没有进行聚类的必要(聚类本身也蕴含识别). 下面给出先作聚类分析再进行模式识别的实例.

例 5.5.1 设某矿区常依照 6 种微量元素 $b_1,b_2,\cdots,b_6$ 的含量判断成矿类别,依据历史情况知道含矿区大体上有 5 类. 现给出 $a_1,a_2,\cdots,a_9$ 共 9 个有显著特征的历史上的测量结果,希望据此可以给出这 5 类较好的"代表". 设有给定的 4 个新测量结果 a_1^*,a_2^*,a_3^*,a_4^*,需要判定它们各自所属类别. 原始资料均列入表 5.5.1 中. 且表 5.5.1 中第 i 行第 j 列数据是在作 a_i (或 a_i^*)测量时,得到的 b_j 种微量元素的含量与 b_j 元素可能有的最大含量之比(相对含量).

表 5.5.1

类别	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6
a_1	0.739	0.033	0.188	0.492	0.020	0.739
a_2	0.787	0.015	0.165	0.224	0.019	0.658
a_3	0.124	0.030	0.048	0.136	0.019	0.393
a_4	0.280	0.012	0.067	0.022	0.016	0.342
a_5	1.000	0.013	0.290	0.090	0.061	0.462
a_6	0.032	0.024	0.037	0.281	0.046	0.560
a_7	0.449	0.662	1.000	1.000	1.000	1.000
a_8	0.280	0.521	0.470	0.295	0.188	0.735
a_9	0.326	1.000	0.182	0.156	0.049	0.675
a_1^*	0.629	0.524	0.210	0.218	0.069	0.658
a_2^*	0.524	0.163	0.567	0.143	0.071	0.868
a_3^*	0.153	0.486	0.314	0.349	0.009	0.769
a_4^*	0.177	0.126	0.067	0.096	0.085	0.483

现使用 Euclid 贴近度(参见 §1.4.5)计算出 $a_1,a_2,\cdots,a_9$ 各元素之间的贴近程度 $N_E(a_i,a_j)\triangleq r_{ij}$，则 $R=(r_{ij})_{9\times9}$ 是 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_9\}$ 上的相似关系，且

$$R=\begin{bmatrix}1 \\ 0.883 & 1 \\ 0.672 & 0.702 & 1 \\ 0.683 & 0.740 & 0.918 & 1 \\ 0.769 & 0.859 & 0.627 & 0.687 & 1 \\ 0.684 & 0.684 & 0.896 & 0.828 & 0.582 & 1 \\ 0.364 & 0.237 & 0.237 & 0.217 & 0.266 & 0.278 & 1 \\ 0.685 & 0.672 & 0.680 & 0.663 & 0.604 & 0.701 & 0.491 & 1 \\ 0.548 & 0.555 & 0.576 & 0.568 & 0.502 & 0.574 & 0.352 & 0.756 & 1\end{bmatrix}$$

利用 §3.11 中介绍的方法获得 Fuzzy 图 $G=(A,R\backslash I)$ 的最优树，如图5.5.1所示.

由图 5.5.1 可得，在 0.814 的水平上可以将 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_9\}$ 分为 $A_1=\{a_7\}$，$A_2=\{a_9\}$，$A_3=\{a_8\}$，$A_4=\{a_1,a_2,a_5\}$，$A_5=\{a_3,a_4,a_6\}$ 共 5 类. 用每

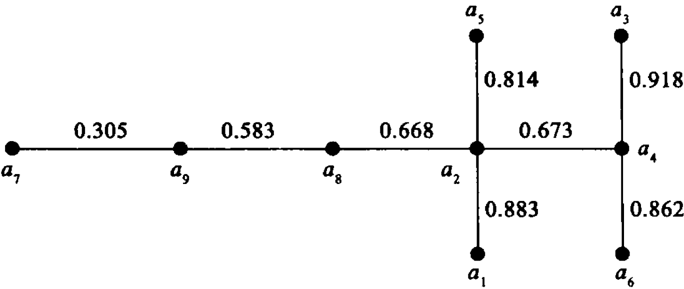


图 5.5.1

类中所有元素对于 $b_j(j=1,2,\cdots,6)$ 的相对含量的平均值作为某一类的"中心"(代表),并仍记做 $A_1,A_2,\cdots,A_5$. 并将 $A_1,A_2,\cdots,A_5$ 对于 $b_1,b_2,\cdots,b_6$ 的相对含量列入表 5.5.2 中.

表 5.5.2

类别	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6
A_1	0.449	0.662	1.000	1.000	1.000	1.000
A_2	0.326	1.000	0.182	0.156	0.049	0.675
A_3	0.280	0.521	0.470	0.295	0.188	0.735
A_4	0.842	0.020	0.214	0.269	0.033	0.620
A_5	0.145	0.022	0.051	0.146	0.027	0.432

仍使用 Euclid 贴近度计算出待分类的 a_1^*,a_2^*,a_3^*,a_4^* 与 $A_1,A_2,\cdots,A_5$ 之间的贴近程度 $N_E(a_i^*,A_j)$,并列入表 5.5.3 中.

表 5.5.3

类别	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	$\bigvee_{j=1}^{5} N_E(a_i^*,A_j)$
a_1^*	0.385	0.768	0.813	0.775	0.692	0.813
a_2^*	0.414	0.607	0.795	0.767	0.678	0.795
a_3^*	0.416	0.755	0.886	0.651	0.729	0.886
a_4^*	0.275	0.626	0.728	0.704	0.941	0.941

若给定阈值$\lambda=0.8$，由择近原则 2，应判 a_1^*，a_3^* 属第 3 类（A_3）；a_4^* 属于第 5 类（A_5）；拒判 a_2^*，因为 $\bigvee_{j=1}^{5} N_E(a_2^*, A_j)=0.795<0.8=\lambda$. □

例 5.5.2 给定 15 只昆虫，表 5.5.4 给出了它们各自的触角长 u_i 和翼长 v_i，及

$$w(x_i)=-58.03u_i+37.76v_i+6.14$$

的值.

表 5.5.4

昆虫代号	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}
触角长 u_i	1.54	1.38	1.48	1.40	1.36	1.56	1.38	1.38	1.24	1.30	1.20	1.14	1.28	1.26	1.18
翼长 v_i	1.82	1.64	1.82	1.70	1.74	2.08	1.82	1.90	1.72	1.96	1.86	1.78	2.00	2.00	1.96
$w(x_i)$	−14.50	−12.02	−11.02	−10.91	−7.08	−5.85	−5.22	−2.20	−0.81	4.71	6.74	7.20	7.38	8.54	11.67

大体上认为 $w(x_i)$ 取负值的是传粉者，且负值越小是传粉者的可能性越大；又 $w(x_i)$ 取正值的是疾病载体，且正值越大是疾病载体的可能性越大. 就 $w(x_i)(i=1,2,\cdots,15)$作保序 Fuzzy 聚类. 为了使所得结果有较大的分明性，取定 $c=\frac{3}{2}>1$，并获得 Fuzzy 聚类 D 与聚类中心 Y.

$$D=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0.985 & 0.796 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.015 & 0.204 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$Y=\{-7.948, 7.507\}$$

现给定 $x_1=(1.24,1.80)$，$x_2=(1.28,1.84)$，$x_3=(1.40,2.04)$ 三只昆虫（x_1,x_2,x_3 中第一分量表示触角长，第二分量表示翼长），要求识别它们的类别.

为了识别 x_1,x_2,x_3 的类别，先计算 x_1,x_2,x_3 各自的 $w(x_i)$ 值

$$w(x_1)=2.151,\quad w(x_2)=1.340,\quad w(x_3)=1.928.$$

将传粉类昆虫对应的 Fuzzy 集记做 A，疾病载体类对应的 Fuzzy 集记做 B. 由 § 4.4 中式(4.4.6)得

$$A(x_1)=\frac{1}{1+\left(\frac{-7.948-2.151}{7.507-2.151}\right)^{\frac{2}{\frac{3}{2}-1}}}=0.073,\ B(x_1)=0.927$$

$$A(x_2)=\frac{1}{1+\left(\frac{-7.948-1.340}{7.507-1.340}\right)^{4}}=0.163,\ B(x_2)=0.837$$

$$A(x_3)=\frac{1}{1+\left(\frac{-7.948-1.928}{7.507-1.928}\right)^4}=0.092,\ B(x_3)=0.908$$

若取阈值 0.80，可以判断 x_1, x_2, x_3 均为疾病载体类. 与确定性判断的不同之处是在这里可以认为 x_1, x_2, x_3 分别以 0.927，0.837，0.908 的程度属于疾病载体类，还分别以 0.073，0.163，0.092 的程度属于传粉类. 对于一切原本不存在突变的事物，这样分类必然是科学的. □

Fuzzy 模式识别通过对于医疗诊断(De, Biswas, et al., 2001; Szmidt, Kacprzyk, 2001b, c, 2004a, b; 郭桂蓉，1993)、天气预报(昌玮等，1987)、语言识别(叶德明等，1992)、手写文字和数字的识别(Siy, Chen, 1974; Wang, Wang, 1980; 朱学芳等，1996)、信号分类(郭桂蓉，1992，1993; 郭桂蓉，郁文贤，1992)、图像处理(Ghosh, Pal, 2003; Pal, 2001; Pal, Majumder, 1986; Tizhoosh, 1997, 2005)、知识表示(Abbasov, Mamedova, et al., 2001)等问题的研究，提出了许多卓有成效的方法(Shkhat, 1995，1996，1998)，取得了一批具有实际意义的成果(Li, Cheng, 2002; Mitchell, 2003; Vlachos, Sergiadis, 2007a). Fuzzy 模式识别的研究还很不成熟，特别是 Fuzzy 集的贴近度问题(Deng, Shi, et al., 2004; Hung, Yang, 2004; Khatibi, Montazer, 2009; Liang, Shi, 2003; Liu, 2005; Mitchell, 2003; Shang, Jiang, 1997; Szmidt, Kacprzyk, 2001a)，有待进一步的完善.

第6章 Fuzzy综合评判

按确定的标准,对某个或某类对象中的某个因素或某个部分进行评价,称为单一评价. 从众多的单一评价中获得对某个或某类对象的整体评价,称为综合评价. 综合评价是在日常生活和科研工作中经常遇到的问题,如产品质量评定、科技成果鉴定、某种作物种植适应性的评价等,都属于综合评判问题. 在实际应用中,评价的对象往往受各种不确定性因素的影响,其中模糊性是最主要的. 如服装评价,包括花色、式样、耐穿性、价格合理性以及舒适程度等. 这样,将模糊理论与经典综合评价方法相结合进行综合评判将使结果尽量客观从而取得更好的实际效果. 本章首先给出 Fuzzy 映射、Fuzzy 变换与 Fuzzy 综合函数等概念,然后介绍各类 Fuzzy 综合评价模型以及多层次综合评判,最后建立基于 Fuzzy 数的 Fuzzy 综合评判.

§6.1 Fuzzy 映射

定义 6.1.1 (Dubois, Prade, 1981) 称映射

$$f: X \to \mathscr{F}(Y),\ x \mapsto f(x) = B \in \mathscr{F}(Y) \tag{6.1.1}$$

是从 X 到 Y 的 Fuzzy 映射(fuzzy mapping).

如定义 1.5.1 中的 2 型 Fuzzy 集是 X 到[0,1]的 Fuzzy 映射.

例 6.1.1 设 $X=\{x_1,x_2,x_3\}$, $Y=\{y_1,y_2,y_3,y_4\}$, 令

$$f: X \to \mathscr{F}(Y)$$

$$x_1 \mapsto f(x_1) = \frac{1}{y_1}$$

$$x_2 \to f(x_2) = \frac{1}{y_1} + \frac{0.4}{y_2} + \frac{0.9}{y_3} + \frac{0.5}{y_4}$$

$$x_3 \to f(x_3) = \frac{0.5}{y_1} + \frac{0.7}{y_3}$$

则 f 是从 X 到 Y 的 Fuzzy 映射. □

例 6.1.2 定义 3.3.1 中 Fuzzy 关系的截影便是 Fuzzy 映射,即对于 $R \in$

$\mathscr{F}(X\times X)$，任取 $x\in X$，则 R 在 x 处的截影 $R|_x$ 是从 X 到 Y 的 Fuzzy 映射，其中

$$R|_x(y)=R(x,y),\ \forall y\in Y$$

R 在 y 处的截影 $R|_y$ 是从 Y 到 X 的 Fuzzy 映射，其中

$$R|_y(x)=R(x,y),\ \forall x\in X.$$ □

定理 6.1.1 任给 $R\in\mathscr{F}(X\times Y)$，都唯一确定了一个从 X 到 Y 的 Fuzzy 映射，记做

$$f_R:X\to\mathscr{F}(Y)$$

使得 $\forall x\in X$，都有

$$f_R(x)=R|_x \tag{6.1.2}$$

反之，任给从 X 到 Y 的 Fuzzy 映射

$$f:X\to\mathscr{F}(Y)$$

都唯一确定了一个 Fuzzy 关系，记做 $R_f\in\mathscr{F}(X\times Y)$，使得 $\forall x\in X$，都有

$$R_f|_x=f(x) \tag{6.1.3}$$

证明 任给 $R\in\mathscr{F}(X\times Y)$，令

$$f_R(x)(y)=R(x,y)$$

由截影的定义，$\forall x\in X$

$$R|_x(y)=R(x,y),y\in Y$$

于是 $\forall x\in X$，都有

$$f_R(x)=R|_x.$$

反之，任给 $f:X\to\mathscr{F}(Y)$，令

$$R_f(x,y)=f(x)(y),(x,y)\in X\times Y$$

于是 $R_f\in\mathscr{F}(X\times Y)$. 由截影的定义，$\forall x\in X$

$$R_f|_x(y)=R_f(x,y)=f(x)(y),y\in Y$$

所以

$$R_f|_x=f(x).$$ □

§6.2 Fuzzy 变换

先看下面的例子.

例 6.2.1 在例 3.2.1 中给出了身高(cm)与体重(kg)的 Fuzzy 关系. 身高论域为

$$X=\{140,150,160,170,180\}$$

体重论域为

$$Y = \{40, 50, 60, 70, 80\}$$

某地区身高与体重的 Fuzzy 关系为

$$R = \begin{array}{c} \\ 140 \\ 150 \\ 160 \\ 170 \\ 180 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 40 & 50 & 60 & 70 & 80 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0.8 & 0.2 & 0.1 & 0 \\ 0.8 & 1 & 0.8 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 & 1 & 0.8 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.8 & 1 & 0.8 \\ 0 & 0.1 & 0.2 & 0.8 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

现有一"男少年" a 在 X 上的 Fuzzy 集是

$$A = (0.8, 1, 0.6, 0.2, 0)$$

Fuzzy 集 A 可以看成是 a 到 X 的 Fuzzy 关系，那么 A 与 R 合成便是从 a 到 Y 的 Fuzzy 关系，即 a 在 Y 上的 Fuzzy 集

$$B = A \circ R = (0.8, 1, 0.8, 0.6, 0.2).$$ □

由此可见，关系 R 是一个映射，这个映射将一个 Fuzzy 集变为另一个 Fuzzy 集，相当于一个变换.

定义 6.2.1 (Negoita, Ralescu, 1975) 称映射

$$T_f: \mathscr{F}(X) \to \mathscr{F}(Y) \tag{6.2.1}$$

$$A \mapsto B = T_f(A) \tag{6.2.2}$$

为从 X 到 Y 的一个 Fuzzy 变换(或广义 Fuzzy 映射)(fuzzy transformation). 称 B 是 A 在 Fuzzy 变换 T_f 下的像，而 A 是 B 的原像.

当 $|X| = m$, $|Y| = n$ 时，Fuzzy 变换 T_f 就是映射

$$T_f: [0,1]^{1\times m} \to [0,1]^{1\times n} \tag{6.2.3}$$

易证下面的定理.

定理 6.2.1 任给 $R \in \mathscr{F}(X\times Y)$，唯一确定从 X 到 Y (Y 到 X)的 Fuzzy 变换，记做

$$T_R: \mathscr{F}(X) \to \mathscr{F}(Y)\ (T_R^{-1}: \mathscr{F}(Y) \to \mathscr{F}(X))$$

使得 $\forall A \in \mathscr{F}(X)$ ($\forall B \in \mathscr{F}(Y)$)，均有

$$T_R(A) = A \circ_{\top} R \in \mathscr{F}(Y) \quad (T_R^{-1}(B) = B \circ_{\top} R^{-1} \in \mathscr{F}(X)) \tag{6.2.4}$$

这里

$$(A \circ_{\top} R)(y) \triangleq \bigvee_{x\in X} \{A(x) \top R(x,y)\}, y \in Y \tag{6.2.5}$$

$$((B \circ_{\top} R^{-1})(x) \triangleq \bigvee_{y\in Y} \{B(y) \top R(x,y)\}, x \in X) \tag{6.2.6}$$

$\top$ 是[0, 1]上的 t-模. 这时称 T_R 和 T_R^{-1} 为由 R 导出的 Fuzzy 变换.

例 6.2.2 设 $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$，且

$$R=\begin{bmatrix}0.5 & 0.8 & 0.6 & 0.1\\0.2 & 1 & 0.3 & 0\\0 & 0.4 & 1 & 0.9\end{bmatrix}$$

$$A=\{x_1,x_2\},\ B=(0.6,0.5,0.2)$$

实际上，A 也可以写成 $A=(1,1,0)$.

如果取 $\top=\wedge$，则

$$T_R(A)=A\circ R=(1,1,0)\circ\begin{bmatrix}0.5 & 0.8 & 0.6 & 0.1\\0.2 & 1 & 0.3 & 0\\0 & 0.4 & 1 & 0.9\end{bmatrix}=(0.5,1,0.6,0.1)$$

$$T_R(B)=B\circ R=(0.6,0.5,0.2)\circ\begin{bmatrix}0.5 & 0.8 & 0.6 & 0.1\\0.2 & 1 & 0.3 & 0\\0 & 0.4 & 1 & 0.9\end{bmatrix}=(0.5,0.6,0.6,0.2)$$

如果取 $\top=\cdot$，则

$$T_R(A)=A\cdot R=(1,1,0)\cdot\begin{bmatrix}0.5 & 0.8 & 0.6 & 0.1\\0.2 & 1 & 0.3 & 0\\0 & 0.4 & 1 & 0.9\end{bmatrix}=(0.5,1,0.6,0.1)$$

$$T_R(B)=B\cdot R=(0.6,0.5,0.2)\cdot\begin{bmatrix}0.5 & 0.8 & 0.6 & 0.1\\0.2 & 1 & 0.3 & 0\\0 & 0.4 & 1 & 0.9\end{bmatrix}=(0.3,0.5,0.36,0.18).$$

□

定义 6.2.2　设 $A,B\in\mathscr{F}(X)$，若 Fuzzy 变换

$$T_f:\mathscr{F}(X)\to\mathscr{F}(Y)$$

满足

(1) $T_f(A\cup B)=T_f(A)\cup T_f(B)$;

(2) $T_f(\alpha A)=\alpha T_f(A),\alpha\in[0,1]$.

则称 T_f 是从 X 到 Y 的 Fuzzy 线性变换(fuzzy linear transformation).

由定义易得 Fuzzy 线性变换 T_f 的性质：

性质 6.2.1　$T_f(\varnothing)=\varnothing$.

性质 6.2.2　$\forall A,B\in\mathscr{F}(X)\ (A\subseteq B\Rightarrow T_f(A)\subseteq T_f(B))$.

定理 6.2.2　设 $R\in\mathscr{F}(X\times Y)$，则由 R 导出的 Fuzzy 变换 T_R 和 $T_R^{-1}(\top=\wedge)$ 是 Fuzzy 线性变换.

证明　下面只证明 T_R，对 T_R^{-1} 类似可证. $\forall A,B\in\mathscr{F}(X)$，则由 Fuzzy 关系的复合性质(定理 3.4.2(5))，有

$$(A\cup B)\circ R=(A\circ B)\cup(B\circ R)$$

即 $$T_R(A\cup B)=T_R(A)\cup T_R(B)$$

而 $\forall \alpha\in[0,1],\forall y\in Y$

$$((\alpha A)\circ R)(y)=\bigvee_{x\in X}\{(\alpha\wedge A(x))\wedge R(x,y)\}$$

$$=\alpha\wedge\Big(\bigvee_{x\in X}\{A(x)\wedge R(x,y)\}\Big)=\alpha(A\circ R)(y)$$

于是有

$$T_R(\alpha A)=\alpha T_R(A),\ \alpha\in[0,1]$$

所以，$T_R(A)=A\circ R$ 是 Fuzzy 线性变换. □

定理 6.2.3 设 $R\in\mathscr{F}(X\times Y)$，$T_R$ 和 T_R^{-1}（$\top=\wedge$）是由 R 导出的 Fuzzy 变换，则 T_R 和 T_R^{-1} 分别满足

$$T_R\Big(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\alpha_\lambda A^{(\lambda)}\Big)=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\alpha_\lambda T_R(A^{(\lambda)}) \qquad (6.2.7)$$

$$T_R^{-1}\Big(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\alpha_\lambda B^{(\lambda)}\Big)=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\alpha_\lambda T_R^{-1}(B^{(\lambda)}) \qquad (6.2.8)$$

其中：Λ 为指标集，$A^{(\lambda)}\in\mathscr{F}(X)$，$B^{(\lambda)}\in\mathscr{F}(Y)$，$\alpha_\lambda\in[0,1]$，$\lambda\in\Lambda$.

证明 下面只证明 T_R，对 T_R^{-1} 类似可证. 根据定理 6.2.2 及 Fuzzy 关系的复合性质(定理 3.4.2(5))，$\forall y\in Y$

$$T_R\Big(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\alpha_\lambda A^{(\lambda)}\Big)=\Big(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\alpha_\lambda A^{(\lambda)}\Big)\circ R=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(\alpha_\lambda A^{(\lambda)})\circ R$$

$$=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\alpha_\lambda T_R(A^{(\lambda)})=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}T_R(\alpha_\lambda A^{(\lambda)})$$

所以

$$T_R\Big(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\alpha_\lambda A^{(\lambda)}\Big)=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\alpha_\lambda T_R(A^{(\lambda)}).$$ □

作为 Fuzzy 线性变换的应用，下面介绍 Fuzzy 综合评判.

§6.3 Fuzzy 综合评判模型

要正确评价一个具体对象，首先应对这个对象的若干因素给出评语，然后再进行综合. 例如，要评价某种服装，则应先对“花色式样”、“耐穿程度”、“价格费用”等进行评判，然后综合.

因素就是对象的各种属性或性能，在不同场合，也称为参数指标或质量指标，它们能综合地反映出对象的质量，因而可以由这些因素来评价对象. 以后总假设 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$ 为评判因素集. 如评判服装，可以记 $U=\{u_1,u_2,u_3\}$，其中 u_1,u_2,u_3 分别表示花色式样，耐穿程度，价格费用。又总用 $V=\{v_1,$

$v_2,\cdots,v_m\}$ 表示评判集，例如，工业产品的评价，评判集是等级的集合；农作物种植区域适应性的评价，评判集是适应程度的集合，对于评判服装，$V=\{$很欢迎(v_1)，比较欢迎(v_2)，不太欢迎(v_3)，不欢迎$(v_4)\}$等.

为了进行综合评判，先进行单因素评判，即确定 U 到 V 的 Fuzzy 映射 $\gamma: U\to\mathscr{F}(V)$，且 $\forall u_i\in U$，称 $\gamma(u_i)$ 为对因素 u_i 的评价. γ 称为单因素评判函数. 如评判服装

$$\gamma(u_1)=\frac{0.7}{v_1}+\frac{0.2}{v_2}+\frac{0.1}{v_3}+\frac{0}{v_4}=(0.7,0.2,0.1,0)$$

是对花色式样(u_1)的评价，$\gamma(u_1)(v_1)=0.7$ 表示该服装在花色式样上很受欢迎的程度.

关于综合评判，则需引入 $[0,1]^n$ 到$[0,1]$的映射.

定义 6.3.1　设 $f:[0,1]^n\to[0,1]$，满足条件：

(1)正则性：若 $x_1=x_2=\cdots=x_n=x$，则 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x$；

(2)单增性：$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 关于所有变元是单调增加的，即对于任意 i，若 $x_i^{(1)}\leqslant x_i^{(2)}$，则

$$f(x_1,\cdots,x_{i-1},x_i^{(1)},x_{i+1},\cdots,x_n)\leqslant f(x_1,\cdots,x_{i-1},x_i^{(2)},x_{i+1},\cdots,x_n)\tag{6.3.1}$$

(3)连续性：$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 关于所有变元是连续的.

称 f 为 n 元 Fuzzy 综合函数(fuzzy synthetic function). 全体 n 元 Fuzzy 综合函数的集合记为 $\mathscr{U}_n$.

设 U 和 V 分别是评判因素集和评判集，$\gamma:U\to\mathscr{F}(V)$是单因素评判函数，$f$ 为 n 元 Fuzzy 综合函数，则

$$\begin{aligned}(f(\gamma(u_1)(v_1),\gamma(u_2)(v_1),\cdots,\gamma(u_n)(v_1)),\\ f(\gamma(u_1)(v_2),\gamma(u_2)(v_2),\cdots,\gamma(u_n)(v_2)),\cdots,\\ f(\gamma(u_1)(v_m),\gamma(u_2)(v_m),\cdots,\gamma(u_n)(v_m)))\end{aligned}$$

就是对 U 的综合评判.

常用的 n 元 Fuzzy 综合函数总与一个权向量有关，且常涉及以下两类权向量 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in[0,1]^n$：

(1)归一化权向量：$\sum_{i=1}^{n}a_i=1$；

(2)正规化权向量：$\bigvee_{i=1}^{n}a_i=1$.

归一化权向量与正规化权向量是可以相互转化的. 事实上，设 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in[0,1]^n$ 是归一化的，则 $\sum_{i=1}^{n}a_i=1$，从而 $\bigvee_{i=1}^{n}a_i=a_k>0$，令 $a_i^*=$

$a_i/a_k\ (i=1,2,\cdots,n)$，则 $A^* \triangleq (a_1^*, a_2^*, \cdots, a_m^*)$ 是正规化的，且 $a_k^*=1$. 又设 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in[0,1]^n$ 是正规化的，则 $\bigvee_{i=1}^{n} a_i=1$，从而 $\sum_{i=1}^{n} a_i>0$，令 $a_i^*=a/\sum_{k=1}^{n} a_k\ (i=1,2,\cdots,n)$，则 $A^* \triangleq (a_1^*, a_2^*, \cdots, a_m^*)$ 是归一化的.

例 6.3.1 下列 $[0,1]^n \to [0,1]$ 的映射都是 n 元 Fuzzy 综合函数

$$f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n) \triangleq \bigwedge_{i=1}^{n} x_i;$$

$$f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n) \triangleq \bigvee_{i=1}^{n} x_i;$$

$$f_3(x_1,x_2,\cdots,x_n) \triangleq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^p\right)^{\frac{1}{p}},\ p>0,\ (a_1,a_2,\cdots,a_n) \text{为归一化权向量；}$$

$$f_4(x_1,x_2,\cdots,x_n) \triangleq \bigvee_{i=1}^{n} a_i x_i,\ (a_1,a_2,\cdots,a_n) \text{为正规化权向量；}$$

$$f_5(x_1,x_2,\cdots,x_n) \triangleq \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}}.$$ □

定理 6.3.1 设 $f\in \mathcal{U}_n$，则 $\forall x_i \in [0,1]$

$$\bigwedge_{i=1}^{n} x_i \leqslant f(x_1,x_2,\cdots,x_n) \leqslant \bigvee_{i=1}^{n} x_i \tag{6.3.2}$$

证明 注意到 $\forall x_i\in[0,1]$，$\bigwedge_{i=1}^{n} x_i \leqslant x_i \leqslant \bigvee_{i=1}^{n} x_i$ 和 f 的正则性以及单增性即得. □

定理 6.3.2 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是 n 元 Fuzzy 综合函数，N 是$[0,1]$上的伪补，则

$$f^*(x_1,x_2,\cdots,x_n)=N(f(N(x_1),N(x_2),\cdots,N(x_n))) \tag{6.3.3}$$

是 n 元 Fuzzy 综合函数，且 $(f^*)^*=f$. 特别地，当 $N(x)=1-x$ 时

$$f^*(x_1,x_2,\cdots,x_n)=1-f(1-x_1,1-x_2,\cdots,1-x_n) \tag{6.3.4}$$

是 n 元 Fuzzy 综合函数.

证明 由 f 的正则性可得 f^* 的正则性；由 f 的单增性与 N 的逆序性可知 f^* 的单增性；由 f 与 N 的连续性(参见定理 1.3.5)可以推出 f^* 的连续性；由 N 的对合律可得 $(f^*)^*=f$. □

例 6.3.2 下列 $[0,1]^n \to [0,1]$ 的映射是例 6.3.1 中的 n 元 Fuzzy 综合函数按定理 6.3.2 生成的(取 $N(x)=1-x$)，所以也都是 n 元 Fuzzy 综合函数

$$f_1^*(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n);$$

$$f_3^*(x_1,x_2,\cdots,x_n) \triangleq 1-\left(\sum_{i=1}^{n} a_i(1-x_i)^p\right)^{\frac{1}{p}},\ p>0,\ (a_1,a_2,\cdots,a_n) \text{为归}$$

一化权向量；

$f_4^*(x_1,x_2,\cdots,x_n) \triangleq \bigwedge_{i=1}^{n}(1-a_i(1-x_i))$，$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 为正规化权向量；

$$f_5^*(x_1,x_2,\cdots,x_n) \triangleq 1-\left(\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)\right)^{\frac{1}{n}}.$$

定理 6.3.3　设 $f^0 \in \mathscr{U}_2$，如果置

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n) \triangleq f^0(f^0(\cdots f^0(f^0(x_1,x_2),x_3)\cdots),x_n) \tag{6.3.5}$$

则 $f \in \mathscr{U}_n$.

证明　由定义 6.3.1 直接得到. □

定理 6.3.4　给定 $f^0 \in \mathscr{U}_n$ 和 $t \in [0,1]$. 若置

(1) $$f(x_1,x_2,\cdots,x_n) \triangleq \begin{cases} f^0(x_1,x_2,\cdots,x_n), & f^0(x_1,x_2,\cdots,x_n) \in [t,1] \\ \bigwedge_{j=1}^{n} x_j, & f^0(x_1,x_2,\cdots,x_n) \in [0,t] \end{cases} \tag{6.3.6}$$

(2) $$g(x_1,x_2,\cdots,x_n) \triangleq \begin{cases} \bigvee_{j=1}^{n} x_j, & f^0(x_1,x_2,\cdots,x_n) \in [t,1] \\ f^0(x_1,x_2,\cdots,x_n), & f^0(x_1,x_2,\cdots,x_n) \in [0,t] \end{cases} \tag{6.3.7}$$

则 $f,g \in \mathscr{U}_n$.

定理 6.3.5　设 $f^0 \in \mathscr{U}_m$，$f^{(k)} \in \mathscr{U}_m(k=1,2,\cdots,m)$，$\forall x_i \in [0,1]$，$i \in \{1,2,\cdots,n\}$，若置

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n) \triangleq f^0(f^{(1)}(x_1,x_2,\cdots,x_n), f^{(2)}(x_1,x_2,\cdots,x_n),\cdots,f^{(m)}(x_1,x_2,\cdots,x_n)) \tag{6.3.8}$$

则 $f \in \mathscr{U}_n$.

证明　由定义 6.3.1 直接得到. □

定理 6.3.6　设 $g:[0,1]\to[0,1]$ 为连续的严格增加函数，任取 $f^0 \in \mathscr{U}_n$，如果置

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n) \triangleq g^{-1}(f^0(g(x_1),g(x_2),\cdots,g(x_n))) \tag{6.3.9}$$

则 $f \in \mathscr{U}_n$，其中 $g^{-1}(x)$ 是 $g(x)$ 的反函数.

证明　显然 $g^{-1}(x)$ 是存在的，并且 $g^{-1}(x)$ 也是连续的严格增加函数，由定义 6.3.1 直接验证易得 $f \in \mathscr{U}_n$. □

例 6.3.3　(1)取 $f^0=\wedge$，$g(x)=x$. 显然 $g^{-1}(x)=x$，于是

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\bigwedge_{j=1}^{n} x_j$$

(2)取 $f^0=\sum_{j=1}^{n}a_jx_j$，$\sum_{j=1}^{n}a_j=1$，$g(x)=x^p$，$p>0$. 显然 $g^{-1}(x)=x^{\frac{1}{p}}$，于是

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\left(\sum_{j=1}^{n}a_jx_j^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$ □

以下是 Fuzzy 综合评判常用的几种 Fuzzy 综合函数.

6.3.1 加权平均型

设 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in[0,1]^n$ 是归一化权向量，$\forall(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in[0,1]^n$，令

$$f_{\sum}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}a_ix_i \tag{6.3.10}$$

$f_{\sum}$ 称为加权平均型 Fuzzy 综合函数. 其中 a_i 可以解释为第 i 个因素在综合评判中所占比重. $f_{\sum}$ 除满足正则性、单增性、连续性外，还满足：

可加性：$\forall(x_1,x_2,\cdots,x_n),(x'_1,x'_2,\cdots,x'_n)\in[0,1]^n$

$$f_{\sum}(x_1+x'_1,x_2+x'_2,\cdots,x_n+x'_n)=f_{\sum}(x_1,x_2,\cdots,x_n)+f_{\sum}(x'_1,x'_2,\cdots,x'_n) \tag{6.3.11}$$

下面证明满足可加性的 Fuzzy 综合函数就是加权平均型 Fuzzy 综合函数。

引理 6.3.1 设递增函数 $\varphi:[0,1]\to[0,1]$ 满足

$$\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y),\ \forall x,y,x+y\in[0,1] \tag{6.3.12}$$

则

$$\varphi(x)=ax \tag{6.3.13}$$

其中 $a=\varphi(1)$.

证明 由数学归纳法可证 $\varphi(nx)=n\varphi(x)$，于是 $\forall m,n\in\mathbf{N},m\leqslant n$

$$\varphi\left(\frac{m}{n}\right)=m\varphi\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{m}{n}n\varphi\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{m}{n}\varphi(1)=\frac{m}{n}a$$

所以，对所有[0,1]上的有理数 r，都有 $\varphi(r)=ar$. 再用数学分析中的区间套定理，可以证得 $\forall x\in[0,1]$，有

$$\varphi(x)=ax.$$ □

定理 6.3.7 设 f 是满足可加性的 Fuzzy 综合函数，则

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}a_ix_i \tag{6.3.14}$$

且

$$\sum_{i=1}^{n}a_i=1 \tag{6.3.15}$$

证明 令

$$f_i(x_i)=f(0,\cdots,0,x_i,0,\cdots,0),\quad i=1,2,\cdots,n$$

由引理 6.3.1,得

$$f_i(x_i)=a_ix_i,\quad a_i=f(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)$$

于是

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)&=f(x_1,0,\cdots,0)+f(0,x_2,0,\cdots,0)+\cdots+f(0,\cdots,0,x_n)\\&=\sum_{i=1}^{n}f_i(x_i)=\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\end{aligned}$$

且由定义,有

$$\begin{aligned}1=f(1,1,\cdots,1)&=f(1,0,\cdots,0)+f(0,1,0,\cdots,0)+\cdots+f(0,\cdots,0,1)\\&=a_1+a_2+\cdots+a_n.\end{aligned}$$

□

6.3.2 几何平均型

设 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in[0,1]^n$ 是归一化权向量, $\forall(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in[0,1]^n$, 令

$$f_{\prod}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}x_i^{a_i}\tag{6.3.16}$$

$f_{\prod}$ 称为几何平均型 Fuzzy 综合函数,这里 a_i 是几何权数. 容易证明几何平均型 Fuzzy 综合函数具有下列性质:

性质 6.3.1 $\forall(a_1,a_2,\cdots,a_n),(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in[0,1]^n$, 有

$$f_{\prod}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}x_i^{a_i}\leqslant\sum_{i=1}^{n}a_ix_i=f_{\sum}(x_1,x_2,\cdots,x_n)\tag{6.3.17}$$

性质 6.3.2 可积性: $\forall(x_1,x_2,\cdots,x_n),(x_1',x_2',\cdots,x_n')\in[0,1]^n$,

$$f_{\prod}(x_1x_1',x_2x_2',\cdots,x_nx_n')=f_{\prod}(x_1,x_2,\cdots,x_n)f_{\prod}(x_1',x_2',\cdots,x_n').\tag{6.3.18}$$

6.3.3 单因素决定型

设 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in[0,1]^n$ 是正规化权向量, $\forall(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in[0,1]^n$, 令

$$f_{\wedge}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\bigvee_{i=1}^{n}\{a_i\wedge x_i\}\tag{6.3.19}$$

$f_{\wedge}$ 称为单因素决定型 Fuzzy 综合函数.

$f_{\wedge}$ 除满足正则性、单增性、连续性外,还满足:

择大性：$\forall (x_1,x_2,\cdots,x_n),(x'_1,x'_2,\cdots,x'_n) \in [0,1]^n$

$$f_3(x_1 \vee x'_1,x_2 \vee x'_2,\cdots,x_n \vee x'_n) = f_3(x_1,x_2,\cdots,x_n) \vee f_3(x'_1,x'_2,\cdots,x'_n) \tag{6.3.20}$$

6.3.4 主因素突出型

设 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n) \in [0,1]^n$ 是正规化权向量，$\forall (x_1,x_2,\cdots,x_n) \in [0,1]^n$，令

$$f_{\top}(x_1,x_2,\cdots,x_n) = \bigvee_{i=1}^{n} (a_i \top x_i) \tag{6.3.21}$$

$f_{\top}$称为主因素突出型 Fuzzy 综合函数．其中$\top(\neq \wedge)$是连续 t-模．

$f_{\top}$除满足正则性、单增性、连续性外，也满足：

择大性：$\forall (x_1,x_2,\cdots,x_n),(x'_1,x'_2,\cdots,x'_n) \in [0,1]^n$

$$f_{\top}(x_1 \vee x'_1,x_2 \vee x'_2,\cdots,x_n \vee x'_n) = f_{\top}(x_1,x_2,\cdots,x_n) \vee f_{\top}(x'_1,x'_2,\cdots,x'_n) \tag{6.3.22}$$

Fuzzy 综合评判一般可以归纳为以下几个步骤：

(1) 建立评判对象因素集 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$.

(2) 建立评判集 $V=\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$.

(3) 建立单因素评判，即建立一个从 U 到 $\mathscr{F}(V)$的 Fuzzy 映射.

$$\gamma: U \to \mathscr{F}(V)$$

$$u_i \mapsto \gamma(u_i) = \frac{r_{i1}}{v_1} + \frac{r_{i2}}{v_2} + \cdots + \frac{r_{im}}{v_m}$$

$$0 \leqslant r_{ij} \leqslant 1,\quad 1 \leqslant i \leqslant n,\quad 1 \leqslant j \leqslant m$$

由 γ 可以诱导出 Fuzzy 关系，得到 Fuzzy 矩阵

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1m} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nm} \end{bmatrix} \tag{6.3.23}$$

称 R 为单因素评判矩阵(evaluation matrix of single factor)，并称三元有序组(U,V,R) 为评判空间(evaluation space).

(4) 综合评判，选择合适的 Fuzzy 综合函数 f (如 $f_{\sum}, f_{\prod}, f_{\wedge}, f_{\top}$等)进行综合．用 U 上的一个 Fuzzy 集 $A=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$表示各个因素的权重分配，若取 $f=f_{\wedge}$，则综合评判为

$$B = A \circ R \in \mathscr{F}(V) \tag{6.3.24}$$

该评判模型称为 $M(\vee, \wedge)$ 模型.

若取 $f=f_T$，则综合评判为

$$B=A\circ_T R\in\mathscr{F}(V) \tag{6.3.25}$$

该评判模型称为 $M(\vee,\top)$模型，特别地，$\top=\cdot$，为 $M(\vee,\cdot)$ 模型.

关于评判矩阵，也有两种情形：

(1)归一化评判矩阵，即 $\forall i,\ \sum_{j=1}^{n} r_{ij}=1$；

(2)正规化评判矩阵，即 $\forall i,\ \bigvee_{j=1}^{n} r_{ij}=1$.

与权向量一样，归一化评判矩阵与正规化评判矩阵可以相互转化.

设 (U,V,R) 是评判空间，f 是 n 元 Fuzzy 综合函数，令

$$y_j=f(r_{1j},r_{2j},\cdots,r_{nj}),\quad j=1,2,\cdots,m \tag{6.3.26}$$

则定义 $(y_1,y_2,\cdots,y_m)$ 为综合评判(synthetic evaluation). 其中 y_j 是就整体而言，获得第 j 个评语的隶属度.

(1)若 $f=f_{\sum}$ 是加权平均型 n 元 Fuzzy 综合函数，且 $R=(r_{ij})_{n\times m}$ 是归一化评判矩阵，$A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 是给定的归一化权向量，则

$$\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i r_{ij}\right)=\sum_{j=1}^{m}a_i\left(\sum_{i=1}^{n}r_{ij}\right)=\sum_{j=1}^{m}a_i=1 \tag{6.3.27}$$

即综合评判 $(y_1,y_2,\cdots,y_m)$ 也是归一化的.

(2)若 $f=f_{\wedge}$ 或 $f_{\top}$是单因素决定型或主因素突出型 n 元 Fuzzy 综合函数，且 $R=(r_{ij})_{n\times m}$ 是正规化评判矩阵，$A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 是给定的正规化权向量，则

$$\bigvee_{j=1}^{m}\left\{\bigvee_{i=1}^{n}(a_i\top r_{ij})\right\}=\bigvee_{i=1}^{n}\left\{\bigvee_{j=1}^{m}(a_i\top r_{ij})\right\}=\bigvee_{i=1}^{n}\left\{a_i\top\left(\bigvee_{j=1}^{m}r_{ij}\right)\right\}=\bigvee_{i=1}^{n}a_i=1 \tag{6.3.28}$$

即综合评判 $(y_1,y_2,\cdots,y_m)$ 也是正规化的.

(3)若 $f=f_{\prod}$ 是几何平均型 n 元 Fuzzy 综合函数，且 $R=(r_{ij})_{n\times m}$ 是归一化评判矩阵，$A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 是给定的归一化权向量，则因

$$\sum_{j=1}^{m}\left(\prod_{i=1}^{n}r_{ij}^{a_i}\right)\leqslant\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i r_{ij}\right)=1 \tag{6.3.29}$$

故 $(y_1,y_2,\cdots,y_m)$ 未必是归一化的；若 $R=(r_{ij})_{n\times m}$ 是正规化评判矩阵，则 $\bigvee_{j=1}^{m}\left\{\prod_{i=1}^{n}r_{ij}^{a_i}\right\}=1$，当且仅当 $\exists j$，使 $\forall i,\ r_{ij}=1$，故 $(y_1,y_2,\cdots,y_m)$ 也未必是正规化的. 因此，当使用几何平均型 Fuzzy 综合函数时，对所得结果 $(y_1,y_2,\cdots,y_m)$ 都应作归一化或正规化处理，以便与使用其他方法所得结果进行比较.

(4) 当权重是归一化时,函数 $f=f_{\wedge}$ 或 $f_{\top}$ 一般不满足正则性. 但在实际应用中,归一化的权向量与归一化的单因素 Fuzzy 评价更容易被人接受,使用起来更方便. 在使用 $M(\vee,\wedge)$ 模型和 $M(\vee,\top)$ 模型前将归一化的权向量与归一化的单因素 Fuzzy 评价正规化,最后将评价结果归一化.

例 6.3.4 以服装评判为例,设

因素集 $U=\{$花色,式样,耐穿性,价格,舒适程度$\}$

评判集 $V=\{$很欢迎,比较欢迎,不太欢迎,不欢迎$\}$

对某一种服装,请若干专门人员进行单因素评判.

只考虑花色式样,若有 20%的人很欢迎,有 50%的人比较欢迎,有 30%的人不太欢迎,便可以得出

$$\text{花色}\mapsto R_1=(0.2,0.5,0.3,0)$$

类似地,假设其他因素的单因素 Fuzzy 评判为

$$R_2=(0.1,0.3,0.5,0.1)$$

$$R_3=(0,0.1,0.6,0.3)$$

$$R_4=(0,0.4,0.5,0.1)$$

$$R_5=(0.5,0.3,0.2,0)$$

所有单因素评判组成评判矩阵

$$R=\begin{bmatrix}0.2 & 0.5 & 0.3 & 0\\ 0.1 & 0.3 & 0.5 & 0.1\\ 0 & 0.1 & 0.6 & 0.3\\ 0 & 0.4 & 0.5 & 0.1\\ 0.5 & 0.3 & 0.2 & 0\end{bmatrix}$$

将 R 正规化得到

$$R^*=\begin{bmatrix}0.4 & 1.0 & 0.6 & 0\\ 0.2 & 0.6 & 1.0 & 0.2\\ 0 & 0.17 & 1.0 & 0.5\\ 0 & 0.8 & 1.0 & 0.2\\ 1.0 & 0.6 & 0.5 & 0\end{bmatrix}$$

不同的顾客,由于职业、性别、年龄、爱好、经济状况等不同,对服装的 5 个因素所给予的权重也不同. 现假设我们选定某类男顾客,所给权重为

$$A_1=(0.10,0.10,0.15,0.30,0.35)$$

将其正规化得 $A_1^*=(0.29,0.29,0.43,0.86,1.0)$

则选用 $M(\vee,\wedge)$ 模型可以求得此类顾客对这种服装的 Fuzzy 综合评判为

$$B_1^*=A_1^*\circ R^*=(1.0,0.8,0.86,0.43)$$

再归一化得

$$B_1=\left(\frac{0.35}{1.1},\frac{0.3}{1.1},\frac{0.3}{1.1},\frac{0.15}{1.1}\right)\approx(0.3236,0.2589,0.2783,0.1392)$$

即对这种服装：32.36%很欢迎；25.89%欢迎；27.83%不太欢迎；13.92%不欢迎.

若顾客为女性，此时

$$A_2=(0.3,0.35,0.10,0.10,0.15)$$

$$A_2^*=(0.86,1.0,0.29,0.29,0.43)$$

$$B_2^*=A_2^*\circ R^*=(0.43,0.86,1.0,0.29)$$

归一化得 $B_2\approx(0.1667,0.3333,0.3876,0.1124)$. □

例 6.3.5 对某教师讲课质量进行综合评定. 已知

因素集 U={教材熟练，逻辑性强，启发性强，语言生动，板书整齐}

评判集 V={优秀，良好，一般，不好}.

对某教师，请若干专家进行单因素评判，归一化和正规化评判矩阵分别为

$$R=\begin{bmatrix}0.45&0.25&0.20&0.10\\0.50&0.40&0.10&0.00\\0.30&0.40&0.20&0.10\\0.40&0.40&0.10&0.10\\0.30&0.50&0.10&0.10\end{bmatrix},\quad R^*=\begin{bmatrix}1.00&0.56&0.44&0.22\\1.00&0.80&0.20&0.00\\0.75&1.00&0.50&0.25\\1.00&1.00&0.25&0.25\\0.60&1.00&0.20&0.20\end{bmatrix}$$

设归一化权重为 $A=(0.3,0.2,0.2,0.2,0.1)$，正规化为 $A^*=(1.00,0.67,0.67,0.67,0.33)$. 用 $M(\vee,\wedge)$ 模型可以求得该教师的综合评判为

$$B^*=A^*\circ R^*=(1.00,0.67,0.50,0.25)$$

归一化为 $B=(0.4132,0.2769,0.2066,0.1033)$

按 $M(\vee,\wedge)$ 模型，其评判结果表明，对该教师的课堂教学认为"优秀"的占41.32%，"良好"的占27.69%，"一般"的占20.66%，"不好"的占10.33%.

用 $M(\vee,\cdot)$ 模型可以求得该教师的综合评判为

$$B^*=A^*\cdot R^*=(1.0,0.67,0.335,0.22)$$

归一化为 $B=(0.4500,0.3002,0.1508,0.0990)$.

从上面的评判结果看，根据最大隶属原则，结论是"优秀". □

§6.4 多层次 Fuzzy 综合评判

由于对复杂事物的评判要涉及的因素往往很多，而每个因素都要赋予一定的权数，故当因素很多时，必然存在以下问题：

(1)权重难以恰当分配. 因为分配权重主要靠人的主观判断，当因素太多时，很难判断准确.

(2)得不到有意义的评判结果. 当使用 $M(\vee,\wedge)$ 或 $M(\vee,\top)$ 模型时，容易错误使用归一化权向量或归一化单因素 Fuzzy 评价矩阵. 因为当因素很多时，归一化的权重必然很小，这样难以真实地反映各因素在整体中的地位. "$\vee,\wedge$"便会"泯没"大量单因素评判的信息，使综合评判得不出任何有意义的结果.

我们来分析一个例子.

例 6.4.1 评判一批产品的质量，有 9 项基本因素，即 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_9\}$；评判集为 $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$，其中 v_1=一等品，v_2=二等品，v_3=次品，v_4=废品. 评判小组由专家、检验员和用户三类人员组成，他们分别负责三项指标(因素)的评判，比如专家负责 $U_1=\{u_1,u_2,u_3\}$，检验员负责 $U_2=\{u_4,u_5,u_6\}$，用户负责 $U_3=\{u_7,u_8,u_9\}$. 分别得出单因素评判矩阵

$$R_1=\begin{bmatrix}0.36 & 0.24 & 0.13 & 0.27\\ 0.20 & 0.32 & 0.25 & 0.23\\ 0.40 & 0.22 & 0.26 & 0.12\end{bmatrix}$$

$$R_2=\begin{bmatrix}0.30 & 0.28 & 0.24 & 0.18\\ 0.26 & 0.36 & 0.12 & 0.20\\ 0.22 & 0.42 & 0.16 & 0.10\end{bmatrix}$$

$$R_3=\begin{bmatrix}0.38 & 0.24 & 0.08 & 0.20\\ 0.24 & 0.25 & 0.30 & 0.11\\ 0.24 & 0.28 & 0.30 & 0.18\end{bmatrix}$$

将它们合起来，便得到总的单因素评判矩阵

$$R=\begin{bmatrix}R_1\\ R_2\\ R_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.36 & 0.24 & 0.13 & 0.27\\ 0.20 & 0.32 & 0.25 & 0.23\\ 0.40 & 0.22 & 0.26 & 0.12\\ 0.30 & 0.28 & 0.24 & 0.18\\ 0.26 & 0.36 & 0.12 & 0.20\\ 0.22 & 0.42 & 0.16 & 0.10\\ 0.38 & 0.24 & 0.08 & 0.20\\ 0.34 & 0.25 & 0.30 & 0.11\\ 0.24 & 0.28 & 0.38 & 0.18\end{bmatrix}$$

假设确定出权重分配为

$$W=(0.10,0.12,0.07,0.07,0.16,0.10,0.10,0.10,0.18)$$

这很难保证权重分配的合理性.

如果直接使用 $M(\vee,\wedge)$ 模型,Fuzzy 综合评判为

$$B=(0.18,0.18,0.18,0.18)$$

我们看一看 b_1 是怎样得到的.

$$\begin{aligned} b_1 &= (w_1 \wedge r_{11}) \vee (w_2 \wedge r_{21}) \vee \cdots \vee (w_9 \wedge r_{91}) \\ &= (0.10 \wedge 0.36) \vee (0.12 \wedge 0.20) \vee (0.07 \wedge 0.40) \vee \cdots \vee (0.18 \wedge 0.24) \\ &= 0.10 \vee 0.12 \vee 0.07 \vee 0.07 \vee 0.16 \vee 0.10 \vee 0.10 \vee 0.10 \vee 0.18 = 0.18 \end{aligned}$$

不难看出,R 中的第一列元素在“取小”时全部被筛选掉了,其原因在于每个 w_j 都很小. □

这时需采取多层次(或多级)评判来解决这类问题.

多层次综合评判的步骤:

1. 因素分类

将因素集 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$ 按某种属性分为 s 类,即

$$U_i=\{u_{i1},u_{i2},\cdots,u_{in_i}\},\quad i=1,2,\cdots,s \tag{6.4.1}$$

它们满足条件:

(1) $n_1+n_2+\cdots+n_s=n$;

(2) $U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_s=U$;

(3) $(\forall i,j)(i\neq j \Rightarrow U_i \cap U_j=\varnothing)$.

2. 建立评判集

$$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_p\} \tag{6.4.2}$$

3. 建立权重集

(1)因素类权重集

设第 i 类因素 U_i 的权数为 a_i $(i=1,2,\cdots,s)$,则因素类权重集为

$$A=(a_1,a_2,\cdots,a_s) \tag{6.4.3}$$

(2)因素权重集

设第 i 类中的第 j 个因素 u_{ij} 的权数为 a_{ij},则因素权重集为

$$A_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in_i}),\quad i=1,2,\cdots,s \tag{6.4.4}$$

4. 一级综合评判

对每一类的各个因素进行综合评判. 设一级 Fuzzy 综合评判的单因素评判矩阵为

$$R_i=\begin{bmatrix} r_{11}^{(i)} & r_{12}^{(i)} & \cdots & r_{1p}^{(i)} \\ r_{21}^{(i)} & r_{22}^{(i)} & \cdots & r_{2p}^{(i)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{n_i1}^{(i)} & r_{n_i2}^{(i)} & \cdots & r_{n_ip}^{(i)} \end{bmatrix}$$

第 i 类因素的 Fuzzy 综合评判为

$$B_i = A_i \circ_T R_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in_i}) \circ_T \begin{bmatrix} r_{11}^{(i)} & r_{12}^{(i)} & \cdots & r_{1p}^{(i)} \\ r_{21}^{(i)} & r_{22}^{(i)} & \cdots & r_{2p}^{(i)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{n_i1}^{(i)} & r_{n_i2}^{(i)} & \cdots & r_{n_ip}^{(i)} \end{bmatrix} = (b_{i1}, b_{i2}, \cdots, b_{ip})$$

5. 二级综合评判

二级 Fuzzy 综合评判的单因素评判矩阵，应为一级 Fuzzy 综合评判矩阵

$$R = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \circ_T R_1 \\ A_2 \circ_T R_2 \\ \vdots \\ A_s \circ_T R_s \end{bmatrix}$$

于是二级 Fuzzy 综合评判为(如图 6.4.1 所示)

$$B = A \circ_T R = A \circ_T \begin{bmatrix} A_1 \circ_T R_1 \\ A_2 \circ_T R_2 \\ \vdots \\ A_s \circ_T R_s \end{bmatrix} = (b_1, b_2, \cdots, b_p)$$

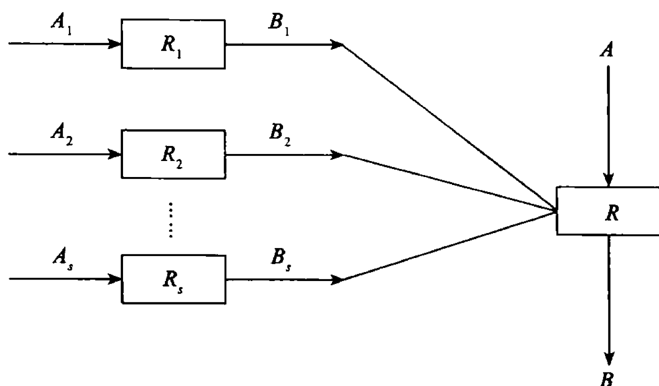


图 6.4.1

如果有的子因素集 U_i 仍含有较多的因素，可以将 U_i 再划分，于是有三级模型，自然有更多级模型.

例 6.4.2 现在我们用二级模型解决例 6.4.1 中的问题.

假定按某种属性，将 U 分为三类因素集

$$U_1=\{u_1,u_2,u_3\},\quad U_2=\{u_4,u_5,u_6\},\quad U_3=\{u_7,u_8,u_9\}$$

它们所对应的单因素评判矩阵为：R_1，R_2，R_3（见例 6.4.1）．正规化为

$$R_1^*=\begin{bmatrix}1.00 & 0.67 & 0.36 & 0.75\\ 0.63 & 1.00 & 0.78 & 0.72\\ 1.00 & 0.55 & 0.65 & 0.30\end{bmatrix}$$

$$R_2^*=\begin{bmatrix}1.00 & 0.93 & 0.80 & 0.60\\ 0.72 & 1.00 & 0.33 & 0.63\\ 0.52 & 1.00 & 0.38 & 0.24\end{bmatrix}$$

$$R_3^*=\begin{bmatrix}1.00 & 0.63 & 0.21 & 0.53\\ 0.80 & 0.83 & 1.00 & 0.37\\ 0.80 & 0.93 & 1.00 & 0.60\end{bmatrix}$$

U_1,U_2,U_3 各自的权重分配为

$$A_1=(0.30,0.42,0.28)$$

$$A_2=(0.20,0.50,0.30)$$

$$A_3=(0.30,0.30,0.40)$$

正规化为

$$A_1^*=(0.71,1.00,0.67)$$

$$A_2^*=(0.40,1.00,0.60)$$

$$A_3^*=(0.75,0.75,1.00)$$

于是，使用 $M(\vee,\wedge)$ 模型容易算得一级综合评判

$$B_1^*=A_1^*\circ R_1^*=(0.71,1.00,0.78,0.72)$$

$$B_2^*=A_2^*\circ R_2^*=(0.72,1.00,0.40,0.63)$$

$$B_3^*=A_3^*\circ R_3^*=(0.80,0.93,1.00,0.60)$$

由此得到二级单因素评判矩阵

$$R^*=\begin{bmatrix}B_1^*\\ B_2^*\\ B_3^*\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.71 & 1.00 & 0.78 & 0.72\\ 0.72 & 1.00 & 0.40 & 0.63\\ 0.80 & 0.93 & 1.00 & 0.60\end{bmatrix}$$

再设 U_1,U_2,U_3 的权重分配为

$$A=(0.20,0.35,0.45)$$

正规化为

$$A^*=(0.44,0.78,1.00)$$

于是又有二级评判向量

$$B^*=A^*\circ R^*=(0.80,0.93,1.00,0.63)$$

按最大隶属原则得知这批产品为三等品. □

§6.5 基于 Fuzzy 数的 Fuzzy 综合评判

现在考虑权重与评判结果为 Fuzzy 数的 Fuzzy 综合评判模型.

设 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$, $V=[a,b]$, 且对任意单因素评判时给出的评判结果为 $R_i\in\mathscr{F}(V)$, 又设 u_i 在综合评判中所占有的权重为 $A_i\in\widetilde{[0,1]}$ (Fuzzy 值, 见定义 2.8.5), 而且以后还认为: 当 $v\in\mathbf{R}\backslash V$ 时, 已补充定义 $R_i(v)=0$, 当 $w\in\mathbf{R}\backslash[0,1]$ 时, 已补充定义 $A_i(w)=0$; 并总假设 $A_i,R_i\in\widetilde{\mathbf{R}}$, $i=1,2,\cdots,n$. 因 A_i, $R_i\in\widetilde{\mathbf{R}}$, 则由定理 2.6.10 知 $A_iR_i\in\widetilde{\mathbf{R}}$, 记

$$A_1R_1+A_2R_2+\cdots+A_nR_n=\sum_{i=1}^n A_iR_i$$

$$A_1+A_2+\cdots+A_n=\sum_{i=1}^n A_i$$

则 $\sum\limits_{i=1}^n A_iR_i,\sum\limits_{i=1}^n A_i\in\widetilde{\mathbf{R}}$, 设 $0\overline{\in}\operatorname{supp}\left(\sum\limits_{i=1}^n A_i\right)$, 令

$$C=\sum_{i=1}^n A_iR_i\div\sum_{i=1}^n A_i$$

则 $C\in\widetilde{\mathbf{R}}$, 并将 C 定义为 Fuzzy 综合评判. 设 $(v_1,v_2,\cdots,v_n)\in V^n$, $W=(w_1,w_2,\cdots,w_n)\in[0,1]^n$, 并且 $W\neq0$, 即 $\exists i\in\{1,2,\cdots,m\}$, 使 $w_i\neq0$, 记

$$g_W(v_1,v_2,\cdots,v_n)=\frac{\sum\limits_{i=1}^n w_iv_i}{\sum\limits_{i=1}^n w_i}=\bar{v} \tag{6.5.1}$$

则由扩展原理 II, 应有

$$C(v)=\bigvee_{g_W(v_1,v_2,\cdots,v_n)=v}\left[\left(\bigwedge_{i=1}^n A_i(w_i)\right)\wedge\left(\bigwedge_{i=1}^n R_i(v_i)\right)\right],\ \forall v\in V \tag{6.5.2}$$

依据式(6.5.2)可以寻求一种计算 $C(v)$ 的方法. 为此, 先给出如下结果.

引理 6.5.1 $g_W(v_1,v_2,\cdots,v_n)$ 具有如下性质:

(1) 当 $w_k\neq0$ 时, $g_W(v_1,v_2,\cdots,v_n)$ 关于 v_k 是严格单调增的.

(2) $g_W(v_1,v_2,\cdots,v_n)$ 关于 w_l 当 $v_l>\bar{v}$ 时是严格单调增的; 当 $v_l<\bar{v}$ 时是严格单调减的; 当 $v_l=\bar{v}$ 时 $\bar{v}$ 与 w_l 无关.

证明　(1)当 $(v_1,v_2,\cdots,v_n)$ 中仅有 v_k 取增量 Δv_k 时，$g_W(v_1,v_2,\cdots,v_n)$ 取增量

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} w_i v_i + w_k \Delta v_k - \sum_{i=1}^{n} w_i v_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i} = \frac{w_k \Delta v_k}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$$

即当 $w_k \neq 0$ 时，$g_W(v_1,v_2,\cdots,v_n)$ 关于 v_k 是严格单调增的.

(2)当 $(w_1,w_2,\cdots,w_n)$ 中仅有 w_l 取增量 Δw_l 时，$g_W(v_1,v_2,\cdots,v_n)$ 取增量

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} w_i v_i + \Delta w_l v_l}{\sum_{i=1}^{n} w_i + \Delta w_l} - \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i v_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i} = \frac{(v_l - \bar{v})\Delta w_l}{\sum_{i=1}^{n} w_i + \Delta w_l}$$

即对确定的 l，$g_W(v_1,v_2,\cdots,v_n)$ 关于 w_l 当 $v_l > \bar{v}$ 时是严格单增的；当 $v_l < \bar{v}$ 时是严格单调减的；当 $v_l = \bar{v}$ 时，由 $\bar{v} = \left(\sum_{i \neq l}^{n} w_i v_i + w_l \bar{v}\right) \Big/ \sum_{i=1}^{n} w_i$ 求出 $\bar{v}$ 得 $\bar{v} = \sum_{i \neq l}^{n} w_i v_i \Big/ \sum_{i \neq l}^{n} w_i$，即 $\bar{v}$ 与 w_l 无关. □

定理 6.5.1　设 $A_i, R_i \in \widetilde{\mathbf{R}}$，且 $0 \overline{\in} \mathrm{supp}(A_i)$，$C = \sum_{i=1}^{n} A_i R_i \div \sum_{i=1}^{n} A_i$，$\alpha \in (0,1]$，记

$$C_\alpha = [C_\alpha^{(1)}, C_\alpha^{(2)}],\ (A_i)_\alpha = [a_{i\alpha}^{(1)}, a_{i\alpha}^{(2)}],\ (R_i)_\alpha = [r_{i\alpha}^{(1)}, r_{i\alpha}^{(2)}],\ i = 1,2,\cdots,n$$

则

(1)
$$C_\alpha^{(1)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_{i\alpha}^{(i_k)} r_{i\alpha}^{(1)}}{\sum_{i=1}^{n} a_{i\alpha}^{(i_k)}} \tag{6.5.3}$$

且当 $r_{i\alpha}^{(1)} \geqslant C_\alpha^{(1)}$ 时，$i_k = 1$，当 $r_{i\alpha}^{(1)} < C_\alpha^{(1)}$ 时，$i_k = 2$. 又若有 i，使 $R_i(r_{i\alpha}^{(1)}) = \alpha$ 或 $A_i(a_{i\alpha}^{(i_k)}) = \alpha$，则 $C(C_\alpha^{(1)}) = \alpha$.

(2)
$$C_\alpha^{(2)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_{i\alpha}^{(i_l)} r_{i\alpha}^{(2)}}{\sum_{i=1}^{n} a_{i\alpha}^{(i_l)}} \tag{6.5.4}$$

且当 $r_{i\alpha}^{(2)} \geqslant C_\alpha^{(2)}$ 时，$i_l = 2$，当 $r_{i\alpha}^{(2)} < C_\alpha^{(2)}$ 时，$i_l = 1$. 又若有 i，使 $R_i(r_{i\alpha}^{(2)}) = \alpha$ 或 $A_i(a_{i\alpha}^{(i_l)}) = \alpha$，则 $C(C_\alpha^{(2)}) = \alpha$.

证明 由定理 2.5.2 和定理 2.6.9 及 $0 \in \operatorname{supp}(A_i)$ $(i=1,2,\cdots,n)$的假设立即可以推知

$$C_\alpha^{(1)} = \min\left\{ \frac{\sum_{i=1}^{n} a_{i\alpha}^{(i_k)} r_{i\alpha}^{(i_j)}}{\sum_{i=1}^{n} a_{i\alpha}^{(i_k)}} \middle| i_k, i_j = 1,2 \right\} \tag{6.5.5}$$

$$C_\alpha^{(2)} = \max\left\{ \frac{\sum_{i=1}^{n} a_{i\alpha}^{(i_l)} r_{i\alpha}^{(i_s)}}{\sum_{i=1}^{n} a_{i\alpha}^{(i_l)}} \middle| i_l, i_s = 1,2 \right\} \tag{6.5.6}$$

因为式(6.5.5)的最小值是可以达到的,可以设

$$C_\alpha^{(1)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_{i\alpha}^{(i_t)} r_{i\alpha}^{(i_r)}}{\sum_{i=1}^{n} a_{i\alpha}^{(i_t)}} \tag{6.5.7}$$

则 $i_r \equiv 1$. 若不然,在式(6.5.7)中有某个 i,使 $i_r=2$. 即分子的和式中出现 $r_{i\alpha}^{(2)}$,且 $r_{i\alpha}^{(2)} > r_{i\alpha}^{(1)}$,则以 $r_{i\alpha}^{(1)}$ 代替 $r_{i\alpha}^{(2)}$,必使 $C_\alpha^{(1)}$ 的值减小,这与式(6.5.5)不符. 又由引理 6.5.1(2)易知,当 $r_{i\alpha}^{(1)} > C_\alpha^{(1)}$ 时,应取 $i_t=1$; 当 $r_{i\alpha}^{(1)} < C_\alpha^{(1)}$ 时,应取 $i_t=2$; 当 $r_{i\alpha}^{(1)} = C_\alpha^{(1)}$ 时,因 $C_\alpha^{(1)}$ 与 $a_{i\alpha}^{(i_t)}$ 的取值无关,可以约定取 $i_t=1$. 又因对于任意 s, 总有 $A_s(a_{s\alpha}^{(i_l)}) \geqslant \alpha$, $R_s(r_{s\alpha}^{(s_k)}) \geqslant \alpha$, $(s=1,2,\cdots,n)$. 故若 i, 使 $R_i(r_{i\alpha}^{(1)})=\alpha$ 或 $A_i(a_{i\alpha}^{(i_k)})=\alpha$, 则 $C(C_\alpha^{(1)})=\alpha$. 这就证明了定理中的结论(1),类似地可以证明(2). □

虽然式(6.5.5)与式(6.5.6)给出了 $C_\alpha^{(1)}$ 与 $C_\alpha^{(2)}$ 的计算方法,但因需要在 2^n 个数中寻找最小值和最大值,当 n 很大时,常常是很难做到的. 根据定理 6.5.1,给出 $C_\alpha^{(1)}$ 的有效算法如下(对 $C_\alpha^{(2)}$ 算法是类似的).

设 $A_i, R_i \in \widetilde{\mathbf{R}}$, 且 $\operatorname{supp}A_i \subseteq (0,1]$, $\operatorname{supp}R_i \subseteq V=[a,b]$, $\alpha \in (0,1]$, 记 $(A_i)_\alpha = [a_{i\alpha}^{(1)}, a_{i\alpha}^{(2)}]$, $(R_i)_\alpha = [r_{i\alpha}^{(1)}, r_{i\alpha}^{(2)}]$, $i=1,2,\cdots,n$, 且有 i 使 $R_i(r_{i\alpha}^{(1)})=\alpha$, 不妨假设 $r_{1\alpha}^{(1)} \leqslant r_{2\alpha}^{(1)} \leqslant \cdots \leqslant r_{n\alpha}^{(1)}$, 否则,改变原有的编号.

(1)设 $r_{1\alpha}^{(1)} = r_{n\alpha}^{(1)}$, 则对于任意 $W=(w_1, w_2, \cdots, w_n)$, 都有

$$\frac{\sum_{l=1}^{n} w_l r_{l\alpha}^{(1)}}{\sum_{l=1}^{n} w_l} = r_{i\alpha}^{(1)}, \quad i=1,2,\cdots,n \tag{6.5.8}$$

则 $g_W(r_{1\alpha}^{(1)}, r_{2\alpha}^{(1)}, \cdots, r_{n\alpha}^{(1)})$ 的值与 W 的选取无关. 可以按约定取 $w_i = a_{i\alpha}^{(1)}$, $i=1$,

$2,\cdots,n$，转向(6).

(2)设 $r_{1\alpha}^{(1)} < r_{n\alpha}^{(1)}$，则对于任意 $W=(w_1,w_2,\cdots,w_n)$，都有

$$r_{1\alpha}^{(1)} < \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i r_{i\alpha}^{(1)}}{\sum_{i=1}^{n} w_i} < r_{n\alpha}^{(1)} \tag{6.5.9}$$

由定理 6.5.1(1)，应取 $w_1=a_{1\alpha}^{(2)}$，$w_n=a_{n\alpha}^{(1)}$.

现设已取定，$w_1=a_{1\alpha}^{(2)},\cdots,w_k=a_{k\alpha}^{(2)}$；$w_{n-l}=a_{n-l,\alpha}^{(1)},\cdots,w_n=a_{n\alpha}^{(1)}$，其中 $k,l\geqslant 1$，$k<n-l$.

(3)设以下两个不等式至少有一个成立.

$$r_{k+1,\alpha}^{(1)}\left(\sum_{i=1}^{k} a_{i\alpha}^{(2)}+\sum_{j=n-l}^{n} a_{j\alpha}^{(1)}\right) < \sum_{i=1}^{k} a_{i\alpha}^{(2)} r_{i\alpha}^{(1)}+\sum_{j=n-l}^{n} a_{j\alpha}^{(1)} r_{j\alpha}^{(1)} \tag{6.5.10}$$

$$\sum_{i=1}^{k} a_{i\alpha}^{(2)} r_{i\alpha}^{(1)}+\sum_{j=n-l}^{n} a_{j\alpha}^{(1)} r_{j\alpha}^{(1)} \leqslant r_{n-l-1,\alpha}^{(1)}\left(\sum_{i=1}^{k} a_{i\alpha}^{(2)}+\sum_{j=n-l}^{n} a_{j\alpha}^{(1)}\right) \tag{6.5.11}$$

则对应地，对于任意 $w_{k+1},\cdots,w_{n-l-1}$，以下两个不等式也至少有一个成立.

$$r_{k+1,\alpha}^{(1)} < \frac{\sum_{i=1}^{k} a_{i\alpha}^{(2)} r_{i\alpha}^{(1)}+\sum_{j=n-l}^{n} a_{j\alpha}^{(1)} r_{j\alpha}^{(1)}+\sum_{t=k+1}^{n-l-1} w_t r_{t\alpha}^{(1)}}{\sum_{i=1}^{k} a_{i\alpha}^{(2)}+\sum_{j=n-l}^{n} a_{j\alpha}^{(1)}+\sum_{t=k+1}^{n-l-1} w_t} \tag{6.5.12}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{k} a_{i\alpha}^{(2)} r_{i\alpha}^{(1)}+\sum_{j=n-l}^{n} a_{j\alpha}^{(1)} r_{j\alpha}^{(1)}+\sum_{t=k+1}^{n-l-1} w_t r_{t\alpha}^{(1)}}{\sum_{i=1}^{k} a_{i\alpha}^{(2)}+\sum_{j=n-l}^{n} a_{j\alpha}^{(1)}+\sum_{t=k+1}^{n-l-1} w_t} \leqslant r_{n-l-1,\alpha}^{(1)} \tag{6.5.13}$$

由定理 6.5.1(1)，当前一不等式成立时，取 $w_{k+1}=a_{k+1,\alpha}^{(2)}$；而当后一不等式成立时，则 $w_{n-l-1}=a_{n-l-1,\alpha}^{(1)}$.

(4)设

$$\sum_{i=1}^{k} a_{i\alpha}^{(2)} r_{i\alpha}^{(1)}+\sum_{j=n-l}^{n} a_{j\alpha}^{(1)} r_{j\alpha}^{(1)} \leqslant r_{k+1,\alpha}^{(1)}\left(\sum_{i=1}^{k} a_{i\alpha}^{(2)}+\sum_{j=n-l}^{n} a_{j\alpha}^{(1)}\right) \tag{6.5.14}$$

因为对任意 $s>k$，都有 $r_{k+1,\alpha}^{(1)}\leqslant r_{s\alpha}^{(1)}$，故

$$\sum_{i=1}^{k} a_{i\alpha}^{(2)} r_{i\alpha}^{(1)}+\sum_{j=n-l}^{n} a_{j\alpha}^{(1)} r_{j\alpha}^{(1)} \leqslant r_{s\alpha}^{(1)}\left(\sum_{i=1}^{k} a_{i\alpha}^{(2)}+\sum_{j=n-l}^{n} a_{j\alpha}^{(1)}\right) \tag{6.5.15}$$

从而对于任意 $w_{k+1},\cdots,w_{n-l-1}$，都有

$$\frac{\sum_{i=1}^{k}a_{i\alpha}^{(2)}r_{i\alpha}^{(1)}+\sum_{j=n-l}^{n}a_{j\alpha}^{(1)}r_{j\alpha}^{(1)}+\sum_{t=k+1}^{n-l-1}w_t r_{t\alpha}^{(1)}}{\sum_{i=1}^{k}a_{i\alpha}^{(2)}+\sum_{j=n-l}^{n}a_{j\alpha}^{(1)}+\sum_{t=k+1}^{n-l-1}w_t}\leqslant r_{s\alpha}^{(1)} \tag{6.5.16}$$

由定理 6.5.1(1)应取 $w_s=a_{s\alpha}^{(1)}$, $s=k+1,\cdots,n-l-1$, 转向(6)

(5)设对于任意 $l(1\leqslant l\leqslant n)$

$$r_{n-l-1,\alpha}^{(1)}\left(\sum_{i=1}^{k}a_{i\alpha}^{(2)}+\sum_{j=n-l}^{n}a_{j\alpha}^{(1)}\right)<\sum_{i=1}^{k}a_{i\alpha}^{(2)}r_{i\alpha}^{(1)}+\sum_{j=n-l}^{n}a_{j\alpha}^{(1)}r_{j\alpha}^{(1)} \tag{6.5.17}$$

也因为对于任意 $p<n-l$, 都有 $r_{p\alpha}^{(1)}\leqslant r_{n-l-1,\alpha}^{(1)}$, 故

$$r_{p\alpha}^{(1)}\left(\sum_{i=1}^{k}a_{i\alpha}^{(2)}+\sum_{j=n-l}^{n}a_{j\alpha}^{(1)}\right)<\sum_{i=1}^{k}a_{i\alpha}^{(2)}r_{i\alpha}^{(1)}+\sum_{j=n-l}^{n}a_{j\alpha}^{(1)}r_{j\alpha}^{(1)},\ p=k+1,\cdots,n-l-1 \tag{6.5.18}$$

从而对于任意 $w_{k+1},\cdots,w_{n-l-1}$ 都有

$$r_{p\alpha}^{(1)}<\frac{\sum_{i=1}^{k}a_{i\alpha}^{(2)}r_{i\alpha}^{(1)}+\sum_{j=n-l}^{n}a_{j\alpha}^{(1)}r_{j\alpha}^{(1)}+\sum_{t=k+1}^{n-l-1}w_t r_{t\alpha}^{(1)}}{\sum_{i=1}^{k}a_{i\alpha}^{(2)}+\sum_{j=n-l}^{n}a_{j\alpha}^{(1)}+\sum_{t=k+1}^{n-l-1}w_t},\quad p=k+1,\cdots,n-l-1 \tag{6.5.19}$$

由定理 6.5.1(1)应取 $w_p=a_{p\alpha}^{(2)}$, $p=k+1,\cdots,n-l-1$, 转向(6)

(6)在 $w_1,w_2,\cdots,w_n$ 均已取定时,即可得

$$C_\alpha^{(1)}=\frac{\sum_{i=1}^{n}a_{i\alpha}^{(i_k)}r_{i\alpha}^{(1)}}{\sum_{i=1}^{n}a_{i\alpha}^{(i_k)}} \tag{6.5.20}$$

且当 $r_{i\alpha}^{(1)}\geqslant C_\alpha^{(1)}$ 时, $i_k=1$, 当 $r_{i\alpha}^{(1)}<C_\alpha^{(1)}$ 时, $i_k=2$. 又因有 i, 使 $R_i(r_{i\alpha}^{(1)})=\alpha$, 则由式(6.5.2)知 $C(C_\alpha^{(1)})=\alpha$.

此外,当 $\alpha=0$ 时,只需取定

$$[a_{i0}^{(1)},a_{i0}^{(2)}]=\overline{\mathrm{supp}A_i},\quad [r_{i0}^{(1)},r_{i0}^{(2)}]=\overline{\mathrm{supp}R_i} \tag{6.5.21}$$

(这里 $\overline{\mathrm{supp}A_i}$, $\overline{\mathrm{supp}R_i}$ 分别表示 A_i, R_i 支集的闭包)上述算法仍然是正确的.

例 6.5.1 若需就“抗压强度”、“纵波速度”、“节理状态”、“地下水”和“地应力”等 5 个因素对岩体进行综合评判. 采用计分的方法,对某具体岩体,经实地试验、测量,对上述 5 个因素进行单因素评价,获得如图 6.5.1 所示的 5 个[0,100]上的 Fuzzy 集. 经专家评论,认为各因素在评判中所占权重可以用图6.5.2中的 5 个[0,1]上的 Fuzzy 集表示.

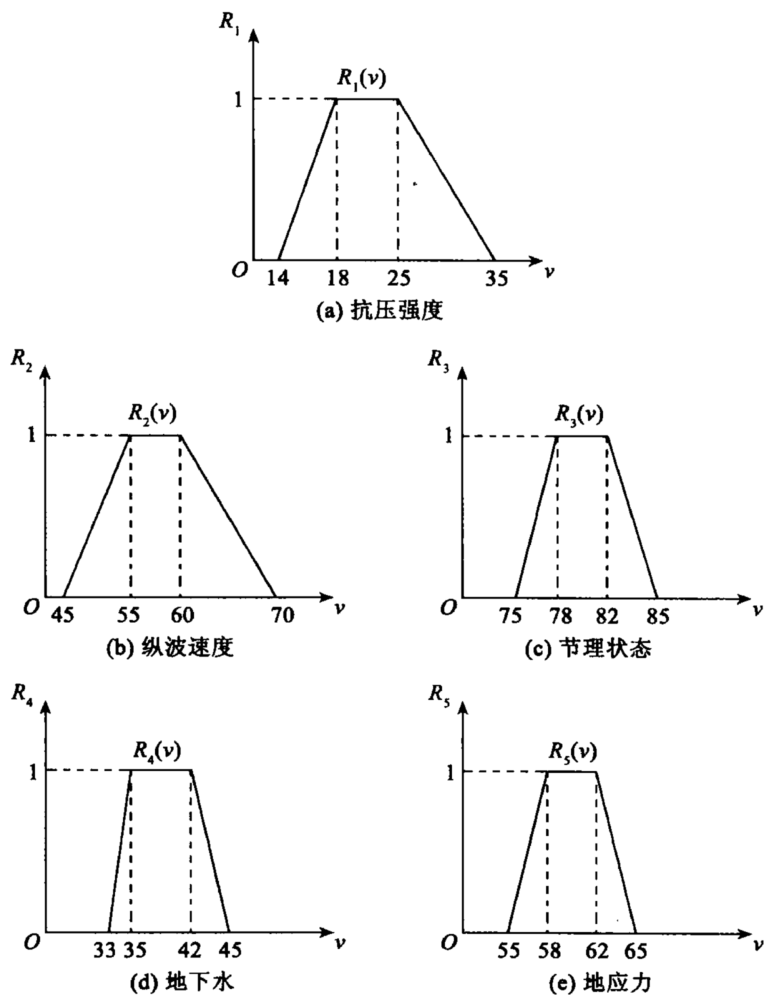


图 6.5.1

先取定 $\alpha=0.5$，得

$$(R_1)_{0.5}=[16,30],\ (R_2)_{0.5}=[50,65],\ (R_3)_{0.5}=[76.5,83.5]$$

$$(R_4)_{0.5}=[34,43.5],\ (R_5)_{0.5}=[56.5,63.5]$$

$$(A_1)_{0.5}=[0.19,0.235],\ (A_2)_{0.5}=[0.145,0.18],\ (A_3)_{0.5}=[0.21,0.275]$$

$$(A_4)_{0.5}=[0.22,0.28],\ (A_5)_{0.5}=[0.11,0.145]$$

因为 $r_{1,0.5}^{(1)}=16<r_{4,0.5}^{(1)}=34<r_{2,0.5}^{(1)}=50<r_{5,0.5}^{(1)}=56.5<r_{3,0.5}^{(1)}=76.5$，故应取 $w_1=a_{1,0.5}^{(2)}=0.235$，$w_3=a_{3,0.5}^{(1)}=0.21$；又因

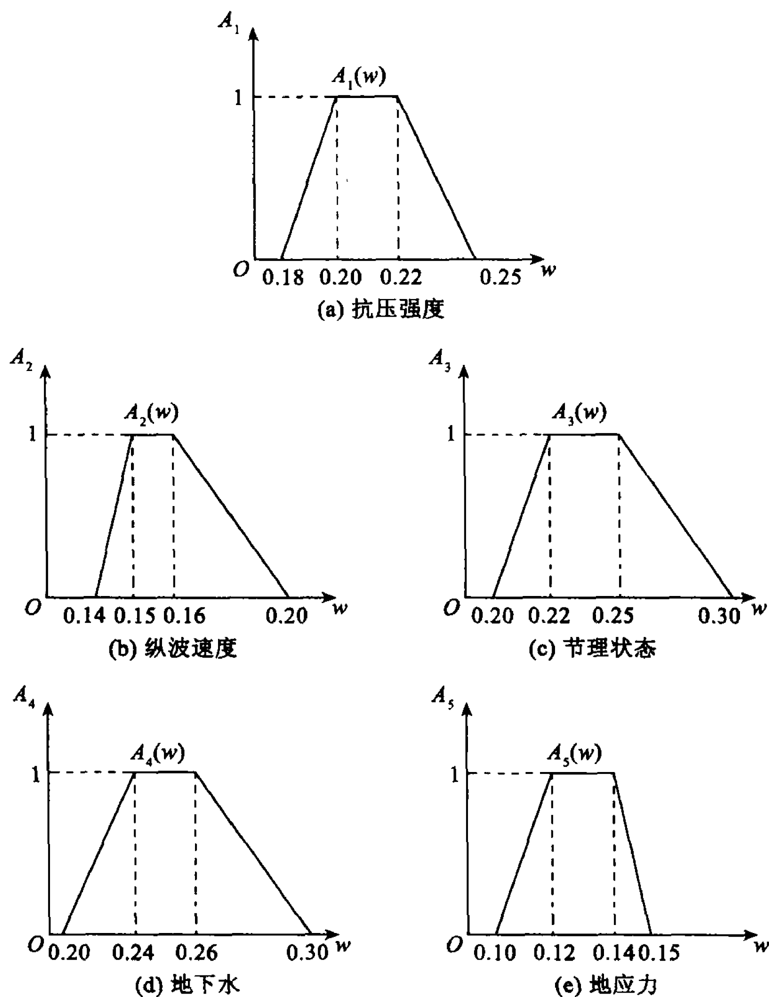


图 6.5.2

$$(0.235+0.21)\times 34\approx 15.1<0.235\times 16+0.21\times 76.5\approx 19.8$$
$$<(0.235+0.21)\times 56.5\approx 25.1$$

故应取 $w_4=a_{4,0.5}^{(2)}=0.28$，$w_5=a_{5,0.5}^{(1)}=0.11$；最后由

$$(0.235+0.28+0.11+0.21)\times 50=41.8$$
$$>0.235\times 16+0.28\times 34+0.11\times 56.5+0.21\times 76.5=35.6$$

应取 $w_2=a_{2,0.5}^{(1)}=0.145$. 从而得

$$C_{0.5}^{(1)}=\frac{0.235\times 16+0.145\times 50+0.21\times 76.5+0.28\times 34+0.11\times 56.5}{0.235+0.145+0.21+0.28+0.11}$$

≈ 43.68

类似地讨论，可得

$$C_{0.5}^{(2)}=\frac{0.19\times 30+0.18\times 65+0.275\times 83.5+0.22\times 43.5+0.145\times 63.5}{0.19+0.18+0.275+0.22+0.145}$$

≈ 58.55

用同样的方法，对分别 $\alpha=0,0.25,0.75,1$ 进行计算，计算结果列入表 6.5.1.

表 6.5.1

α	$C_\alpha^{(1)}$	$C_\alpha^{(2)}$
0	40.61	62.67
0.25	42.14	60.62
0.5	43.68	58.55
0.75	45.25	56.48
1	46.84	54.40

由以上所得计算结果，近似地描绘出 Fuzzy 综合评判 C 的隶属函数 $C(v)$ 的图形如图 6.5.3 所示，且从图 6.5.3 中可以看出，在[40.61,46.84]和[54.40,62.67]上，$C(v)$ 近似于直线. 这个结果说明该岩体的总评分介于 47 分到 54 分之间，且最低不低于 40 分，最高不高于 62 分.

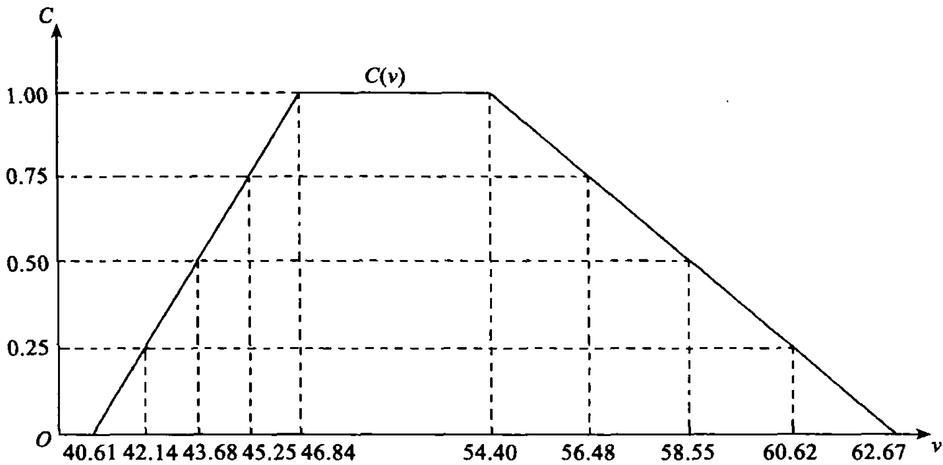


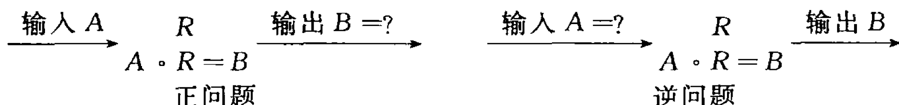
图 6.5.3

复杂的计算过程和较大的计算量可以交给计算机完成. □

Fuzzy 综合评价模型、群组决策 Fuzzy 模型(fuzzy model of group decision)、Yager 加权目标方法(Yager's weighted goals method)和 Fuzzy 层次分析(fuzzy analytic hierarchy process)都属于 Fuzzy 多属性群组决策理论(fuzzy multi-attribute group decision-making approaches),这些理论之间有着密切关系,可以查阅相关文献(Blin, 1974; Bozdag, Kahraman, et al., 2003; Chuu, 2009; Kahraman, Ruan, et al., 2003; Laarhoven, Pedrycz, 1983; Wang, Chin, 2008; Wang, Elhag, et al., 2006; Yager, 1978; Zimmermann, 2001). 关于 Fuzzy 决策问题我们将在第 14 章中讨论. 由于 Fuzzy 综合评价方法具有计算简单、容易建模等特点,在各个领域都能找到其应用(Chang, Chen, et al., 2001; Chen, Yang, et al., 2002; Lu, Lo, 2002; Lu, Lo, et al., 1999; Sun, Ge, et al., 2001; Wu, Wang et al., 1996).

第 7 章 Fuzzy 关系方程与 Fuzzy 矩阵广义逆

在 Fuzzy 综合评判中，由于权重分配 A 的确定并无通用公式，所以 A 的确定的正确与否往往只能取决于专家的判断或经验，而这些又是很难用数学公式表达出来的. 由 R 和 B 反过来求 A，有利于总结专家的经验，使 A 的确定得到量化. 从这个角度来看，综合评判的逆问题比其正问题更有意义.



这样 Fuzzy 关系方程的求解就显得很重要. Fuzzy 关系方程理论由 Sanchez (1976) 提出，后来许多研究者从不同角度进行了推广和完善. 下面对各种形式的 Fuzzy 关系方程进行全面的讨论. 本章首先讨论(区间值、格值)Fuzzy 关系方程的概念及其解的性质；然后详细介绍最大—最小型 Fuzzy 关系方程的各种求解方法——Tsukamoto 方法、Fuzzy 矩阵变换法、有效路径法、保守路径法与三角分解法等；介绍最大—乘积型 Fuzzy 关系方程的求解、应用于格化线性规划的 Fuzzy 关系不等式的求解以及与 Fuzzy 聚类分析中 Fuzzy 相似关系相关的变次 Fuzzy 相似关系方程的求解方法；最后讨论与 Fuzzy 关系方程紧密相关的 Fuzzy 矩阵的各类广义逆——最大—最小型广义 Fuzzy 逆矩阵、$\top$型和 α 型广义 Fuzzy 逆矩阵、区间值 Fuzzy 矩阵的广义逆以及格阵广义逆等.

§7.1 Fuzzy 关系方程的性质

定义 7.1.1 设 U,V,W 为非空论域，且已知 Fuzzy 关系 $R \in \mathscr{F}(U\times V)$，$S \in \mathscr{F}(U\times W)$，而 Fuzzy 关系 $X \in \mathscr{F}(V\times W)$ 未知，X 满足

$$R * X = S \tag{7.1.1}$$

或已知 $Q \in \mathscr{F}(V\times W)$，$S \in \mathscr{F}(U\times W)$，求 $X \in \mathscr{F}(U\times V)$，使得

$$X * Q = S \tag{7.1.2}$$

则称 $R * X = S$ 或 $X * Q = S$ 是关于 X 的 Fuzzy 关系方程(fuzzy relation equation). 其中 $*$ 是 Fuzzy 关系间的复合运算.

利用Fuzzy关系的逆(对应有限论域上Fuzzy矩阵的转置),方程 $R*X=S$ 和 $X*Q=S$ 从形式上可以相互转换. 所以今后的讨论主要针对方程 $R*X=S$.

定义 7.1.2 (1)设 X 满足 $R*X=S$,则称 X 是方程 $R*X=S$ 的解(solution),同时称方程 $R*X=S$ 是可解的(solvable). 记方程 $R*X=S$ 的全体解为 $\mathscr{X}_*(R,S)=\{X\in\mathscr{F}(V\times W)\mid R*X=S\}$ 或 $\mathscr{X}_*$;

(2)若存在 $\overline{X}(X_x)\in\mathscr{X}_*$,使得 $\forall X\in\mathscr{X}_*$,满足 $X\subseteq\overline{X}(X\supseteq X_x)$,则称 $\overline{X}(X_x)$ 为方程 $R*X=S$ 的最大解(最小解)(greatest (least) solution);

(3)若 $X_g\in\mathscr{X}_*$,使得 $\forall X\supseteq X_g$,都有 $X\in\mathscr{X}_*$,则称 X_g 为方程 $R*X=S$ 的拟极小解(quasi-minimal solution);

(4)若 $\underline{X}(X_{jd})\in\mathscr{X}_*$,使得如果 $X\in\mathscr{X}_*$,且 $X\subseteq\underline{X}$ $(X_{jd}\subseteq X)$,则 $X=\underline{X}(X=X_{jd})$,此时称 $\underline{X}(X_{jd})$ 为方程 $R*X=S$ 的极小解(极大解)(minimal (maximal) solution). 方程 $R*X=S$ 的极小解集记为 $\underline{\mathscr{X}}(R,S)$ 或 $\underline{\mathscr{X}}$.

根据复合运算 $*$ 的不同定义,可以得到不同类型的Fuzzy关系方程. 目前主要讨论:

(1) $\vee-\top$ ($\circ_\top$) 即最大—$\top$ 型Fuzzy关系方程. 特别地,

当 $\top=\wedge$ 时,$\vee-\wedge$ ($\circ$) 即最大—最小型Fuzzy关系方程;

当 $\top=\cdot$ 时,$\vee-\cdot$ ($\cdot$) 即最大—乘积型Fuzzy关系方程.

(2) $\wedge-\alpha_\top$ ($*=\alpha_\top$) 即最小—$\alpha_\top$ 型Fuzzy关系方程.

对于 $\circ_\top$ 复合 $\mathscr{X}_*(R,S)$ 简记为 $\mathscr{X}_\top(R,S)$,对于 $\circ$ 复合 $\mathscr{X}_*(R,S)$ 简记为 $\mathscr{X}(R,S)$,对于 $\cdot$ 复合 $\mathscr{X}_*(R,S)$ 简记为 $\mathscr{X}_\cdot(R,S)$,而对于 $\alpha_\top$ 复合 $\mathscr{X}_*(R,S)$ 简记为 $\mathscr{X}_\alpha(R,S)$. 以下均设 $\top$ 是对 $\vee$ 无穷可分配的t-模.

定理 7.1.1 (Pedrycz, 1982a)设 $R\in\mathscr{F}(U\times V)$, $S\in\mathscr{F}(U\times W)$,则 $\mathscr{X}_\top(R,S)\neq\varnothing$ 当且仅当 $R^{-1}\alpha_\top S$ 为其最大解.

证明 充分性显然. 下证必要性.

设 $\mathscr{X}_\top(R,S)\neq\varnothing$,则 $\exists X\in\mathscr{F}(V\times W)$,使得 $R\circ_\top X=S$,由定理3.4.15(2)得

$$X\subseteq R^{-1}\alpha_\top(R\circ_\top X)=R^{-1}\alpha_\top S$$

又由定理3.4.2(1)及定理3.4.15(1)有

$$S=R\circ_\top X\subseteq R\circ_\top(R^{-1}\alpha_\top S)\subseteq S$$

因此 $R^{-1}\alpha_\top S\in\mathscr{X}_\top(R,S)$ 且 $\forall X\in\mathscr{X}_\top(R,S)$ 都有 $X\subseteq R^{-1}\alpha_\top S$,故 $R^{-1}\alpha_\top S$ 是 $\mathscr{X}_\top(R,S)\neq\varnothing$ 的最大元. □

定理 7.1.2 设 $R\in\mathscr{F}(U\times V)$, $S\in\mathscr{F}(U\times W)$,则

$$\mathscr{X}_\top(R,S)\neq\varnothing\Rightarrow\bigvee_{v\in V}\{R(u,v)\}\geqslant\bigvee_{w\in W}\{S(u,w)\},\ \forall u\in U\quad(7.1.3)$$

证明 设 $X \in \mathscr{X}_T(R,S)$，则 $\forall w \in W$，有

$$\bigvee_{v\in V}\{R(u,v)\} \geqslant \bigvee_{v\in V}\{R(u,v)\ \top\ X(v,w)\}$$
$$=(R\circ_T X)(u,w)=S(u,w),\ \forall u\in U$$

从而由 w 的任意性得证 $\bigvee_{v\in V}\{R(u,v)\} \geqslant \bigvee_{w\in W}\{S(u,w)\}, \forall u \in U.$ □

定理 7.1.3 设 $R \in \mathscr{F}(U\times V)$，$S \in \mathscr{F}(U\times W)$，则

(1) $X_1 \in \mathscr{X}_T(R,S)$，$R\circ_T X_2 \subseteq S$ 或 $X_2 \in \mathscr{X}_T(R,S)$，$R\circ_T X_1 \subseteq S$ $\Rightarrow X_1 \cup X_2 \in \mathscr{X}_T(R,S)$；

(2) $X_1 \in \mathscr{X}_T(R,S)$，$R\circ_T X_2 \supseteq S$ 或 $X_2 \in \mathscr{X}_T(R,S)$，$R\circ_T X_1 \supseteq S$ $\Rightarrow X_1 \cap X_2 \in \mathscr{X}_T(R,S)$；

(3) $R\circ_T X_1 \supseteq S$，$R\circ_T X_2 \subseteq S, X_1 \subseteq X \subseteq X_2 \Rightarrow X \in \mathscr{X}_T(R,S)$.

证明 (1) $R\circ_T(X_1\cup X_2)=R\circ_T X_1 \cup R\circ_T X_2=S.$

(2)类似(1)可证.

(3) $R\circ_T X_1 \supseteq S$，$R\circ_T X_2 \subseteq S, X_1 \subseteq X \subseteq X_2 \Rightarrow S \subseteq R\circ_T X_1 \subseteq R\circ_T X \subseteq R\circ_T X_2 \subseteq S \Rightarrow R\circ_T X=S \Rightarrow X \in \mathscr{X}_T(R,S)$. □

定理 7.1.4 设 $R \in \mathscr{F}(U\times V)$，$S \in \mathscr{F}(U\times W)$，则 $\mathscr{X}_\alpha(R,S)\neq\varnothing$ 当且仅当 $R^{-1}\circ_T S$ 为其最小解.

证明 充分性显然. 下证必要性.

设 $\mathscr{X}_\alpha(R,S)\neq\varnothing$，则 $\exists X\in\mathscr{F}(V\times W)$，使得 $R\alpha_T X=S$，由定理 3.4.15 (1)得

$$X \supseteq R^{-1}\circ_T(R\alpha_T X)=R^{-1}\circ_T S$$

又由定理 3.4.11 及定理 3.4.15(2)有

$$S=R\alpha_T X \supseteq R\alpha_T(R^{-1}\circ_T S)\supseteq S$$

因此 $R^{-1}\circ_T S\in\mathscr{X}_\alpha(R,S)$ 且 $\forall X\in\mathscr{X}_\alpha(R,S)$ 都有 $X\supseteq R^{-1}\circ_T S$，故 $R^{-1}\circ_T S$ 是 $\mathscr{X}_\alpha(R,S)$ 的最小元. □

类似定理 7.1.3 可证以下定理.

定理 7.1.5 设 $R \in \mathscr{F}(U\times V)$，$S \in \mathscr{F}(U\times W)$，则：

(1) $X_1 \in \mathscr{X}_\alpha(R,S)$，$R\alpha_T X_2 \supseteq S$ 或 $X_2 \in \mathscr{X}_\alpha(R,S)$，$R\alpha_T X_1 \supseteq S \Rightarrow X_1 \cap X_2 \in \mathscr{X}_\alpha(R,S)$；

(2) $R\alpha_T X_1 \supseteq S$，$R\alpha_T X_2 \subseteq S, X_1 \subseteq X \subseteq X_2 \Rightarrow X \in \mathscr{X}_\alpha(R,S)$.

§7.2 区间值与格值 Fuzzy 关系方程的性质

在§3.10 中我们讨论了区间值与格值 Fuzzy 关系，下面讨论区间值与格值

Fuzzy 关系方程.

定义 7.2.1 设U,V,W为非空论域,且已知区间值 Fuzzy 关系 $R\in\mathscr{F}_I(U\times V)$, $S\in\mathscr{F}_I(U\times W)$,而区间值 Fuzzy 关系 $X\in\mathscr{F}_I(V\times W)$ 未知,X 满足

$$R*X=S \tag{7.2.1}$$

则称$R*X=S$是关于X的区间值 Fuzzy 关系方程. 其中 $*$ 是区间值 Fuzzy 关系的复合运算.

与 Fuzzy 关系方程相同,类似定义区间值 Fuzzy 关系方程的最大解、极小解等概念,同样我们也主要讨论最大—$\top$型区间值 Fuzzy 关系方程($\vee-\top$($\circ_\top$))和最小—$\alpha_\top$型 Fuzzy 关系方程($\wedge-\alpha_\top$($*=\alpha_\top$)). 特别地,当$\top=\wedge$时,$\vee-\wedge$($\circ$)即最大—最小型区间值 Fuzzy 关系方程;当$\top=\cdot$时,$\vee-\cdot$($\cdot$)即最大—乘积型区间值 Fuzzy 关系方程.

置$\mathscr{X}_*(R,S)=\{X\in\mathscr{F}_I(V\times W)\mid R*X=S\}$,对于$\circ_\top$复合$\mathscr{X}_*(R,S)$简记为$\mathscr{X}_\top(R,S)$,对于$\alpha_\top$复合$\mathscr{X}_*(R,S)$简记为$\mathscr{X}_\alpha(R,S)$. 以下均设$\top$对$\vee$是无穷可分配的 t-模. 类似 Fuzzy 关系方程的证明方法,我们得到区间值 Fuzzy 关系方程有下列类似性质:

定理 7.2.1 设$R\in\mathscr{F}_I(U\times V)$, $S\in\mathscr{F}_I(U\times W)$,则$\mathscr{X}_\top(R,S)\neq\varnothing$当且仅当$R^{-1}\alpha_\top S$为其最大解.

定理 7.2.2 设$R\in\mathscr{F}_I(U\times V)$, $S\in\mathscr{F}_I(U\times W)$,则

$$\mathscr{X}_\top(R,S)\neq\varnothing\Rightarrow\bigvee_{v\in V}\{R(u,v)\}\geqslant\bigvee_{w\in W}\{S(u,w)\},\ \forall u\in U \tag{7.2.2}$$

定理 7.2.3 设$R\in\mathscr{F}_I(U\times V)$, $S\in\mathscr{F}_I(U\times W)$,则:

(1) $X_1\in\mathscr{X}_\top(R,S)$, $R\circ_\top X_2\supseteq S$ 或 $X_2\in\mathscr{X}_\top(R,S)$, $R\circ_\top X_1\supseteq S\Rightarrow X_1\cup X_2\in\mathscr{X}_\top(R,S)$;

(2) $X_1\in\mathscr{X}_\top(R,S)$, $R\circ_\top X_2\subseteq S$ 或 $X_2\in\mathscr{X}_\top(R,S)$, $R\circ_\top X_1\subseteq S\Rightarrow X_1\cup X_2\in\mathscr{X}_\top(R,S)$;

(3) $R\circ_\top X_1\supseteq S$, $R\circ_\top X_2\subseteq S$, $X_1\subseteq X\subseteq X_2\Rightarrow X\in\mathscr{X}_\top(R,S)$.

定理 7.2.4 设$R\in\mathscr{F}_I(U\times V)$, $S\in\mathscr{F}_I(U\times W)$,则$\mathscr{X}_\alpha(R,S)\neq\varnothing$当且仅当$R^{-1}\circ_\top S$为其最小解.

定理 7.2.5 设$R\in\mathscr{F}_I(U\times V)$, $S\in\mathscr{F}_I(U\times W)$,则:

(1) $X_1\in\mathscr{X}_\alpha(R,S)$, $R\alpha_\top X_2\supseteq S$ 或 $X_2\in\mathscr{X}_\alpha(R,S)$, $R\alpha_\top X_1\supseteq S\Rightarrow X_1\cap X_2\in\mathscr{X}_\alpha(R,S)$;

(2) $R\alpha_\top X_1\supseteq S$, $R\alpha_\top X_2\subseteq S$, $X_1\subseteq X\subseteq X_2\Rightarrow X\in\mathscr{X}_\alpha(R,S)$.

定理 7.2.6 设$\top$为连续 t-模,$R=[\underline{R},\overline{R}]\in\mathscr{F}_I(U\times V)$ 和 $S=[\underline{S},\overline{S}]\in\mathscr{F}_I(U\times W)$,则 $X=[\underline{X},\overline{X}]\in\mathscr{F}_I(V\times W)$ 是 $R\circ_\top X=S$ 的解的充分必要条件

是 $\underline{X} \in \mathscr{X}_{\mathrm{T}}(\underline{R},\underline{S})$，$\overline{X} \in \mathscr{X}_{\mathrm{T}}(\overline{R},\overline{S})$，并且 $\underline{X} \subseteq \overline{X}$.

证明　必要性 设 $X=[\underline{X},\overline{X}] \in \mathscr{F}_I(V \times W)$ 是 $R \circ_{\mathrm{T}} X=S$ 的解，则 $\forall (u,w) \in U \times W, R \circ_{\mathrm{T}} X(u,w)=\bigvee_{v \in V}\{R(u,v) \top X(v,w)\}$　（参见定义 3.10.2）

$$=\bigvee_{v \in V}\{[\underline{R}(u,v),\overline{R}(u,v)] \top [\underline{X}(v,w),\overline{X}(v,w)]\}$$

$$=[\bigvee_{v \in V}\{\underline{R}(u,v) \top \underline{X}(v,w)\}, \bigvee_{v \in V}\{\overline{R}(u,v) \top \overline{X}(v,w)\}] \text{（参见定理 3.10.1）}$$

$$=[\underline{S}(u,w),\overline{S}(u,w)]$$

所以

$$\bigvee_{v \in V}\{\underline{R}(u,v) \top \underline{X}(v,w)\}=\underline{S}(u,w)$$

$$\bigvee_{v \in V}\{\overline{R}(u,v) \top \overline{X}(v,w)\}=\overline{S}(u,w)$$

即 $\underline{X} \in \mathscr{X}_{\mathrm{T}}(\underline{R},\underline{S})$，$\overline{X} \in \mathscr{X}_{\mathrm{T}}(\overline{R},\overline{S})$，并且 $\underline{X} \subseteq \overline{X}$.

充分性　设 $\underline{X} \in \mathscr{X}_{\mathrm{T}}(\underline{R},\underline{S})$，$\overline{X} \in \mathscr{X}_{\mathrm{T}}(\overline{R},\overline{S})$，并且 $\underline{X} \subseteq \overline{X}$，则由上述证明反推知 $X=[\underline{X},\overline{X}]$ 是 $R \circ_{\mathrm{T}} X=S$ 的解. □

定理 7.2.6 给出了一种通过解 Fuzzy 关系方程 $\underline{R} \circ_{\mathrm{T}} X=\underline{S}$ 与 $\overline{R} \circ_{\mathrm{T}} Y=\overline{S}$ 而求解区间值Fuzzy关系方程 $R \circ_{\mathrm{T}} X= S$ 的方法. 值得注意的是，若 $\underline{X} \in \mathscr{X}_{\mathrm{T}}(\underline{R},\underline{S})$，$\overline{X} \in \mathscr{X}_{\mathrm{T}}(\overline{R},\overline{S})$，则并不一定有 $X \subseteq Y$.

例 7.2.1　对于最简单的区间值 Fuzzy 关系方程 $[0.5,0.8] \wedge [x,y]=[0.5,0.8]$，$0.5 \wedge x=0.5$ 的解集为 $[0.5,1]$，$0.8 \wedge y=0.8$ 的解集是 $[0.8,1]$，虽然按普通区间序关系 $[0.5,1] \leqslant [0.8,1]$，但对于 $x \in [0.5,1], y \in [0.8,1]$ 不一定有 $x \leqslant y$. □

定义 7.2.2　设 U,V,W 为非空论域，且已知格值Fuzzy关系 $R \in \mathscr{F}_L(U \times V)$，$S \in \mathscr{F}_L(U \times W)$，而格值 Fuzzy 关系 $X \in \mathscr{F}_L(V \times W)$ 未知，X 满足

$$R \circ X=S \tag{7.2.3}$$

则称 $R \circ X=S$ 是关于 X 的格值 Fuzzy 关系方程或 L-Fuzzy 关系方程. 其中 $\circ$ 是格值 Fuzzy 关系的复合运算（参见定义 3.10.2）.

关于格值 Fuzzy 关系方程解的概念与复合记号与（区间值）Fuzzy 关系方程类似，并且仍置 $\mathscr{X}(R, S)=\{X \in \mathscr{F}_L(V \times W) \mid R \circ X=S\}$. 以下假设 L 是可分配的完备格，我们容易得到格值 Fuzzy 关系方程的性质.

定理 7.2.7　(Sanchez, 1976) 设 $R \in \mathscr{F}_L(U \times V)$，$S \in \mathscr{F}_L(U \times W)$，则 $\mathscr{X}(R,S) \neq \varnothing$ 当且仅当 $R^{-1} \alpha S$ 为其最大解.

定理 7.2.8　设 $R \in \mathscr{F}_L(U \times V)$，$S \in \mathscr{F}_L(U \times W)$，则

$$\mathscr{X}(R, S) \neq \varnothing \Rightarrow \bigvee_{v \in V}\{R(u,v)\} \geqslant \bigvee_{w \in W}\{S(u,w)\}, \forall u \in U \tag{7.2.4}$$

定理 7.2.9　设 $R \in \mathscr{F}_L(U \times V)$，$S \in \mathscr{F}_L(U \times W)$，则：

(1) $X_1 \in \mathscr{X}(R, S)$, $R \circ X_2 \subseteq S$ 或 $X_2 \in \mathscr{X}(R, S)$, $R \circ X_1 \subseteq S \Rightarrow X_1 \cup X_2 \in \mathscr{X}(R, S)$;

(2) $X_1 \in \mathscr{X}(R, S)$, $R \circ X_2 \supseteq S$ 或 $X_2 \in \mathscr{X}(R, S)$, $R \circ X_1 \supseteq S \Rightarrow X_1 \cap X_2 \in \mathscr{X}(R, S)$;

(3) $R \circ X_1 \supseteq S$, $R \circ X_2 \subseteq S$, $X_1 \subseteq X \subseteq X_2 \Rightarrow X \in \mathscr{X}(R, S)$.

§7.3 最大—最小型 Fuzzy 关系方程

当 $\top = \wedge$ 时,$R \circ X = S$ 称为最大—最小型 Fuzzy 关系方程,并且

$$\mathscr{X}_\wedge(R,S) = \{X \in \mathscr{F}(V \times W) \mid R \circ X = S\} \tag{7.3.1}$$

$$a\alpha_\wedge b = \begin{cases} b, & a > b \\ 1, & a \leqslant b \end{cases} \tag{7.3.2}$$

在本节中 $\mathscr{X}_\wedge(R,S)$ 与 $\alpha_\wedge$ 简记为 $\mathscr{X}(R, S)$ 与 α,由定理 7.1.1 知对于 $R \circ X = S$ 有 $\mathscr{X}(R, S) \neq \varnothing$ 当且仅当 $R^{-1}\alpha S$ 为其最大解. 进一步我们可以得到: $\forall (v,w) \in V \times W$

$$\begin{aligned} R^{-1}\alpha S(v,w) &= \bigwedge_{u \in U} \{R^{-1}(v,u)\alpha S(u,w)\} \\ &= \bigwedge_{u \in U} \{R(u,v)\alpha S(u,w)\} = \bigwedge_{u \in U} \{S(u,w) \mid R(u,v) > S(u,w)\}. \end{aligned}$$

定理 7.3.1 设 $R \in \mathscr{F}(U \times V)$, $S \in \mathscr{F}(U \times W)$, 则 $\forall (v,w) \in V \times W$

$$R^{-1}\alpha S(v,w) = \bigwedge_{u \in U} \{S(u,w) \mid R(u,v) > S(u,w)\} \tag{7.3.3}$$

例 7.3.1 (1)设 $\begin{bmatrix} 0.5 & 0.8 & 0.2 & 0.4 \\ 0.9 & 0.3 & 0.8 & 0.6 \\ 0 & 0.4 & 0.5 & 0.1 \end{bmatrix} \circ X = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.7 \\ 0.8 & 0.4 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$,

则由于 $0 \vee 0.4 \vee 0.5 \vee 0.1 < 0.6$,故由定理 7.1.2,方程无解.

(2)对于关系方程 $\begin{bmatrix} 0.3 & 0.7 & 0.6 \\ 0.5 & 0.2 & 0.4 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.4 \end{bmatrix}$,容易得到

$$\begin{bmatrix} 0.3 & 0.7 & 0.6 \\ 0.5 & 0.2 & 0.4 \end{bmatrix}' \alpha \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.5 \\ 0.7 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix} \alpha \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.2 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

但 $(0.2, 0.2, 0.2)'$ 不是方程的解,从而关系方程无解. 该例说明定理 7.1.2 的充分性不成立.

(3)对于关系方程 $\begin{bmatrix} 0.8 & 0.5 & 0.6 \\ 0.4 & 0.8 & 0.5 \end{bmatrix} \circ X = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.8 \\ 0.6 & 0.7 \end{bmatrix}$,容易求得

$$\begin{bmatrix}0.8 & 0.5 & 0.6\\0.4 & 0.8 & 0.5\end{bmatrix}' \alpha \begin{bmatrix}0.5 & 0.8\\0.6 & 0.7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.8 & 0.4\\0.5 & 0.8\\0.6 & 0.5\end{bmatrix} \alpha \begin{bmatrix}0.5 & 0.8\\0.6 & 0.7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.5 & 1\\0.6 & 0.7\\0.5 & 1\end{bmatrix}$$

从而 $R\circ(R'\alpha S)=\begin{bmatrix}0.5 & 0.8\\0.6 & 0.7\end{bmatrix}=S$. 故原方程有解,最大解是 $\begin{bmatrix}0.5 & 1\\0.6 & 0.7\\0.5 & 1\end{bmatrix}$. □

求出一般 Fuzzy 关系方程的全部解是不容易的,下面对论域是有限的情形进行讨论. 这时 R,X,S 都可以用矩阵表示出来,如果 $R=[r_{ij}]\in[0,1]^{m\times n}$, $X=[x_{jk}]\in[0,1]^{n\times l}$, $S=[s_{il}]\in[0,1]^{m\times l}$, 则 $R\circ X=S\Leftrightarrow R\circ X_j=S_j$, $j=1,2,\cdots,l$, 其中

$$X_j=\begin{bmatrix}x_{1j}\\x_{2j}\\\vdots\\x_{nj}\end{bmatrix},\quad S_j=\begin{bmatrix}s_{1j}\\s_{2j}\\\vdots\\s_{nj}\end{bmatrix}$$

所以下面讨论下列形式的 Fuzzy 关系方程

$$\begin{bmatrix}r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n}\\r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n}\\\vdots & \vdots & & \vdots\\r_{m1} & r_{m2} & \cdots & r_{mn}\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s_1\\s_2\\\vdots\\s_m\end{bmatrix}$$

或

$$\begin{cases}(r_{11}\wedge x_1)\vee(r_{12}\wedge x_2)\vee\cdots\vee(r_{1n}\wedge x_n)=s_1\\(r_{21}\wedge x_1)\vee(r_{22}\wedge x_2)\vee\cdots\vee(r_{2n}\wedge x_n)=s_2\\\quad\vdots\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\vdots\\(r_{m1}\wedge x_1)\vee(r_{m2}\wedge x_2)\vee\cdots\vee(r_{mn}\wedge x_n)=s_m\end{cases}$$

7.3.1 Tsukamoto 方法

首先容易证明下列结论:

定理 7.3.2 设 $R=[r_{ij}]\in[0,1]^{m\times n}$, $S=[s_i]\in[0,1]^{m\times 1}$, 则 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$ 是 $R\circ X=S$ 的解的充分必要条件是 $\forall i,j, r_{ij}\wedge x_i\leqslant s_j$ 且 $\forall i,\exists j_0$ 满足 $r_{ij_0}\wedge x_{j_0}=s_i$.

推论 7.3.1 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$ 是 $(r_1\wedge x_1)\vee(r_2\wedge x_2)\vee\cdots\vee(r_n\wedge x_n)=s$ 的解的充分必要条件是 $\forall i, r_i\wedge x_i\leqslant s_i$ 且 $\exists i_0$ 满足 $r_{i_0}\wedge x_{i_0}=s$.

由定理 7.3.2 知,Fuzzy 关系方程 $R\circ X=S$ 的求解问题变成了最简单情形

$$r\wedge x=s \text{ 与 } r\wedge x\leqslant s$$

的求解问题. 容易求得 $r \wedge x = s$ 的解

$$x \in \begin{cases} \{s\}, & r > s \\ [s,1], & r = s \\ \varnothing, & r < s \end{cases}$$

$r \wedge x \leqslant s$ 的解

$$x \in \begin{cases} [0,s], & r > s \\ [0,1], & r \leqslant s \end{cases}$$

将 $r \wedge x = s$ 与 $r \wedge x \leqslant s$ 的解写得简洁一些,引入下面的算子, $\forall a,b \in [0,1]$

$$b\varepsilon a = \begin{cases} \{b\}, & a > b \\ [b,1], & a = b \\ \varnothing, & a < b \end{cases}, \quad b\hat{\varepsilon} a = \begin{cases} [0,b], & a > b \\ [0,1], & a \leqslant b \end{cases}$$

则 $r \wedge x = s$ 的解 $x \in s\varepsilon r$; $r \wedge x \leqslant s$ 的解 $x \in s\hat{\varepsilon} r$. 为了简单起见,记单点集 $\{b\}$ 为 b.

对于 $r_1, r_2, \cdots, r_n, s \in [0,1]$, 引入区间向量

$$Y = (s\varepsilon r_1, s\varepsilon r_2, \cdots, s\varepsilon r_n)$$

$$\hat{Y} = (s\hat{\varepsilon} r_1, s\hat{\varepsilon} r_2, \cdots, s\hat{\varepsilon} r_n)$$

由推论 7.3.1 知:若 Y 的第 i 个分量非空,则将 $\hat{Y}$ 的第 i 个分量换成 Y 的第 i 个分量得一个解向量

$$W_i = (s\hat{\varepsilon} r_1, \cdots, s\hat{\varepsilon} r_{i-1}, s\varepsilon r_i, s\hat{\varepsilon} r_{i+1}, \cdots, s\hat{\varepsilon} r_n)$$

否则, $W_i = \varnothing$. 由此我们得到以下定理.

定理 7.3.3 Fuzzy 关系方程 $(r_1 \wedge x_1) \vee (r_2 \wedge x_2) \vee \cdots \vee (r_n \wedge x_n) = s$ 有解的充分必要条件是存在 $i_0 \in \{1,2,\cdots,n\}$, 使得 $s\varepsilon r_{i_0} \neq \varnothing$, 此时方程的解集为 $W_1 \cup W_2 \cup \cdots \cup W_n$.

例 7.3.2 对于 Fuzzy 关系方程 $(0.8 \wedge r_1) \vee (0.5 \wedge r_2) \vee (0.2 \wedge r_3) = 0.5$, 容易计算 $Y = (0.5\varepsilon 0.8, 0.5\varepsilon 0.5, 0.5\varepsilon 0.2) = (0.5, [0.5,1], \varnothing)$

$$\hat{Y} = (0.5\hat{\varepsilon} 0.8, 0.5\hat{\varepsilon} 0.5, 0.5\hat{\varepsilon} 0.2) = ([0,0.5],[0,1],[0,1])$$

由此得

$$W_1 = (0.5,[0,1],[0,1])$$

$$W_2 = ([0,0.5],[0.5,1],[0,1])$$

$$W_3 = \varnothing$$

从而原方程的解集为 $(0.5,[0,1],[0,1]) \cup ([0,0.5],[0.5,1],[0,1])$. □

对于一般情形的方程

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{m1} & r_{m2} & \cdots & r_{mn} \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_m \end{bmatrix} \tag{7.3.4}$$

易见该方程的解是下列 m 个方程的解集之交.

$$(r_{i1} \wedge x_1) \vee (r_{i2} \wedge x_2) \vee \cdots \vee (r_{in} \wedge x_n) = s_i, \quad i = 1,2,\cdots,m$$

令

$$Y = \begin{bmatrix} s_1 \varepsilon r_{11} & s_1 \varepsilon r_{12} & \cdots & s_1 \varepsilon r_{1n} \\ s_2 \varepsilon r_{21} & s_2 \varepsilon r_{22} & \cdots & s_2 \varepsilon r_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_m \varepsilon r_{m1} & s_m \varepsilon r_{m2} & \cdots & s_m \varepsilon r_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\hat{Y} = \begin{bmatrix} s_1 \hat{\varepsilon} r_{11} & s_1 \hat{\varepsilon} r_{12} & \cdots & s_1 \hat{\varepsilon} r_{1n} \\ s_2 \hat{\varepsilon} r_{21} & s_2 \hat{\varepsilon} r_{22} & \cdots & s_2 \hat{\varepsilon} r_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_m \hat{\varepsilon} r_{m1} & s_m \hat{\varepsilon} r_{m2} & \cdots & s_m \hat{\varepsilon} r_{mn} \end{bmatrix}$$

这时 Y 是集值矩阵(有的元可能为 $\varnothing$，其他元为区间值)，$\hat{Y}$ 是区间值 Fuzzy 矩阵. 对于 $i = 1,2,\cdots,m$，若 $s_i \varepsilon r_{iq(i)} \neq \varnothing$，$q(i) \in \{1,2,\cdots,n\}$，则将 $\hat{Y}$ 中的 $s_i \hat{\varepsilon} r_{iq(i)}$ 换成 Y 中对应位置的 $s_i \varepsilon r_{iq(i)}$ 得下面的区间值 Fuzzy 矩阵

$$W_{q(1),q(2),\cdots,q(m)} \triangleq (w_{ij}(q(1),q(2),\cdots,q(m)))_{m\times n}$$

其中
$$w_{ij}(q(1),q(2),\cdots,q(m)) = \begin{cases} s_i \varepsilon r_{iq(i)}, & j = q(i) \\ s_i \hat{\varepsilon} r_{ij}, & j \neq q(i) \end{cases},$$

$$i = 1,2,\cdots,m; j = 1,2,\cdots,n.$$

定理 7.3.4 方程(7.3.4)有解的充分必要条件是 $\forall i \in \{1,2,\cdots,m\}$，$\exists q(i) \in \{1,2,\cdots,n\}$ 使得 $s_i \varepsilon r_{iq(i)} \neq \varnothing$，并且方程的解集为

$$\bigcup_{q(1),q(2),\cdots,q(m) \in \{1,2,\cdots,n\}} X_{q(1),q(2),\cdots,q(m)}$$

其中 $X_{q(1),q(2),\cdots,q(m)}$ 为

$$\left(\bigcap_{i=1}^{m} w_{i1}(q(1),q(2),\cdots,q(m))\right), \bigcap_{i=1}^{m} w_{i2}(q(1),q(2),\cdots,q(m)), \cdots,$$

$$\bigcap_{i=1}^{m} w_{in}(q(1),q(2),\cdots,q(m)))'.$$

证明 方程(7.3.4)有解的充分条件是显然的. 如果方程(7.3.4)有解，任给 $i \in \{1,2,\cdots,m\}$，设方程

$$(r_{i1}\wedge x_1)\vee(r_{i2}\wedge x_2)\vee\cdots\vee(r_{in}\wedge x_n)=s_i$$

的解集为 W_i，则由推论 7.3.1，W_i 可以表示为

$$W_i=\bigcup_{q(1),q(2),\cdots,q(m)\in\{1,2,\cdots,n\}}(w_{i1}(q(1),q(2),\cdots,q(m)),w_{i2}(q(1),q(2),\cdots,q(m)),\cdots,w_{in}(q(1),q(2),\cdots,q(m)))$$

故方程(7.3.4)的解 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)'\in\bigcap_{i=1}^{m}W_i$，即为

$$\bigcap_{i=1}^{m}\bigcup_{q(1),\cdots,q(i),\cdots,q(m)}(w_{i1}(q(1),q(2),\cdots,q(m)),w_{i2}(q(1),q(2),\cdots,q(m)),\cdots,w_{in}(q(1),q(2),\cdots,q(m)))'$$

$$=\bigcup_{q(i)\in\{1,2,\cdots,n\}}\left(\bigcap_{i=1}^{m}w_{i1}(q(1),q(2),\cdots,q(m)),\bigcap_{i=1}^{m}w_{i2}(q(1),q(2),\cdots,q(m)),\cdots,\bigcap_{i=1}^{m}w_{in}(q(1),q(2),\cdots,q(m))\right)'$$

$$=\bigcup_{q(i)\in\{1,2,\cdots,n\}}X_{q(1),q(2),\cdots,q(m)}.$$

□

例 7.3.3 对于 Fuzzy 关系方程

$$\begin{bmatrix}0.4&0.2&0\\0.6&0.1&0.8\\0.3&0.4&0.2\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.2\\0.5\\0.3\end{bmatrix}$$

分下列几步求其解.

(1)求 Y 与 $\hat{Y}$

$$Y=\begin{bmatrix}0.2\varepsilon0.4&0.2\varepsilon0.2&0.2\varepsilon0\\0.5\varepsilon0.6&0.5\varepsilon0.1&0.5\varepsilon0.8\\0.3\varepsilon0.3&0.3\varepsilon0.4&0.3\varepsilon0.2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.2&[0.2,1]&\varnothing\\0.5&\varnothing&0.5\\ [0.3,1]&0.3&\varnothing\end{bmatrix}$$

$$\hat{Y}=\begin{bmatrix}0.2\hat{\varepsilon}0.4&0.2\hat{\varepsilon}0.2&0.2\hat{\varepsilon}0\\0.5\hat{\varepsilon}0.6&0.5\hat{\varepsilon}0.1&0.5\hat{\varepsilon}0.8\\0.3\hat{\varepsilon}0.3&0.3\hat{\varepsilon}0.4&0.3\hat{\varepsilon}0.2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}[0,0.2]&[0,1]&[0,1]\\ [0,0.5]&[0,1]&[0,0.5]\\ [0,1]&[0,0.3]&[0,1]\end{bmatrix}.$$

(2)求 $W_{q(1),q(2),q(3)}$，共有 $2\times2\times2=8$ 个.

$$W_{1,1,1}=\begin{bmatrix}0.2&[0,1]&[0,1]\\0.5&[0,1]&[0,0.5]\\ [0.3,1]&[0,0.3]&[0,1]\end{bmatrix}$$

$$X_{1,1,1}=(\varnothing,[0,0.3],[0,0.5])'$$

$$W_{1,1,2}=\begin{bmatrix}0.2 & [0,1] & [0,1]\\ 0.5 & [0,1] & [0,0.5]\\ [0,1] & [0.3] & [0,1]\end{bmatrix}$$

$$X_{1,1,2}=(\varnothing,0.3,[0,0.5])'$$

$$W_{1,3,1}=\begin{bmatrix}0.2 & [0,1] & [0,1]\\ [0,0.5] & [0,1] & 0.5\\ [0.3,1] & [0,0.3] & [0,1]\end{bmatrix}$$

$$X_{1,3,1}=(0.2,[0,0.3],0.5)'$$

$$W_{1,3,2}=\begin{bmatrix}0.2 & [0,1] & [0,1]\\ [0,0.5] & [0,1] & 0.5\\ [0,1] & 0.3 & [0,1]\end{bmatrix}$$

$$X_{1,3,2}=(0.2,0.3,0.5)'$$

$$W_{2,1,1}=\begin{bmatrix}[0,0.2] & [0.2,1] & [0,1]\\ 0.5 & [0,1] & [0,0.5]\\ [0.3,1] & [0,0.3] & [0,1]\end{bmatrix}$$

$$X_{2,1,1}=(\varnothing,[0.2,0.3],[0,0.5])'$$

$$W_{2,1,2}=\begin{bmatrix}[0,0.2] & [0.2,1] & [0,1]\\ 0.5 & [0,1] & [0,0.5]\\ [0,1] & 0.3 & [0,1]\end{bmatrix}$$

$$X_{2,1,2}=(\varnothing,0.3,[0,0.5])'$$

$$W_{2,3,1}=\begin{bmatrix}[0,0.2] & [0.2,1] & [0,1]\\ [0,0.5] & [0,1] & 0.5\\ [0.3,1] & [0,0.3] & [0,1]\end{bmatrix}$$

$$X_{2,3,1}=(\varnothing,[0.2,0.3],0.5)'$$

$$W_{2,3,2}=\begin{bmatrix}[0,0.2] & [0.2,1] & [0,1]\\ [0,0.5] & [0,1] & 0.5\\ [0,1] & 0.3 & [0,1]\end{bmatrix}$$

$$X_{2,3,2}=([0,0.2],0.3,0.5)'.$$

(3)求解集

$$\mathscr{X}(R,S)=\bigcup_{q(1),q(2),q(3)} X_{q(1),q(2),q(3)}$$
$$=(0.2,[0,0.3],0.5)'\cup([0,0.2],0.3,0.5)'.\qquad\square$$

以上介绍的方法最初是由日本学者 Y. Tsukamoto 于 20 世纪 70 年代提出的. 该方法最突出的优点是直观易懂,但其主要的缺陷是计算量随方程阶数的

增加而呈指数增长. 设矩阵 Y 中第 i 行的非零元素有 k_i 个, $i=1,2,\cdots,m$, 则要计算的矩阵共有 $k_1\times k_2\times\cdots\times k_m$ 个. 在计算中,一是重复计算太多,二是许多计算结果是空集,这两点可以通过上例的求解过程容易看出. 如 $X_{1,3,2}\subset X_{1,3,1}$, $X_{1,3,2}\subset X_{2,3,2}$, 其余的均为空集,所以真正有用的计算只有三个矩阵,大部分的计算是无效的. 那么如何避免这些无效的计算呢? 下面的方法是针对这一问题产生的.

7.3.2 Fuzzy 矩阵变换法

设 $R=(r_{ij})_{m\times n}$, $S=(s_1,s_2,\cdots,s_m)'$, 定义矩阵 $U(R)=(r_{ij}^{(U)})_{m\times n}$ 如下

$$r_{ij}^{(U)}=\begin{cases}s_i, & r_{ij}>s_i\\ \varnothing, & r_{ij}\leqslant s_i\end{cases},\quad \forall i=1,2,\cdots,m;\quad j=1,2,\cdots,n \tag{7.3.5}$$

又令 $X^{(U)}=(x_1^{(U)},x_2^{(U)},\cdots,x_n^{(U)})'$, 其中 $x_j^{(U)}=\bigwedge_{i=1}^{m} r_{ij}^{(U)}$, $j=1,2,\cdots,n$. 并且规定:

(1) $\varnothing\wedge a=a\wedge\varnothing=a$, $\varnothing\vee a=a\vee\varnothing=a$, $\forall a\in[0,1]$;

(2) $\varnothing\wedge\varnothing=1$, $\varnothing\vee\varnothing=0$.

由定理 7.3.1 易证以下定理.

定理 7.3.5 $\mathscr{X}(R,S)\neq\varnothing$ 当且仅当 $X^{(U)}\in\mathscr{X}(R,S)$,此时 $X^{(U)}=R'\alpha S=\overline{X}$ 是其最大解.

又定义矩阵 $L(R)=(r_{ij}^{(L)})_{m\times n}$ 如下

$$r_{ij}^{(L)}=\begin{cases}s_i, & r_{ij}\geqslant s_i\\ \varnothing, & r_{ij}<s_i\end{cases},\quad \forall i=1,2,\cdots,m;\quad j=1,2,\cdots,n \tag{7.3.6}$$

定义矩阵 $C(R)=(r_{ij}^{(C)})_{m\times n}$ 如下

$$r_{ij}^{(C)}=\begin{cases}r_{ij}^{(L)}, & r_{ij}^{(L)}=\varnothing \text{ 或 } r_{ij}^{(L)}\leqslant x_j^{(U)}\\ \varnothing, & r_{ij}^{(L)}>x_j^{(U)}\end{cases},\quad \forall i=1,2,\cdots,m;\quad j=1,2,\cdots,n \tag{7.3.7}$$

分别称 $U(R)$, $L(R)$, $C(R)$ 为 $R\circ X=S$ 的上铣矩阵、平铣矩阵与备选矩阵. 由定义很容易得到

$$r_{ij}^{(C)}=\begin{cases}s_i, & s_i\leqslant r_{ij}\wedge\overline{x}_j\\ \varnothing, & \text{其他}\end{cases},\quad \forall i=1,2,\cdots,m;\quad j=1,2,\cdots,n \tag{7.3.8}$$

其中 $\overline{X}=(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\cdots,\overline{x}_n)'=R'\alpha S$.

定理 7.3.6 $\mathscr{X}(R,S)\neq\varnothing$ 的充分必要条件是 $\forall i=1,2,\cdots,m$, 存在 $j\in\{1,2,\cdots,n\}$, 使 $r_{ij}^{(C)}\neq\varnothing$.

证明 必要性

$\mathscr{X}(R,S)\neq\varnothing\Rightarrow\overline{X}=(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\cdots,\overline{x}_n)'$ 是最大解

$$\Rightarrow\forall i\in\{1,2,\cdots,m\},\ \bigvee_{j=1}^{n}(r_{ij}\wedge\overline{x}_j)=s_i$$

$$\Rightarrow\forall i\in\{1,2,\cdots,m\},\exists j_0\in\{1,2,\cdots,n\},r_{ij_0}\wedge\overline{x}_{j_0}=s_i$$

$$\Rightarrow\forall i\in\{1,2,\cdots,m\},\exists j_0\in\{1,2,\cdots,n\},\text{使得 }r_{ij_0}^{(C)}\neq\varnothing.$$

充分性 $\forall i=1,2,\cdots,m$，存在 $j_0\in\{1,2,\cdots,n\}$，使 $r_{ij_0}^{(C)}\neq\varnothing$，即 $r_{ij_0}\wedge\overline{x}_{j_0}\geqslant s_i$. 又 $\forall i\in\{1,2,\cdots,m\}$, $j\in\{1,2,\cdots,n\}$, $r_{ij}\wedge\overline{x}_j\leqslant s_i$. 由此 $r_{ij_0}\wedge\overline{x}_{j_0}=s_i$. 从而 $\bigvee\limits_{j=1}^{n}r_{ij}\wedge\overline{x}_j=s_i$. 这样 $\overline{X}\in\mathscr{X}(R,S)$, $\mathscr{X}(R,S)\neq\varnothing$. □

为了求出极小解，我们定义

$$Q(C(R))=\{q=(q(1),q(2),\cdots,q(m))\,|\,q(i)\in\{1,2,\cdots,n\},r_{iq(i)}^{(C)}\neq\varnothing,\ i=1,2,\cdots,m\}\tag{7.3.9}$$

将 $Q(C(R))$ 简记为 Q. 若 $Q\neq\varnothing$，则对 $q=(q(1),q(2),\cdots,q(m))\in Q$，定义矩阵 $E_q(R)=E_{q(1),q(2),\cdots,q(m)}(R)=(r_{ij}^{(q)})_{m\times n}$ 如下

$$r_{ij}^{(q)}=\begin{cases}r_{ij}^{(C)}, & j=q(i)\\ \varnothing, & j\neq q(i)\end{cases},\quad\forall i=1,2,\cdots,m;\quad j=1,2,\cdots,n\tag{7.3.10}$$

又令 $X_q=X_{q(1),q(2),\cdots,q(m)}=(x_1^{(q)},x_2^{(q)},\cdots,x_n^{(q)})'$，其中 $x_j^{(q)}=\bigvee\limits_{i=1}^{m}r_{ij}^{(q)}$, $j=1,2,\cdots,n$. 下面的定理给出了解集 $\mathscr{X}(R,S)$ 的结构.

定理 7.3.7 $\mathscr{X}(R,S)\neq\varnothing$ 当且仅当 $Q\neq\varnothing$. 此时

$$\mathscr{X}(R,S)=\bigcup_{q\in Q}\{X\in[0,1]^{n\times 1}\,|\,X_q\subseteq X\subseteq\overline{X}\}\tag{7.3.11}$$

证明 由定理 7.3.6 知 $\mathscr{X}(R,S)\neq\varnothing$ 当且仅当 $Q\neq\varnothing$. 下设 $Q\neq\varnothing$. 任取 $q=(q(1),q(2),\cdots,q(m))\in Q$，则必有 $X_q=(x_1^{(q)},x_2^{(q)},\cdots,x_n^{(q)})'\in X(R,S)$. 事实上，$\forall i\in\{1,2,\cdots,m\}$，有

$$\bigvee_{j=1}^{n}(r_{ij}\wedge x_j^{(q)})\geqslant r_{iq(i)}\wedge x_{q(i)}^{(q)}=r_{iq(i)}\wedge(\vee\{s_k\,|\,q(k)=q(i)\})\geqslant r_{iq(i)}\wedge s_i=s_i$$

这样 $R\circ X_q\supseteq S$. 又 $\forall i\in\{1,2,\cdots,m\}$

$$\{k'\,|\,j=q(k')\}\neq\varnothing\Rightarrow\forall k\in\{k'\,|\,j=q(k')\},\overline{x}_j=\overline{x}_{q(k)}\geqslant s_k$$
$$\Rightarrow\overline{x}_j=\overline{x}_{q(k)}\geqslant\vee\{s_k{}'\,|\,q(k')=j\}=x_j^{(q)}$$
$$\{k'\,|\,j=q(k')\}=\varnothing\Rightarrow x_j^{(q)}=0\leqslant\overline{x}_j$$

从而 $X_q\subseteq\overline{X}$. 由此得 $R\circ X_q\subseteq R\circ\overline{X}=S$. 所以 $R\circ X_q=S$，即 $X_q\in\mathscr{X}(R,S)$. 从而容易证明

$$\bigcup_{q\in Q}\{X\in[0,1]^{n\times 1}\mid X_q\subseteq X\subseteq \overline{X}\}\subseteq \mathscr{X}(R,S)$$

另一方面设 $X\in\mathscr{X}(R,S)$，则 $X\subseteq\overline{X}$，且存在 $q=(q(1),q(2),\cdots,q(m))\in Q$，使 $r_{iq(i)}\wedge x_{q(i)}=s_i(i=1,2,\cdots,m)$. 任取 $j\in\{1,2,\cdots,n\}$，则

$\{k'\mid j=q(k')\}\neq\varnothing\Rightarrow\forall k\in\{k'\mid j=q(k')\},r_{kj}\wedge x_j=r_{kq(k)}\wedge x_{q(k)}=s_k\Rightarrow x_j\geqslant s_k$

$$\Rightarrow x_j\geqslant\bigvee\{s_k'\mid q(k')=j\}=x_j^{(q)}$$

$$\{k'\mid j=q(k')\}=\varnothing\Rightarrow x_j^{(q)}=0\leqslant x_j$$

从而总有 $x_j\geqslant x_j^{(q)}$，即 $X\supseteq X_q$，这样 $X_q\subseteq X\subseteq\overline{X}$，故

$$\mathscr{X}(R,S)\subseteq\bigcup_{q\in Q}\{X\in[0,1]^{n\times 1}\mid X_q\subseteq X\subseteq\overline{X}\}$$

综合而得 $$\mathscr{X}(R,S)=\bigcup_{q\in Q}\{X\in[0,1]^{n\times 1}\mid X_q\subseteq X\subseteq\overline{X}\}.$$ □

如果 $Q\neq\varnothing$，则 $E_q(R)$ 称为拟极小阵，$X_q(q\in Q)$ 称为 $R\circ X=S$ 的拟极小解.

例 7.3.4 对于 Fuzzy 关系方程

$$\begin{bmatrix}0.3&0.2&0.7&0.8\\0.5&0.4&0.4&0.9\\0.7&0.3&0.2&0.7\\0.9&0.6&0.1&0.2\\0.8&0.5&0.6&0.4\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.7\\0.4\\0.4\\0.3\\0.6\end{bmatrix}$$

通过下列步骤可以求出该方程的全部解：

(1)变换行次序

将方程按 Fuzzy 向量 S 的分量由大到小的顺序写成标准排列，并将 S 写到 Fuzzy 矩阵 R 的右侧.

$$\begin{bmatrix}0.3&0.2&0.7&0.8\\0.8&0.5&0.6&0.4\\0.5&0.4&0.4&0.9\\0.7&0.3&0.2&0.7\\0.9&0.6&0.1&0.2\end{bmatrix}\quad\begin{matrix}0.7\\0.6\\0.4\\0.4\\0.3\end{matrix}$$

(2)求上铣矩阵与上界

在 R 中，若 $r_{ij}>s_i$，则将 r_{ij} 换为 s_i；若 $r_{ij}\leqslant s_i$，则将 r_{ij} 换成 $\varnothing$（为了简洁用空白表示），从而得到 $U(R)$；然后将 $U(R)$ 中的每一列求下确界得 $X^{(U)}$，并将所得结果写到矩阵上端，得

$$\begin{matrix} 0.3 & 0.3 & 1 & 0.4 \end{matrix}$$
$$U(R)=\begin{bmatrix} & & & 0.7 \\ 0.6 & & & \\ 0.4 & & & 0.4 \\ 0.4 & & & 0.4 \\ 0.3 & 0.3 & & \end{bmatrix}$$

(3)求平铣矩阵与备选矩阵

在 R 中,若 $r_{ij}\geqslant s_i$,则将 r_{ij} 换为 s_i;若 $r_{ij}<s_i$,则将 r_{ij} 换成空白,从而得到平铣矩阵 $L(R)$,仍将所得结果写到矩阵上端;然后在 $L(R)$ 中逐列划去该列中大于上面 Fuzzy 向量所分别对应分量的元素,即得备选矩阵 $C(R)$.

$$\begin{matrix} 0.3 & 0.3 & 1 & 0.4 \end{matrix}$$
$$L(R)=\begin{bmatrix} & & 0.7 & \underline{0.7} \\ \underline{0.6} & & 0.6 & \\ \underline{0.4} & \underline{0.4} & 0.4 & 0.4 \\ \underline{0.4} & & & 0.4 \\ 0.3 & 0.3 & & \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} 0.3 & 0.3 & 1 & 0.4 \end{matrix}$$
$$C(R)=\begin{bmatrix} & & 0.7 & \\ & & 0.6 & \\ & & 0.4 & 0.4 \\ & & & 0.4 \\ 0.3 & 0.3 & & \end{bmatrix}$$

(4)判别方程是否有解并求其解

在 $C(R)$ 中每一行都有非 $\varnothing$ 的元素,故由定理 7.3.6 知该方程有解. 从 $C(R)$ 中每一行选定一个非 $\varnothing$ 的元素,其他元素为 $\varnothing$,得拟极小阵 $E_{q(1),q(2),\cdots,q(m)}$,然后将 $E_{q(1),q(2),\cdots,q(m)}$ 中的每一列求上确界得拟极小解 $(X_{q(1),q(2),\cdots,q(m)})'$,所得结果也写到矩阵上端. 显然该例的拟极小解个数为 $1\times1\times2\times1\times2=4$,其拟极小阵与拟极小解如下

$$\begin{matrix} 0.3 & 0 & 0.7 & 0.4 \end{matrix}$$
$$E_{3,3,3,4,1}=\begin{bmatrix} & & 0.7 & \\ & & 0.6 & \\ & & 0.4 & \\ & & & 0.4 \\ 0.3 & & & \end{bmatrix},\quad X_{3,3,3,4,1}=(0.3,0,0.7,0.4)'$$

$$E_{3,3,3,4,2}=\begin{matrix} 0 & 0.3 & 0.7 & 0.4 \\ \hline & & 0.7 & \\ & & 0.6 & \\ & & 0.4 & \\ & & & 0.4 \\ & 0.3 & & \end{matrix},\ X_{3,3,3,4,2}=(0,0.3,0.7,0.4)'$$

$$E_{3,3,4,4,1}=\begin{matrix} 0.3 & 0 & 0.7 & 0.4 \\ \hline & & 0.7 & \\ & & 0.6 & \\ & & & 0.4 \\ & & & 0.4 \\ 0.3 & & & \end{matrix},\ X_{3,3,4,4,1}=(0.3,0,0.7,0.4)'$$

$$E_{3,3,4,4,2}=\begin{matrix} 0 & 0.3 & 0.7 & 0.4 \\ \hline & & 0.7 & \\ & & 0.6 & \\ & & & 0.4 \\ & & & 0.4 \\ & 0.3 & & \end{matrix},\ X_{3,3,4,4,2}=(0,0.3,0.7,0.4)'$$

从上面的计算可知，原方程有两个不同的拟极小解(也是极小解). 故解集为

$$\mathscr{X}(R,S)=\begin{bmatrix} 0.3 \\ [0,0.3] \\ [0.7,1] \\ 0.4 \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} [0,0.3] \\ 0.3 \\ [0.7,1] \\ 0.4 \end{bmatrix}. \qquad \square$$

上面的求解方法是通过对 R 进行若干个 Fuzzy 矩阵变换来完成的，所以称为 Fuzzy 矩阵变换法. 值得注意的是对于例 7.3.4 如果使用 Tsukamoto 方法，则

$$Y=\begin{bmatrix} 0.7\varepsilon 0.3 & 0.7\varepsilon 0.2 & 0.7\varepsilon 0.7 & 0.7\varepsilon 0.8 \\ 0.4\varepsilon 0.5 & 0.4\varepsilon 0.4 & 0.4\varepsilon 0.4 & 0.4\varepsilon 0.9 \\ 0.4\varepsilon 0.7 & 0.4\varepsilon 0.3 & 0.4\varepsilon 0.2 & 0.4\varepsilon 0.7 \\ 0.3\varepsilon 0.9 & 0.3\varepsilon 0.6 & 0.3\varepsilon 0.1 & 0.3\varepsilon 0.2 \\ 0.6\varepsilon 0.8 & 0.6\varepsilon 0.5 & 0.6\varepsilon 0.6 & 0.6\varepsilon 0.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varnothing & \varnothing & [0.7,1] & 0.7 \\ 0.4 & [0.4,1] & [0.4,1] & 0.4 \\ 0.4 & \varnothing & \varnothing & 0.4 \\ 0.3 & 0.3 & \varnothing & \varnothing \\ 0.6 & \varnothing & [0.6,1] & \varnothing \end{bmatrix}$$

这时为了求拟极小解，必须考虑 $2\times 4\times 2\times 2\times 2=64$ 个 W 矩阵. 该例说明 Fuzzy 矩阵变换法的计算量比 Tsukamoto 方法有所改善. 但是当 Fuzzy 关系方

程的阶数较高时,用 Fuzzy 矩阵变换法还存在许多的重复和无效的计算,看下面的例子:

例 7.3.5 对于 Fuzzy 关系方程

$$\begin{bmatrix} 0.2 & 0.7 & 0.2 & 0.1 & 0.2 & 0.4 \\ 0.5 & 0.8 & 0.7 & 0.3 & 0.6 & 0.6 \\ 0.4 & 0.7 & 1 & 0.7 & 0.8 & 0.9 \\ 0.1 & 0.2 & 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.1 \\ 0.4 & 0.6 & 0.3 & 0.5 & 0.2 & 0.9 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.6 \\ 0.7 \\ 0.2 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

若按 Tsukamoto 法求解,则

$$Y = \begin{bmatrix} [0.2,1] & 0.2 & [0.2,1] & \varnothing & [0.2,1] & 0.2 \\ \varnothing & 0.6 & 0.6 & \varnothing & [0.6,1] & [0.6,1] \\ \varnothing & [0.7,1] & 0.7 & [0.7,1] & 0.7 & 0.7 \\ \varnothing & [0.2,1] & \varnothing & \varnothing & [0.2,1] & \varnothing \\ \varnothing & 0.5 & \varnothing & [0.5,1] & \varnothing & 0.5 \end{bmatrix}$$

要考虑 $5 \times 4 \times 5 \times 2 \times 3 = 600$ 个 $W_{q(1),q(2),q(3),q(4),q(5)}$ 矩阵.

若按 Fuzzy 矩阵变换法求解,则经变换行次序后的备选矩阵为

$$C(R) = \begin{bmatrix} & & & 0.7 & 0.7 & \\ & & 0.6 & & 0.6 & \\ & & & 0.5 & & \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & & 0.2 & 0.2 \\ & 0.2 & & & 0.2 & \end{bmatrix}$$

要处理 $2 \times 2 \times 1 \times 5 \times 2 = 40$ 个 $E_{q(1),q(2),q(3),q(4),q(5)}$ 矩阵. 还有许多是重复与无效的,如:

$X_{4,3,4,2,2} = (0,0.2,0.6,0.7,0,0)' = X_{4,3,4,3,2}$,重复!

$X_{4,3,4,2,2} = (0,0.2,0.6,0.7,0,0)' \subset X_{4,3,4,1,2} = (0.2,0.2,0.6,0.7,0,0)'$,

这说明 $X_{4,3,4,1,2}$ 不是极小解,无效! □

7.3.3 有效路径法

下面将在 Fuzzy 矩阵变换法的基础上进一步来解决重复与无效的计算问题,从而使得方程的求解变得简洁、直观.

设 $R \circ X = S$ 的第 i 个方程

$$(r_{i1} \wedge x_1) \vee (r_{i2} \wedge x_2) \vee \cdots \vee (r_{in} \wedge x_n) = s_i$$

的解集为 $\mathscr{X}(i)$ $(i=1,2,\cdots,m)$，而 $\forall j\in\{1,2,\cdots,n\}$，设 Fuzzy 不等式组

$$\begin{cases} r_{i1}\wedge x_1\leqslant s_i \\ \vdots \\ r_{i,j-1}\wedge x_{j-1}\leqslant s_i \\ r_{ij}\wedge x_j=s_i \\ r_{i,j+1}\wedge x_{j+1}\leqslant s_i \\ \vdots \\ r_{in}\wedge x_n\leqslant s_i \end{cases} \tag{7.3.12}$$

的解集是 $\mathscr{X}(i,j)$. 则容易验证

$$\mathscr{X}(i)=\bigcup_{j=1}^{n}\mathscr{X}(i,j)$$

$$\mathscr{X}(R,S)=\bigcap_{i=1}^{m}\mathscr{X}(i)=\bigcap_{i=1}^{m}\Big(\bigcup_{j=1}^{n}\mathscr{X}(i,j)\Big).$$

为了消除 Fuzzy 矩阵法中的重复计算，下面的几个定理是基础.

定理 7.3.8 设 $i_0\in\{1,2,\cdots,m\}$，$j_0\in\{1,2,\cdots,n\}$，满足 $r_{i_0j_0}<s_{i_0}$，则

$$\mathscr{X}(i_0,j_0)=\varnothing.$$

证明 当 $r_{i_0j_0}<s_{i_0}$ 时，方程 $r_{i_0j_0}\wedge x=s_{i_0}$ 无解，即 $\mathscr{X}(i_0,j_0)=\varnothing$. □

定理 7.3.9 设 $j_0\in\{1,2,\cdots,n\}$，$i_1,i_2\in\{1,2,\cdots,m\}$，使得

$$r_{i_1j_0}\geqslant s_{i_1},\ r_{i_2j_0}>s_{i_2},\ s_{i_1}>s_{i_2} \tag{7.3.13}$$

则

$$\mathscr{X}(i_1,j_0)\cap\mathscr{X}(i_2,j_0)=\varnothing. \tag{7.3.14}$$

证明 若不然，设有解 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'\in\mathscr{X}(i_1,j_0)\cap\mathscr{X}(i_2,j_0)$，则有

$$r_{i_1j_0}\wedge x_{j_0}=s_{i_1},\ r_{i_2j_0}\wedge x_{j_0}=s_{i_2}$$

由于 $r_{i_2j_0}\wedge x_{j_0}=s_{i_2}\xrightarrow{r_{i_2j_0}>s_{i_2}}x_{j_0}=s_{i_2}$，则

$$r_{i_1j_0}\wedge x_{j_0}\leqslant x_{j_0}=s_{i_2}<s_{i_1}$$

这显然是一个矛盾. 从而 $\mathscr{X}(i_1,j_0)\cap\mathscr{X}(i_2,j_0)=\varnothing$. □

定理 7.3.10 设 $j_0\in\{1,2,\cdots,n\}$，$i_1,i_2\in\{1,2,\cdots,m\}$，下列结论成立：

(1)若 $r_{i_2j_0}\geqslant s_{i_2}$，$s_{i_2}<s_{i_1}$，则

$\forall j\in\{1,2,\cdots,n\}$，$\mathscr{X}(i_1,j_0)\cap\mathscr{X}(i_2,j_0)\supseteq\mathscr{X}(i_1,j_0)\cap\mathscr{X}(i_2,j)$；

(2)若 $r_{i_1j_0}\geqslant s_{i_1}$，$s_{i_2}=s_{i_1}$，则

$\forall j\in\{1,2,\cdots,n\}$，$\mathscr{X}(i_1,j_0)\cap\mathscr{X}(i_2,j_0)\supseteq\mathscr{X}(i_1,j_0)\cap\mathscr{X}(i_2,j_0)$.

证明 (1)、(2)的证明是类似的，故只证(1).

任取 $j\in\{1,2,\cdots,n\}$，若 $j=j_0$，(1)显然成立，故设 $j\neq j_0$. 任取 $X=(x_1,$

$x_2,\cdots,x_n)'\in\mathscr{X}(i_1,j_0)\cap\mathscr{X}(i_2,j)$，则 $\forall k\in\{1,2,\cdots,n\}$，有

$$X\in X(i_2,j)\Rightarrow r_{i_2k}\wedge x_k\begin{cases}\leqslant s_{i_2}, & k\neq j\\ =s_{i_2}, & k=j\end{cases}$$

$$X\in X(i_1,j_0)\Rightarrow r_{i_1k}\wedge x_k\begin{cases}\leqslant s_{i_1}, & k\neq j_0\\ =s_{i_1}, & k=j_0\end{cases}$$

故当 $k\neq j_0$ 时，$r_{i_2k}\wedge x_k\leqslant s_{i_2}$；而当 $k=j_0$ 时，也有 $r_{i_2j_0}\wedge x_{j_0}\leqslant s_{i_2}$. 考虑到条件以及上面第二式得，$x_{j_0}\geqslant s_{i_1}>s_{i_2}\Rightarrow r_{i_2j_0}\wedge x_{j_0}\geqslant s_{i_2}$，从而 $r_{i_2j_0}\wedge x_{j_0}=s_{i_2}$. 即

$$r_{i_2k}\wedge x_k\begin{cases}\leqslant s_{i_2} & k\neq j_0\\ =s_{i_2} & k=j_0\end{cases}$$

从而 $X\in\mathscr{X}(i_1,j_0)\cap\mathscr{X}(i_2,j_0)$，故 (1)成立. □

由定理 7.3.8、定理 7.3.9 及定理 7.3.10 可知，可以利用 r_{ij} 与 $\mathscr{X}(i,j)$ 的对应关系，优选 $q\in Q$，筛选掉某些对应于 $X_q\subseteq X_{q'}$ 的 $q'\in Q$. 令

$$J_i=\{j\in\{1,2,\cdots,m\}\mid r_{ij}^{(C)}\neq\varnothing\}.$$

优选原则如下：

取 $i_0\in\{1,2,\cdots,m\}$，假定对 $i<i_0$ 的 $q(i)$ 均已从 J_i 中选定，按如下方法确定 $q(i_0)$ 的选取.

情形 I，$\{q(1),q(2),\cdots,q(i_0-1)\}\cap J_{i_0}\neq\varnothing$.
则任取 $q(i_0)\in\{q(1),q(2),\cdots,q(i_0-1)\}\cap J_{i_0}$；

情形 II，$\{q(1),q(2),\cdots,q(i_0-1)\}\cap J_{i_0}=\varnothing$.
这时 $q(i_0)$ 的选取要遍历 J_{i_0}.

按上述原则得到的 $q=(q(1),q(2),\cdots,q(m))$ 称为求解集(或特征矩阵 $C(R)$)的有效路径(effective path)，有效路径集记为 $W(C(R))$，而 $q\in Q(C(R))$ 称为求解集(或特征矩阵 $C(R)$)的 Q 路径(Q path).

例 7.3.6　对于例 7.3.5 中的 Fuzzy 关系方程

$$\begin{bmatrix}0.2 & 0.7 & 0.2 & 0.1 & 0.2 & 0.4\\ 0.5 & 0.8 & 0.7 & 0.3 & 0.6 & 0.6\\ 0.4 & 0.7 & 1 & 0.7 & 0.8 & 0.9\\ 0.1 & 0.2 & 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.1\\ 0.4 & 0.6 & 0.3 & 0.5 & 0.2 & 0.9\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.2\\0.6\\0.7\\0.2\\0.5\end{bmatrix}$$

最大解为 $\overline{X}=(1,0.2,0.6,1,0.7,0.2)'$，并且已求出备选矩阵

$$C(R)=\begin{bmatrix} & & & 0.7 & 0.7 & \\ & & 0.6 & & 0.6 & \\ & & & 0.5 & & \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & & 0.2 & 0.2 \\ & 0.2 & & & 0.2 & \end{bmatrix}$$

则易得

$$J_1=\{4,5\},\quad J_2=\{3,5\},\quad J_3=\{4\},\quad J_4=\{1,2,3,5,6\},\quad J_5=\{2,5\}$$

下面是按上述优选原则寻找有效路径的过程。

$$q_1=4\xrightarrow{\{4\}\cap J_2=\varnothing}\begin{cases} q_2=3\xrightarrow{\{4,3\}\cap J_3=\{4\}}q_3=4\xrightarrow{\{4,3,4\}\cap J_4=\{3\}}q_4=3\xrightarrow{\{4,3,4,3\}\cap J_5=\varnothing}\begin{cases}q_5=2\\ q_5=5\end{cases} \\ q_2=5\xrightarrow{\{4,5\}\cap J_3=\{4\}}q_3=4\xrightarrow{\{4,5,4\}\cap J_4=\{5\}}q_4=5\xrightarrow{\{4,5,4,5\}\cap J_5=\{5\}}q_5=5 \end{cases}$$

$$q_1=5\xrightarrow{\{5\}\cap J_2=\{5\}}q_2=5\xrightarrow{\{5,5\}\cap J_3=\varnothing}q_3=4\xrightarrow{\{5,5,4\}\cap J_4=\{5\}}q_4=5\xrightarrow{\{5,5,4,5\}\cap J_5=\{5\}}q_5=5$$

则得到四个极小解

$$E_{4,3,4,3,2}=\begin{bmatrix} & & & 0.7 & & \\ & & 0.6 & & & \\ & & & 0.5 & & \\ & & 0.2 & & & \\ & 0.2 & & & & \end{bmatrix},\ X_{4,3,4,3,2}=(0,0.2,0.6,0.7,0,0)'$$

$$E_{4,3,4,3,5}=\begin{bmatrix} & & & 0.7 & & \\ & & 0.6 & & & \\ & & & 0.5 & & \\ & & 0.2 & & & \\ & & & & 0.2 & \end{bmatrix},\ X_{4,3,4,3,5}=(0,0,0.6,0.7,0.2,0)'$$

$$E_{4,5,4,5,5}=\begin{bmatrix} & & & 0.7 & & \\ & & & & 0.6 & \\ & & & 0.5 & & \\ & & & & 0.2 & \\ & & & & 0.2 & \end{bmatrix},\ X_{4,5,4,5,5}=(0,0,0,0.7,0.6,0)'$$

$$E_{5,5,4,4,5}=\begin{bmatrix} & & & & 0.7 & \\ & & & & 0.6 & \\ & & & 0.5 & & \\ & & & & 0.2 & \\ & & & & 0.2 & \end{bmatrix},\ X_{5,5,4,5,5}=(0,0,0,0.5,0.7,0)'$$

故原方程的解集为

$$\mathscr{X}(R,\ S)=\begin{bmatrix}[0,1]\\0.2\\0.6\\[0.7,1]\\[0,0.7]\\[0,0.2]\end{bmatrix}\cup\begin{bmatrix}[0,1]\\[0,0.2]\\0.6\\[0.7,1]\\[0.2,0.7]\\[0,0.2]\end{bmatrix}\cup\begin{bmatrix}[0,1]\\[0,0.2]\\[0,0.6]\\[0.7,1]\\[0.6,0.7]\\[0,0.2]\end{bmatrix}\cup\begin{bmatrix}[0,1]\\[0,0.2]\\[0,0.6]\\[0.5,1]\\0.7\\[0,0.2]\end{bmatrix}.\quad\square$$

7.3.4　保守路径法

首先引入布尔矩阵的路径的概念. 设布尔矩阵 $B=(b_{ij})_{m\times n}\in\{0,1\}^{m\times n}$，

令　　$J_i=\{j\in\{1,2,\cdots,n\}\mid b_{ij}=1\},\quad i=1,2,\cdots,m.$

定义 7.3.1　如果 $q(i)\in J_i, i=1,2,\cdots,m$，则 $q=(q(1),q(2),\cdots,q(m))$ 称为布尔矩阵 B 的一条路径，记

$$Q(B)=\{q=(q(1),q(2),\cdots,q(m))\mid q(i)\in J_i,\quad i=1,2,\cdots,m\}\tag{7.3.15}$$

$q=(q(1),q(2),\cdots,q(m))$ 也称为布尔阵 B 的 Q 路径(Q path). 对于 J_i 按有效选取原则得到的 $q=(q(1),q(2),\cdots,q(m))$ 称为布尔阵 B 的有效路径(effective path). 对于 B 的一条 Q 路径 $q=(q(1),q(2),\cdots,q(m))$，如果 $\forall k\in\{2,3,\cdots,m\}$，当 $\{q(1),q(2),\cdots,q(k-1)\}\cap J_k\neq\varnothing$ 时，$q(i)$ 是 $\{q(1),q(2),\cdots,q(k-1)\}$ 中首先进入 J_k 中的元素，即

$$i=\wedge\ \{t\in\{1,2,\cdots,k-1\}\mid q(t)\in J_k\}$$

那么 $q(k)=q(i)$，则称 $q=(q(1),q(2),\cdots,q(m))$ 是布尔矩阵 B 的一条保守路径(conservative path). 特别地，当 $m=1$ 时，约定每一条 Q 路径均为保守路径. B 的有效路径集和保守路径集分别用 $W(B)$ 和 $Q_c(B)$ 表示.

很显然，$Q_c(B)\subseteq W(B)\subseteq Q(B)$.

对于 Fuzzy 关系方程 $R\circ X=S$，令

$$d_{ij}=\begin{cases}1, & s_i\leqslant r_{ij}\ \wedge\ \bar{x}_j\\0, & s_i>r_{ij}\ \wedge\ \bar{x}_j\end{cases}$$

称 $D=(d_{ij})_{m\times n}\in\{0,1\}^{m\times n}$ 为 $R\circ X=S$ 的(布尔)特征矩阵.

很显然在 Fuzzy 矩阵变换法中的 $Q(C(R))$ 即为 $Q(D)$，有效路径法中的 $W(C(R))$ 即为 $W(D)$. 所以，在使用 Fuzzy 矩阵变换法(有效路径法)求极小解中，避免重复与无效计算的问题，就是在 $Q(D)$ ($W(D)$)中优选路径的问题.

定理 7.3.11　设 X 是 $R\circ X=S$ 的极小解，则存在唯一的 $q\in Q_c(D)$，使得

$X=X_q$. 反之,如果 $q\in Q_c(D)$,则 X_q 是 $R\circ X=S$ 的极小解.

证明 参见文献(汪培庄,罗承忠,1984). □

由定理 7.3.11 得到:方程 $R\circ X=S$ 极小解的个数等于保守路径的条数,即

$$|\underline{\mathscr{X}}(R,S)|=|Q_c(D)|.$$

例 7.3.7 对于 Fuzzy 关系方程

$$\begin{bmatrix}0.7 & 0.8 & 0.7 & 1\\0.6 & 0.6 & 0.6 & 0\\0.4 & 0 & 0.4 & 0.3\\0.2 & 0.2 & 0.2 & 0\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.7\\0.6\\0.4\\0.2\end{bmatrix}$$

容易计算 $\overline{X}=R'\alpha S=(1,0.7,1,0.7)'$ 为最大解. 特征矩阵为

$$D=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1 & 0\\1 & 0 & 1 & 0\\1 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

这时 D 的 Q 路径个数为 $|Q(D)|=4\times3\times2\times3=54$,有效路径有 10 条. 但只有 8 条保守路径,即 $|\underline{\mathscr{X}}(R,S)|=|Q_c(D)|=8$,如表 7.3.1 所示.

表 7.3.1

	$q(1)$	$q(2)$	$q(3)$	$q(4)$
q_1^c	1	1	1	1
q_2^c	2	2	1	1
q_3^c	2	2	3	2
q_4^c	3	3	3	3
q_5^c	4	1	1	1
q_6^c	4	2	1	2
q_7^c	4	2	3	2
q_8^c	4	3	3	3

相应的极小解为

$$\underline{X}_1=\begin{bmatrix}0.7\\0\\0\\0\end{bmatrix},\quad \underline{X}_2=\begin{bmatrix}0.4\\0.7\\0\\0\end{bmatrix},\quad \underline{X}_3=\begin{bmatrix}0\\0.7\\0.4\\0\end{bmatrix},\quad \underline{X}_4=\begin{bmatrix}0\\0\\0.7\\0\end{bmatrix}$$

$$\underline{X}_5=\begin{bmatrix}0.6\\0\\0\\0.7\end{bmatrix},\quad \underline{X}_6=\begin{bmatrix}0.4\\0.6\\0\\0.7\end{bmatrix},\quad \underline{X}_7=\begin{bmatrix}0\\0.6\\0.4\\0.7\end{bmatrix},\quad \underline{X}_8=\begin{bmatrix}0\\0\\0.6\\0.7\end{bmatrix}$$

从而可以写出其解集

$$\mathscr{X}(R,\ S)=\begin{bmatrix}[0.7,1]\\ [0,0.7]\\ [0,1]\\ [0,0.7]\end{bmatrix}\cup\begin{bmatrix}[0.4,1]\\ 0.7\\ [0,1]\\ [0,0.7]\end{bmatrix}\cup\begin{bmatrix}[0,1]\\ 0.7\\ [0.4,1]\\ [0,0.7]\end{bmatrix}\cup\begin{bmatrix}[0,1]\\ [0,0.7]\\ [0.7,1]\\ [0,0.7]\end{bmatrix}\cup$$

$$\begin{bmatrix}[0.6,1]\\ [0,0.7]\\ [0,1]\\ 0.7\end{bmatrix}\cup\begin{bmatrix}[0.4,1]\\ [0.6,0.7]\\ [0,1]\\ 0.7\end{bmatrix}\cup\begin{bmatrix}[0,1]\\ [0.6,0.7]\\ [0.4,1]\\ 0.7\end{bmatrix}\cup\begin{bmatrix}[0,1]\\ [0,0.7]\\ [0.6,1]\\ 0.7\end{bmatrix}.$$ □

7.3.5 三角分解法

类似普通线性方程的三角分解法，下面讨论 Fuzzy 关系方程的三角分解法（胡宝清，1987）.

定义 7.3.2 设 $R\in[0,1]^{m\times n}$.

(1)若 $\forall i,j(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 有

$$r_{ij}\geqslant r_{ik}\wedge r_{kj},\ k=1,2,\cdots,\min\{i,j\} \tag{7.3.16}$$

则称 R 为绝对上占优.

(2)若 $\forall i,j(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 有

$$r_{ij}\geqslant r_{ik}\wedge r_{kj},\ k=\max\{i,j\},\cdots,\min\{m,n\} \tag{7.3.17}$$

则称 R 为绝对下占优.

(3)若对 $i=1,2,\cdots,\min\{m,n\}$ 有

$$r_{ii}\geqslant r_{ij},\ j=1,2,\cdots,i\ (r_{ii}\geqslant r_{ij},\ j=i,\cdots,n) \tag{7.3.18}$$

则称 R 为左(右)对角占优.

(4)若对 $j=1,2,\cdots,\min\{m,n\}$ 有

$$r_{jj}\geqslant r_{ij},\ i=1,2,\cdots,j\ (r_{jj}\geqslant r_{ij},\ i=j,\cdots,m) \tag{7.3.19}$$

则称 R 为上(下)对角占优.

定义 7.3.3 设 $R\in[0,1]^{m\times n}$，若存在三角阵 $P\in[0,1]^{m\times k}$ 和 $Q\in[0,1]^{k\times n}$ $(1\leqslant k\leqslant\min\{m,n\})$，使得 $R=P\circ Q$，则称 R 可以三角分解.

定理 7.3.12 设 $R\in[0,1]^{m\times n}$，$S\in[0,1]^{m\times l}$，并且存在三角阵 $P\in[0,1]^{m\times k}$ 和 $Q\in[0,1]^{k\times n}$，使得 $R=P\circ Q$，则 X 是 $R=P\circ Q$ 的解的充分必要

条件是存在 $Y \in [0,1]^{k\times l}$ 使得 $P \circ Y = S$，且 X 是 $Q \circ X = Y$ 的解.

例 7.3.8 设

$$\begin{bmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0.1 & 0.2 & 0.2 \\ 0.5 & 0.3 & 0.4 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.2 \\ 0.4 \end{bmatrix}$$

系数矩阵分解为

$$\begin{bmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0.1 & 0.2 & 0.2 \\ 0.5 & 0.3 & 0.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 & & \\ 0.1 & 0.2 & \\ 0.5 & 0.3 & 0.4 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 0.3 & 0.3 \\ & 1 & 0.2 \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

由

$$\begin{bmatrix} 0.4 & & \\ 0.1 & 0.2 & \\ 0.5 & 0.3 & 0.4 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.2 \\ 0.4 \end{bmatrix}$$

得 $$y_1 = 0.3, \quad y_2 = [0.2,1], \quad y_3 = [0.4,1]$$

由 $$\begin{bmatrix} 1 & 0.3 & 0.3 \\ & 1 & 0.2 \\ & & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3 \\ [0.2,1] \\ [0.4,1] \end{bmatrix}$$

得全体解 $\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 \in [0,0.3], x_2 \in [0,1], x_3 \in [0.4,1]\}$. □

定义 7.3.4 设 $R = (r_{ij})_{m\times n} \in [0,1]^{m\times n} (m \geqslant n)$，$R = P \circ Q$，其中

$$P = \begin{bmatrix} r_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{m1} & r_{m2} & \cdots & r_{mn} \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & r_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

则称 $R = P \circ Q$ 为 R 的 I_1 型三角分解. 若

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ r_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{m1} & r_{m2} & \cdots & r_{mn} \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & r_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & r_{nn} \end{bmatrix}$$

则称 $R=P\circ Q$ 为 R 的 I_2 型三角分解.

定义 7.3.5 设 $R=(r_{ij})_{n\times n}\in[0,1]^{n\times n}$，$R=P\circ Q$，其中

$$P=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \cdots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & r_{23} & \cdots & r_{2n} \\ 0 & 0 & r_{33} & \cdots & r_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & r_{nn} \end{bmatrix},\quad Q=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ r_{21} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ r_{n-1,1} & r_{n-1,2} & \cdots & 1 & 0 \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

则称 $R=P\circ Q$ 为 R 的 I_3 型三角分解. 若

$$P=\begin{bmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} & \cdots & r_{1n} \\ 0 & 1 & r_{23} & \cdots & r_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & r_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad Q=\begin{bmatrix} r_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ r_{n-1,1} & r_{n-1,2} & \cdots & r_{n-1,n-1} & 0 \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{n,n-1} & r_{nn} \end{bmatrix}$$

则称 $R=P\circ Q$ 为 R 的 I_4 型三角分解.

定理 7.3.13 若 $R\in[0,1]^{m\times n}(m\geqslant n)$ 右对角占优，则 R 可以作 I_1 型三角分解的充分必要条件是 R 绝对上占优.

证明 充分性 设 R 右对角占优且绝对上占优，令 $P=(p_{ij})_{m\times n}$，$Q=(q_{ij})_{n\times n}$，其中

$$p_{ij}=\begin{cases} r_{ij}, & i\geqslant j \\ 0, & i<j \end{cases}\quad i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n$$

$$q_{ij}=\begin{cases} 0, & i>j \\ 1, & i=j \\ r_{ij}, & i<j \end{cases}\quad i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,n$$

只要验证
$$(p_{ij})_{m\times n}\circ(q_{ij})_{n\times n}=(r_{ij})_{m\times n}$$

事实上
$$\bigvee_{k=1}^{n}(p_{ik}\wedge q_{k1})=r_{i1}\wedge 1=r_{i1}(i=1,2,\cdots,m)$$

$$\bigvee_{k=1}^{n}(p_{1k}\wedge q_{kj})=r_{11}\wedge r_{1j}=r_{1j}(j=1,2,\cdots,n)$$

如果 $i\geqslant j\geqslant 2$，则

$$\bigvee_{k=1}^{n}(p_{ik}\wedge q_{kj})=\bigvee_{k=1}^{j-1}(r_{ik}\wedge r_{kj})\vee r_{ij}=r_{ij}\quad\text{(由绝对上占优性)}$$

如果 $2\leqslant i<j$，则

$$\bigvee_{k=1}^{n}(p_{ik}\wedge q_{kj})=\bigvee_{k=1}^{i-1}(r_{ik}\wedge r_{kj})\vee(r_{ii}\wedge r_{ij})=\bigvee_{k=1}^{i-1}(r_{ik}\wedge r_{kj})\vee r_{ij}\text{(由右对角占优性)}$$

$= r_{ij}$（由绝对上占优性）.

必要性　设 R 右对角占优且可以作三角分解 $P \circ Q$.
如果 $i \geqslant j \geqslant 2$，则

$$r_{ij} = \bigvee_{k=1}^{n} (p_{ik} \wedge q_{kj}) = \bigvee_{k=1}^{j-1} (r_{ik} \wedge r_{kj}) \vee r_{ij}$$

即

$$r_{ij} \geqslant \bigvee_{k=1}^{j-1} (r_{ik} \wedge r_{kj}) \geqslant r_{ik} \wedge r_{kj},\ k=1,2,\cdots,j-1$$

如果 $2 \leqslant i < j$，则

$$r_{ij} = \bigvee_{k=1}^{n} (p_{ik} \wedge q_{kj}) = \bigvee_{k=1}^{i-1} (r_{ik} \wedge r_{kj}) \vee (r_{ii} \wedge r_{ij}) = \bigvee_{k=1}^{i-1} (r_{ik} \wedge r_{kj}) \vee r_{ij}(\text{由右对角占优性})$$

$$r_{ij} \geqslant \bigvee_{k=1}^{i-1} (r_{ik} \wedge r_{kj}) \geqslant r_{ik} \wedge r_{kj},\ k=1,2,\cdots,i-1$$

即 R 绝对上占优. □

同理可证以下定理.

定理 7.3.14　若 $R \in [0,1]^{m\times n} (m \geqslant n)$ 下对角占优，则 R 可以作 I_2 型三角分解的充分必要条件是 R 绝对上占优.

定理 7.3.15　若 $R \in [0,1]^{n\times n}$ 左对角占优，则 R 可以作 I_3 型三角分解的充分必要条件是 R 绝对下占优.

定理 7.3.16　若 $R \in [0,1]^{n\times n}$ 上对角占优，则 R 可以作 I_4 型三角分解的充分必要条件是 R 绝对下占优.

有些矩阵虽不满足三角分解条件，但可以作适当的行列交换使之满足三角分解条件.

例 7.3.9　设

$$\begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.6 \\ 0.2 & 0.4 & 0.1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.4 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

该系数矩阵不作 $I_i (i=1,2,3,4)$ 型三角分解，但方程等价于

$$\begin{bmatrix} 0.3 & 0 & 0.2 \\ 0.5 & 0.6 & 0 \\ 0.2 & 0.1 & 0.4 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.4 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

由定理 7.3.16，系数矩阵可以作 I_4 型三角分解.

$$\begin{bmatrix} 0.3 & 0 & 0.2 \\ 0.5 & 0.6 & 0 \\ 0.2 & 0.1 & 0.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0.3 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.6 & 0 \\ 0.2 & 0.1 & 0.4 \end{bmatrix}$$

由
$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0.2\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.2\\0.4\\0.2\end{bmatrix}$$

得
$$y_1=[0,0.2],\ y_2=0.4,\ y_3=0.2$$

由
$$\begin{bmatrix}0.3 & 0 & 0\\0.5 & 0.6 & 0\\0.2 & 0.1 & 0.4\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}x_1\\x_3\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}[0,0.2]\\0.4\\0.2\end{bmatrix}$$

得 $x_1=[0,0.2],\ x_3=0.4,\ x_2=\begin{cases}[0,0.2], & x_1=0.2\\0.2, & x_1=[0,0.2]\end{cases}$，即原方程的解为

$$([0,0.2],0.2,0.4)'\text{ 或 }(0.2,[0,0.4],0.4)'.$$ □

§7.4　最大—乘积型 Fuzzy 关系方程

当 $T=\cdot$ 时，$R\cdot X=S$ 称为最大—乘积型 Fuzzy 关系方程，并且

$$\mathscr{X}_{\cdot}(R,S)=\{X\in\mathscr{F}(V\times W)\mid R\cdot X=S\}$$

$$a\alpha_{\cdot}b=\begin{cases}\dfrac{b}{a}, & a>b\\[2mm]1, & a\leqslant b\end{cases}.$$

由定理 7.1.1 知对于 $R\cdot X=S$ 有 $\mathscr{X}_{\cdot}(R,S)\neq\varnothing$ 当且仅当 $R^{-1}\alpha_{\cdot}S$ 为其最大解. 进一步我们可以得到：$\forall(v,w)\in V\times W$

$$R^{-1}\alpha_{\cdot}S(v,w)=\bigwedge_{u\in U}(R^{-1}(v,u)\alpha_{\cdot}S(u,w))=\bigwedge_{u\in U}(R(u,v)\alpha_{\cdot}S(u,w))$$

$$=\bigwedge_{u\in U}\left\{\frac{S(u,w)}{R(u,v)}\,\middle|\,R(u,v)>S(u,w)\right\}$$

例 7.4.1　(1)对于方程

$$\begin{bmatrix}0.3 & 0.5 & 0.6\\0.4 & 0.1 & 0.5\end{bmatrix}\cdot X=\begin{bmatrix}0.8 & 0.5\\0.6 & 0.4\end{bmatrix}$$

考虑到 $0.4\vee 0.1\vee 0.5<0.6\vee 0.4$ 与定理 7.1.2 知该方程无解.

(2)对于方程

$$\begin{bmatrix}0.6 & 0.3 & 0.8 & 0.2\\0.7 & 0.6 & 0.9 & 1.0\\0.3 & 0.1 & 0.5 & 0\end{bmatrix}\cdot X=\begin{bmatrix}0.7 & 0.4\\0.8 & 0.6\\0.4 & 0.3\end{bmatrix}$$

容易计算

$$R^{-1}\alpha\ .\ S=\begin{bmatrix}0.6 & 0.7 & 0.3\\0.3 & 0.6 & 0.1\\0.8 & 0.9 & 0.5\\0.2 & 1.0 & 0\end{bmatrix}\alpha\ .\begin{bmatrix}0.7 & 0.4\\0.8 & 0.7\\0.4 & 0.3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \frac{2}{3}\\1 & 1\\0.8 & 0.5\\0.8 & 0.7\end{bmatrix}$$

但

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 0.8 & 0.8\\\frac{2}{3} & 1 & 0.5 & 0.7\end{bmatrix}'$$

不是原方程的解，故上述方程无解. 该例再次说明定理 7.1.2 的充分性不成立.

(3)对于关系方程

$$\begin{bmatrix}0.5 & 0 & 0.6 & 0.6\\0.3 & 0.2 & 0 & 0.3\\0.2 & 0.1 & 0.3 & 0.2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.4\\0.2\\0.2\end{bmatrix}$$

容易计算 $\overline{X}=R'\alpha\ .\ S=\left(\frac{2}{3},1,\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)'$，且 $\overline{X}$ 是方程的解，也是最大解. □

类似最大—最小型 Fuzzy 关系方程，讨论下列形式的最大—乘积型 Fuzzy 关系方程

$$\begin{bmatrix}r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n}\\r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n}\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\r_{m1} & r_{m2} & \cdots & r_{mn}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s_1\\s_2\\\vdots\\s_m\end{bmatrix}$$

或

$$\begin{cases}(r_{11}\cdot x_1)\vee(r_{12}\cdot x_2)\vee\cdots\vee(r_{1n}\cdot x_n)=s_1\\(r_{21}\cdot x_1)\vee(r_{22}\cdot x_2)\vee\cdots\vee(r_{2n}\cdot x_n)=s_2\\\quad\vdots\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\vdots\\(r_{m1}\cdot x_1)\vee(r_{m2}\cdot x_2)\vee\cdots\vee(r_{mn}\cdot x_n)=s_m\end{cases}$$

记 $R'\alpha\ .\ S=(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\cdots,\overline{x}_n)'$，定义集合

$$E(i)=\{j\in\{1,2,\cdots,n\}\mid r_{ij}\cdot\overline{x}_j=s_i\},\ E=E(1)\times E(2)\times\cdots\times E(m)$$

而令 $P=(p_{ij})_{m\times n}$ 如下

$$p_{ij}=\begin{cases}r_{ij}, & r_{ij}\cdot\overline{x}_j=s_i\\0, & r_{ij}\cdot\overline{x}_j\neq s_i\end{cases},\quad\forall i=1,2,\cdots,m;\quad j=1,2,\cdots,n$$

称 P 为方程 $R\cdot X=S$ 的简化矩阵.

定理 7.4.1 设 $R=[r_{ij}]\in[0,1]^{m\times n}$，$S=[s_i]\in[0,1]^{m\times 1}$，则:

(1) $R'\alpha \,.\, S = P'\alpha \,.\, S$;

(2) $R \cdot X = S \Leftrightarrow P \cdot X = S$;

(3) $\mathscr{X}\,.\,(R,S) \neq \varnothing \Leftrightarrow E = E(1) \times E(2) \times \cdots \times E(m) \neq \varnothing$;

(4) $\mathscr{X}\,.\,(P,S) \neq \varnothing \Leftrightarrow \forall i = 1,2,\cdots,m,\ \bigvee_{j=1}^{n} p_{ij} \geqslant s_i$.

证明　(1)设 $P'\alpha \,.\, S = (x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)'$. 由 P 的定义, $P \subseteq R$, 从而由定理 3.4.11 得

$$\overline{X} \triangleq (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \cdots, \overline{x}_n)' = R'\alpha \,.\, S \subseteq P'\alpha \,.\, S = (x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)'$$

而另一方面,任取 $j \in \{1,2,\cdots,n\}$, 下证 $\overline{x}_j \geqslant x_j^*$. 事实上:

① 若 $\overline{x}_j = 1$, 则显见 $\overline{x}_j \geqslant x_j^*$;

② 若 $\overline{x}_j < 1$, 则存在 $i_j \in \{1,2,\cdots,m\}$, 使

$$\overline{x}_j = \bigwedge_{i=1}^{m} (r_{ij}\alpha \,.\, s_i) = r_{i_j j}\alpha \,.\, s_i = \frac{s_{i_j}}{r_{i_j j}}$$

从而 $r_{i_j j} \cdot \overline{x}_j = s_{i_j}$, 故 $r_{i_j j} = p_{i_j j}$, 于是

$$x_j^* = \bigwedge_{i=1}^{m} (p_{ij}\alpha \,.\, s_i) \leqslant p_{i_j j}\alpha \,.\, s_{i_j} = r_{i_j j}\alpha \,.\, s_{i_j} = \overline{x}_j$$

总之,有 $\overline{x}_j \geqslant x_j^*$ $(j = 1,2,\cdots,n)$,从而 $R'\alpha \,.\, S \supseteq P'\alpha \,.\, S$, 故 $R'\alpha \,.\, S = P'\alpha \,.\, S$.

(2)设 $R \cdot X = S$, 则由定理 7.1.1, $X \subseteq \overline{X} = R'\alpha \,.\, S \in \mathscr{X}\,.\,(R,S)$. 故由(1), $X \subseteq P'\alpha \,.\, S$. 又由定理 3.4.7 及定理 3.4.15(1) 可得, $P \cdot X \subseteq P \cdot (P'\alpha \,.\, S) \subseteq S$. 下面只需证明

$$\forall i = 1,2,\cdots,m,\ \bigvee_{j=1}^{n} (p_{ij} \cdot x_j) \geqslant s_i$$

事实上, $\forall i = 1,2,\cdots,m$, 存在 $j_i \in \{1,2,\cdots,n\}$, 使得

$$s_i = \bigvee_{j=1}^{m} (r_{ij} \cdot x_j) = r_{ij_i} \cdot x_j \leqslant r_{ij_i} \cdot \overline{x}_j \leqslant s_i$$

从而 $r_{ij_i} \cdot x_{j_i} = r_{ij_i} \cdot \overline{x}_{j_i} = s_i$, 即 $r_{ij_i} = p_{ij_i}$, 这样

$$\bigvee_{j=1}^{n} (p_{ij} \cdot x_j) \geqslant p_{ij_i} \cdot x_{j_i} = s_i$$

由此得到 $P \cdot X = S$. 反之,设 $P \cdot X = S$, 则由定理 3.4.7 有

$$S = P \cdot X \subseteq R \cdot X \subseteq R \cdot \overline{X} \subseteq S$$

即 $R \cdot X = S$. □

记集合, $IE = \{i \in \{1,2,\cdots,m\} \mid s_i = 0\}$,

$JE = \{i \in \{1,2,\cdots,m\} \mid s_i > 0, \exists k : k > i, \forall j \in \{1,2,\cdots,n\}, q_{kj} \neq 0 \Rightarrow q_{ij} \neq 0\}$

定义 Fuzzy 矩阵 $P^{(0)} = (p_{ij}^{(0)})_{m\times n}$ 与 Fuzzy 向量 $S^{(0)} = (s_i^{(0)})_{n\times 1}$ 如下:

$\forall i \in \{1,2,\cdots,m\}, j \in \{1,2,\cdots,n\}$

$$p_{ij}^{(0)}=\begin{cases}0, & i\in IE\cup JE\\ p_{ij}, & i\overline{\in} IE\cup JE\end{cases},\quad s_i^{(0)}=\begin{cases}0, & i\in IE\cup JE\\ s_i, & i\overline{\in} IE\cup JE\end{cases}.$$

定理 7.4.2 设 $R\cdot X=S$ 有解，则 $P\cdot X=S$ 当且仅当 $P^0\cdot X=S^0$，且

$$X\subseteq P'\alpha\,.\,S.$$

证明 必要性显然. 下面证明充分性. 设 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$ 满足方程 $P^0\cdot X=S^0$，且 $X\subseteq P'\alpha\,.\,S$，则由定理 3.4.7、定理 3.4.15(1)及 P 的定义知，要证 $P\cdot X=S$，只需证

$$\forall i=1,2,\cdots,m,\ \bigvee_{j=1}^{n}(p_{ij}\cdot x_j)\geqslant s_i$$

(1)若 $i\overline{\in} IE\cup JE$，则 $\forall j=1,2,\cdots,n,\ p_{ij}=p_{ij}^{(0)},s_i=s_i^{(0)}$，显然上式成立；

(2)若 $i\in IE$，则显见 $\bigvee_{j=1}^{n}(p_{ij}\cdot x_j)\geqslant s_i=0$；

(3)若 $i\in JE$，则 $s_i>0$，并存在 $i<k\leqslant m$，使

$$\bigvee_{j=1}^{n}(p_{kj}\cdot x_j)=s_k>0,\ 且\ \forall j=1,2,\cdots,n,\ p_{kj}\neq 0\Rightarrow p_{ij}\neq 0$$

从而存在 $j_0\in\{1,2,\cdots,n\}$，使 $s_k=p_{kj_0}\cdot x_{j_0}>0$. 又由定理 7.4.1(1)易得，$R'\alpha\,.\,S=P'\alpha\,.\,S$，所以

$$p_{kj_0}>0,\ 且\ s_k=p_{kj_0}\cdot x_{j_0}\leqslant p_{kj_0}\cdot\overline{x}_{j_0}\leqslant s_k$$

这样，$x_{j_0}=\overline{x}_{j_0}$，从而

$$\bigvee_{j=1}^{n}(p_{ij}\cdot x_j)\geqslant p_{ij_0}\cdot x_{j_0}=p_{ij_0}\cdot\overline{x}_{j_0}=s_i$$

综合(1)、(2)、(3)，总有 $\bigvee_{j=1}^{n}(p_{ij}\cdot x_j)\geqslant s_i$. □

由定理 7.4.1 与定理 7.4.2，我们可以利用与最大—最小型 Fuzzy 关系方程的 Fuzzy 矩阵变换法和有效路径法类似的方法来求最大—乘积型 Fuzzy 关系方程的极小解. 定义矩阵 $R^*=(r_{ij}^*)_{m\times n}$ 如下

$$r_{ij}^*=\begin{cases}\overline{x}_j, & r_{ij}\cdot\overline{x}_j=s_i\\ 0, & 其他\end{cases}$$

按下列规则删去 R^* 中的第 i 行：

(1)若 $s_i=0$，则删去 R^* 中的第 i 行；

(2)若 $s_i>0$，且存在 $k\in\{1,2,\cdots,n\}$ 满足：$k>i,\forall j\in\{1,2,\cdots,n\},q_{kj}\neq 0\Rightarrow q_{ij}\neq 0$，则删去 R^* 中的第 i 行.

删行后的矩阵记为 com(R). 在 com(R) 的每一行中取一个非零元，然后按列取最大值，再转置后得方程 $R\cdot X=S$ 的一个极小解.

例 7.4.2 对于最大乘积型 Fuzzy 关系方程

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0.6 & 0.6 \\ 0.3 & 0.2 & 0 & 0.3 \\ 0.2 & 0.1 & 0.3 & 0.2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.2 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

由例 7.4.1(3)得 $\overline{X} = R'\alpha \, . \, S = \left(\frac{2}{3}, 1, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)'$，并且简化矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.6 & 0.6 \\ 0.3 & 0.2 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0 \end{bmatrix}$$

由此可知，原方程有解，且 $\overline{X} = R'\alpha \, . \, S = \left(\frac{2}{3}, 1, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)'$ 为其最大解. 又

$$R^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{com}(R) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

故得三个极小解

$$\underline{X}_1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{X}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{X}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

从而得原方程的解集为

$$X \, . \, (R, S) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ [0, 1] \\ \frac{2}{3} \\ \left[0, \frac{2}{3}\right] \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} \left[0, \frac{2}{3}\right] \\ 1 \\ \frac{2}{3} \\ \left[0, \frac{2}{3}\right] \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} \left[0, \frac{2}{3}\right] \\ [0, 1] \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}. \qquad \square$$

§7.5 Fuzzy 关系不等式

在线性规划问题中要用到 Fuzzy 关系不等式. 下面讨论 Fuzzy 关系不等式的求解.

设 $R \in \mathscr{F}(U\times V)$, $S \in \mathscr{F}(U\times W)$, $T \in \mathscr{F}(U\times W)$, 则

$$R \circ_{\top} X \subseteq S,\ R \circ_{\top} X \supseteq S,\ S \subseteq R \circ_{\top} X \subseteq T$$

称为 Fuzzy 关系不等式(方程)(fuzzy relation inequalities). 它们的解集分别记为

$$\mathscr{X}_{\top}^{\leqslant}(R,S)=\{X\in\mathscr{F}(V\times W)\mid R\circ_{\top}X\subseteq S\},\ \mathscr{X}_{\top}^{\geqslant}(R,S)=\{X\in\mathscr{F}(V\times W)\mid R\circ_{\top}X\supseteq S\}$$

$$\mathscr{X}_{\top}(R,S,T)=\{X\in\mathscr{F}(V\times W)\mid S\subseteq R\circ_{\top}X\subseteq T\}$$

特别地当 $\top=\wedge$ 时,记 $\mathscr{X}_{\top}^{\leqslant}(R,S)$, $\mathscr{X}_{\top}^{\geqslant}(R,S)$ 与 $\mathscr{X}_{\top}(R,S,T)$ 分别为 $\mathscr{X}^{\leqslant}(R,S)$, $\mathscr{X}^{\geqslant}(R,S)$ 与 $\mathscr{X}(R,S,T)$.

类似 Fuzzy 关系方程我们有 Fuzzy 关系不等式方程的最大解与(拟)极小解等概念.

设 $\mathscr{F}(U\times V)$, 则记

$$X_{\geqslant}\triangleq\{Z\in\mathscr{F}(U\times V)\mid Z\supseteq X\},\ X_{\leqslant}\triangleq\{Z\in\mathscr{F}(U\times V)\mid Z\subseteq X\}$$

当 U,V,W 为有限论域时,上面的符号 $\subseteq$ 和 $\supseteq$ 分别用 $\leqslant$ 和 $\geqslant$ 表示.

7.5.1 $R\circ_{\top} X\subseteq S$

定理 7.5.1 $X\in\mathscr{X}_{\top}^{\leqslant}(R,S)\Rightarrow X_{\leqslant}\subseteq X_{\top}^{\leqslant}(R,S)$.

证明 由定理 3.4.7 容易得到. □

定理 7.5.2 $\mathscr{X}_{\top}^{\leqslant}(R,S)=(\overline{X})_{\leqslant}=\{X\mid X\subseteq\overline{X}\}$, 其中 $\overline{X}=R'\alpha_{\top}S$.

证明 设 $X\subseteq\overline{X}$, 由定理 3.4.15(1)知, $R\circ_{\top}\overline{X}=R\circ_{\top}(R'\alpha_{\top}S)\subseteq S$, 再由定理 7.5.1 得 $X\in\mathscr{X}_{\top}^{\leqslant}(R,S)$. 反之,设 $X\in\mathscr{X}_{\top}^{\leqslant}(R,S)$, 则 $R\circ_{\top}X\subseteq S$, 由定理 3.4.15(2)与定理 3.4.11 得, $X\subseteq R'\alpha_{\top}(R\circ_{T}X)\subseteq R'\alpha_{\top}S=\overline{X}$. □

例 7.5.1 考虑不等式方程

$$\begin{bmatrix}0.8&0.9&0&1.0\\1.0&0.7&0.9&0.5\\0.5&0.6&0.6&0.7\\0.3&0.2&0.5&0.3\\0.4&0.4&0.1&0\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}\leqslant\begin{bmatrix}0.9\\0.8\\0.7\\0.4\\0.3\end{bmatrix}$$

则其最大解为 $\overline{X}=R'\alpha S=(0.3,0.3,0.4,0.9)'$. 由定理 7.5.2 知该不等式方程的解集是 $(\overline{X})_{\leqslant}$.

值得注意的是 $\overline{X}=R'\alpha S=(0.3,0.3,0.4,0.9)'$ 不是

$$\begin{bmatrix}0.8 & 0.9 & 0 & 1.0\\1.0 & 0.7 & 0.9 & 0.5\\0.5 & 0.6 & 0.6 & 0.7\\0.3 & 0.2 & 0.5 & 0.3\\0.4 & 0.4 & 0.1 & 0\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.9\\0.8\\0.7\\0.4\\0.3\end{bmatrix}$$

的解，即该等式方程无解. □

7.5.2　$R\circ X\supseteq S$

定理 7.5.3　(1) $X_0\in\mathscr{X}_{\mathrm{T}}^{\geqslant}(R,S)\Rightarrow(X_0)_{\geqslant}\subseteq\mathscr{X}_{\mathrm{T}}^{\geqslant}(R,S)$；

(2)若 X_0 是 $R\circ_{\mathrm{T}}X=S$ 的极小解，且 $Y\subset X_0$，则 $Y\overline{\in}\mathscr{X}_{\mathrm{T}}^{\geqslant}(R,S)$.

证明　(1)任取 $X_0\in\mathscr{X}_{\mathrm{T}}^{\geqslant}(R,S)$，并且 $X\supseteq X_0$，则 $R\circ_{\mathrm{T}}X\supseteq R\circ_{\mathrm{T}}X_0\supseteq S$，即 $X\in\mathscr{X}_{\mathrm{T}}^{\geqslant}(R,S)$.

(2)设 X_0 是 $R\circ_{\mathrm{T}}X=S$ 的极小解，并且 $Y\subset X_0$. 若 $Y\in\mathscr{X}_{\mathrm{T}}^{\geqslant}(R,S)$，亦即 $R\circ_{\mathrm{T}}Y\supseteq S$，这时 $S=R\circ_{\mathrm{T}}X_0\supseteq R\circ_{\mathrm{T}}Y\supseteq S\Rightarrow R\circ_{\mathrm{T}}Y=S$，即 $Y\in\mathscr{X}_{\mathrm{T}}(R,S)$. 这与 X_0 是 $R\circ_{\mathrm{T}}X=S$ 的极小解矛盾. □

由定理 7.5.3 知，为了求解不等式方程 $R\circ_{\mathrm{T}}X\supseteq S$，只需求出全部极小解. 求极小解是复杂的，下面只考虑 $\top=\wedge$ 的情形并且论域是有限的.

又定义 $R\circ X\supseteq S$ 的特征矩阵 $D^{(\geqslant)}=(d_{ij}^{(\geqslant)})_{m\times n}$ 如下

$$d_{ij}^{(\geqslant)}=\begin{cases}1, & r_{ij}\geqslant s_i\\0, & r_{ij}<s_i\end{cases},\quad\forall i=1,2,\cdots,m;\quad j=1,2,\cdots,n$$

若 $Q(D^{(\geqslant)})\neq\varnothing$，则对 $q=(q(1),q(2),\cdots,q(m))\in Q(D^{(\geqslant)})$，令

$$X_q=X_{q(1),q(2),\cdots,q(m)}=(x_1^{(q)},x_2^{(q)},\cdots,x_n^{(q)})'$$

其中 $x_j^{(q)}=\bigvee_{i=1}^{m}\{s_i\mid d_{iq(i)}=1\},j=1,2,\cdots,n$. 下面的定理给出了解集 $\mathscr{X}^{\geqslant}(R,S)$ 的结构.

定理 7.5.4　$\mathscr{X}^{\geqslant}(R,S)\neq\varnothing$ 当且仅当 $Q(D^{(\geqslant)})\neq\varnothing$. 此时

$$\mathscr{X}^{\geqslant}(R,S)=\bigcup_{q\in Q}\{(X_q)_{\geqslant}\mid X_q\in[0,1]^{n\times1}\}\tag{7.5.1}$$

证明　(1)先证

$$\mathscr{X}^{\geqslant}(R,S)\subseteq\bigcup_{q\in Q}\{(X_q)_{\geqslant}\mid X_q\in[0,1]^{n\times1}\}$$

事实上，设 $X\in\mathscr{X}^{\geqslant}(R,S)$，则 $\forall i\in\{1,2,\cdots,m\}$

$$\bigvee_{j=1}^{n}(r_{ij}\wedge x_j)\geqslant s_i\Rightarrow(\exists q(i))(r_{iq(i)}\wedge x_{q(i)}\geqslant s_i)$$
$$\Rightarrow r_{iq(i)}\geqslant s_i,x_{q(i)}\geqslant s_i$$

于是 $q=(q(1),q(2),\cdots,q(m))\in Q$, 并且

$$j\overline{\in}\{q(1),q(2),\cdots,q(m)\}\Rightarrow x_j^{(q)}=\bigvee_{i=1}^{m}r_{ij}^{(q)}=\bigvee_{i=1}^{m}\varnothing=0$$

$$\Rightarrow x_j\geqslant x_j^{(q)}$$

$$j\in\{q(1),q(2),\cdots,q(m)\}\Rightarrow x_j=x_{q(k)}\geqslant s_k,\ \forall\, q(k)=j$$

$$\Rightarrow x_j\geqslant\bigvee_{q(k)=j}s_k=\bigvee_{i=1}^{m}r_{ij}^{(q)}=x_j^{(q)}$$

这时 $X\geqslant X_q$, 从而 $X\in\bigcup_{q\in Q}\{(X_q)_{\geqslant}\mid X_q\in[0,1]^{n\times 1}\}$.

(2)再证

$$\mathscr{X}^{\geqslant}(R,S)\supseteq\bigcup_{q\in Q}\{(X_q)_{\geqslant}\mid X_q\in[0,1]^{n\times 1}\}$$

事实上, $q=(q(1),q(2),\cdots,q(m))\in Q\Rightarrow(\forall i)(r_{iq(i)}\geqslant s_i,x_{q(i)}^{(q)}=\bigvee\{s_k\mid q_i=q_k\}\geqslant s_i)$

$$\Rightarrow(\forall i)(r_{iq(i)}\wedge x_{q(i)}^{(q)}\geqslant s_i)\Rightarrow R\circ X_q\geqslant S$$

$$\Rightarrow X_q\in\mathscr{X}^{\geqslant}(R,S)\Rightarrow(X_q)_{\geqslant}\subseteq\mathscr{X}^{\geqslant}(R,S).$$ □

定理 7.5.4 中的 $X_q(q\in Q(D^{(\geqslant)}))$ 是拟极小解,但不一定是极小解. 我们仍采用§7.3 中的保守路径法求极小解. 令 $J_i=\{j\mid r_{ij}\geqslant s_i\}$. 同样 $q=(q(1),q(2),\cdots,q(m))\in Q$ 称为特征矩阵 $D^{(\geqslant)}$ 的一个 Q 路径. $D^{(\geqslant)}$ 保守路径集仍用 $Q_c(D^{(\geqslant)})$ 表示.

定理 7.5.5 设 $1\geqslant s_1>s_2>\cdots>s_m>0$, 则 $\{X_{q^c}\mid q^c\in Q_c(D^{(\geqslant)})\}$ 是 $R\circ X\supseteq S$ 的极小解集.

证明 设 X 是极小解,根据定理 7.5.4,存在 $q\in Q$, 使 $X\geqslant X_q$, 从而 q 置于保守路径 q^c 中并且 $X\geqslant X_q\geqslant X_{q^c}$, 但 X 是一个极小解,故 $X=X_{q^c}$, 即

$$X\in\{X_{q^c}\mid q^c\in Q_c\}.$$

对任一保守路径 $q^c=\{q_1,q_2,\cdots,q_m\}$, 任取 $k\in\{1,2,\cdots,n\}$, 置

$$x_k<x_k^{(q^c)},\quad x_j=x_j^{(q^c)},\quad j\neq k$$

现证 $X\overline{\in}\mathscr{X}^{\geqslant}(R,S)$. 事实上

$$x_k^{(q^c)}>x_k\Rightarrow x_k^{(q^c)}>0\Rightarrow\{t\mid q(t)=k\}\neq\varnothing$$

令
$$t_k=\min\{t\mid q(t)=k\}$$

为证 $X\overline{\in}\mathscr{X}^{\geqslant}(R,S)$, 只需证

$$\bigvee_{j=1}^{n}(r_{t_kj}\wedge x_j)<s_{t_k}$$

实际上,可置

$$\bigvee_{j=1}^{n}(r_{t_kj}\wedge x_j)=\alpha\vee\beta\vee\gamma$$

其中

$$\alpha = r_{t_k k} \wedge x_k$$
$$\beta = \bigvee \{r_{t_k j} \mid r_{t_k j} \geqslant s_{t_k}, j \neq k\}$$
$$\gamma = \bigvee \{r_{t_k j} \mid r_{t_k j} < s_{t_k}, j \neq k\}$$

注意到：

(1) $x_k^{(q^c)} = s_{t_k} \Rightarrow \alpha = r_{t_k k} \wedge x_k \leqslant x_k < x_k^{(q^c)} = s_{t_k}$；

(2)因不存在 $t < t_k$，使 $q(t) \in J_{t_k}$，所以我们有 $j \in J_i$，并且

$$j \neq k \Rightarrow x_j = x_j^{(q^c)} = \bigvee \{s_i \mid q(i) = j\}$$
$$\leqslant \bigvee \{s_i \mid i > t_k\} = s_{t_k+1}（\text{或 } 0，\text{当 } t_k = m \text{ 时}）< s_{t_k}$$
$$\Rightarrow \beta < s_{t_k}$$

(3) $j \notin J_i \Rightarrow r_{ij} < s_i \Rightarrow \gamma < s_i$

从而 $\bigvee_{j=1}^{n} \{r_{t_k j} \wedge x_j\} < s_{t_k}$ 为真. □

例 7.5.2 考虑不等式方程

$$\begin{bmatrix} 0.8 & 0.9 & 0 & 1 \\ 1 & 0.7 & 0.9 & 0.5 \\ 0.5 & 0.6 & 0.6 & 0.7 \\ 0.3 & 0.2 & 0.2 & 0.3 \\ 0.3 & 0.4 & 0.1 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \geqslant \begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.7 \\ 0.6 \\ 0.3 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

其特征矩阵为

$$D^{(\geqslant)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

求解的 Q 路径个数是 $2\times3\times3\times2\times2=72$，但其保守路径只有 6 条，如表7.5.1所示.

表 7.5.1

路径名	$q(1)$	$q(2)$	$q(3)$	$q(4)$	$q(5)$
q_1^c	2	2	2	1	2
q_2^c	2	2	2	4	2
q_3^c	4	1	4	4	1
q_4^c	4	2	4	4	2
q_5^c	4	3	4	4	1
q_6^c	4	3	4	4	2

由此我们得到相应的极小解

$$\underline{X}_1=\begin{bmatrix}0.3\\0.9\\0\\0\end{bmatrix},\ \underline{X}_2=\begin{bmatrix}0\\0.9\\0\\0.3\end{bmatrix},\ \underline{X}_3=\begin{bmatrix}0.7\\0\\0\\0.9\end{bmatrix},\ \underline{X}_4=\begin{bmatrix}0\\0.7\\0\\0.9\end{bmatrix},\ \underline{X}_5=\begin{bmatrix}0.2\\0\\0.7\\0.9\end{bmatrix},\ \underline{X}_6=\begin{bmatrix}0\\0.2\\0.7\\0.9\end{bmatrix}$$

□

7.5.3 $S\leqslant R\circ X\leqslant T$

设 $R=(r_{ij})\in[0,1]^{m\times n}$, $X=(x_j)\in[0,1]^{n\times 1}$, $S=(s_i)$, $T=(t_i)\in[0,1]^{m\times 1}$，下面讨论 Fuzzy 关系不等式

$$S\leqslant R\circ X\leqslant T \tag{7.5.2}$$

其解集记为 $\mathscr{X}_T(R,S,T)$，$S\leqslant R\circ X\leqslant T$ 的特征矩阵规定为 $D=(d_{ij})\in\{0,1\}^{m\times n}$，

$$d_{ij}=1\Leftrightarrow r_{ij}\geqslant s_i\geqslant \overline{x}_j,\ \forall i\in\{1,2,\cdots,m\},j\in\{1,2,\cdots,n\}$$

其中 $\overline{X}=R'\alpha T=(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\cdots,\overline{x}_n)'$.

定理 7.5.6 设 $1\geqslant s_1>s_2>\cdots>s_m>0$，则：

(1) $\{X_{q^c}\mid q^c\in Q_c(D)\}$ 为 $S\leqslant R\circ X\leqslant T$ 的极小解集；

(2) $\mathscr{X}(R,S,T)=\overline{X}_{\leqslant}\cap\{\bigcup\{(X_{q^c})_{\leqslant}\mid q^c\in Q_c(D)\}\}$；

(3) $\mathscr{X}(R,S,T)\neq\varnothing\Leftrightarrow S\leqslant T$ 且 $Q(D)\neq\varnothing$.

证明 只证(1)，其余易证. 基于定理 7.5.4，为证(1)，只需证

$$q\in Q(D)\Leftrightarrow q\in Q(D^{(\geqslant)})\text{ 且 }X_q\leqslant X$$

事实上，$q\in Q(D^{(\geqslant)})\Leftrightarrow(\forall i)(r_{iq(i)}\geqslant s_i)$，并且

$$\begin{aligned}X_q\leqslant\overline{X}&\Leftrightarrow(\forall j)(\vee\{s_i\mid q(i)=j\}\leqslant\overline{x}_j)\\&\Leftrightarrow(\forall j)(q(i)=j\Rightarrow s_i\leqslant\overline{x}_j)\\&\Leftrightarrow s_i\leqslant\overline{x}_{q(i)}\end{aligned}$$

由此可知

$$q\in Q(D)\Leftrightarrow(\forall i)(r_{q(i)}\geqslant s_i)\text{ 且 }s_i\leqslant\overline{x}_{q(i)}$$

因此(1)成立. □

例 7.5.3 考虑不等式方程

$$\begin{bmatrix}0.9\\0.7\\0.6\\0.3\\0.2\end{bmatrix}\leqslant\begin{bmatrix}0.8&0.9&0&1\\1&0.7&0.9&0.5\\0.5&0.6&0.6&0.7\\0.3&0.2&0.2&0.3\\0.3&0.4&0.1&0\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}\leqslant\begin{bmatrix}0.9\\0.8\\0.7\\0.3\\0.4\end{bmatrix}$$

该方程的最大解为

$$\overline{X}=(0.8,1,0.8,0.9)'$$

其特征矩阵为

$$D=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&1&1&0\\0&1&1&1\\1&0&0&1\\1&1&0&0\end{bmatrix}$$

与例 7.5.2 的特征矩阵 $D^{(\geqslant)}$ 相等,其极小解为

$$\underline{X}_1=\begin{bmatrix}0.3\\0.9\\0\\0\end{bmatrix},\ \underline{X}_2=\begin{bmatrix}0\\0.9\\0\\0.3\end{bmatrix},\ \underline{X}_3=\begin{bmatrix}0.7\\0\\0\\0.9\end{bmatrix},\ \underline{X}_4=\begin{bmatrix}0\\0.7\\0\\0.9\end{bmatrix},\ \underline{X}_5=\begin{bmatrix}0.2\\0\\0.7\\0.9\end{bmatrix},\ \underline{X}_6=\begin{bmatrix}0\\0.2\\0.7\\0.9\end{bmatrix}$$

则解集为

$$\begin{bmatrix}[0.3,0.8]\\ [0.9,1]\\ [0,0.8]\\ [0,0.9]\end{bmatrix}\cup\begin{bmatrix}[0,0.8]\\ [0.9,1]\\ [0,0.8]\\ [0.3,0.9]\end{bmatrix}\cup\begin{bmatrix}[0.7,0.8]\\ [0,1]\\ [0,0.8]\\ 0.9\end{bmatrix}\cup\begin{bmatrix}[0,0.8]\\ [0.7,1]\\ [0,0.8]\\ 0.9\end{bmatrix}$$

$$\cup\begin{bmatrix}[0.2,0.8]\\ [0,1]\\ [0.7,0.8]\\ 0.9\end{bmatrix}\cup\begin{bmatrix}[0,0.8]\\ [0.2,1]\\ [0.7,0.8]\\ 0.9\end{bmatrix}.$$ □

§7.6 变次 Fuzzy 相似关系方程

Fuzzy 聚类分析的基本工作之一就是标定,即建立被分类对象之间的相似关系,相似关系是一个 Fuzzy 相似矩阵. 常用的 Fuzzy 聚类方法是将 Fuzzy 相似矩阵 R 通过求传递闭包的方法改造成 Fuzzy 等价矩阵 R^*,然后根据 R^* 作相应的动态分类. 于是自然有这样的问题:除了 R 以外,还有没有其他的 Fuzzy 相似矩阵 R_1,其传递闭包亦是 R^*,即 $t(R_1)=R^*$. 下面将讨论这一问题. 首先提出变次 Fuzzy 相似矩阵方程的概念(李相镐,1984).

定义 7.6.1 记 $\dot{k}\triangleq\{k,k+1,k+2,\cdots\}$,若对任意 $m\in\dot{k}$, X 都是 m 次方程

$$R\circ X^m=S \tag{7.6.1}$$

的解,则称 X 适合方程

$$R \circ \dot{X^k} = S \tag{7.6.2}$$

称 $R \circ \dot{X^k} = S$ 为变次 Fuzzy 相似关系(矩阵)方程,这里 X,R,S 均为 Fuzzy 相似矩阵.

定义 7.6.2 若 $A^k = A^{k+1}$,则称 A 为 k 次 Fuzzy 幂等矩阵,简称为 k 型阵. 所有 k 型 n 阶矩阵记为 $[0,1]_{(k)}^{n\times n}$.

易知 $[0,1]_{(1)}^{n\times n} \subseteq [0,1]_{(2)}^{n\times n} \subseteq \cdots \subseteq [0,1]_{(k)}^{n\times n} \subseteq \cdots$.

记

$$\dot{\mathscr{X}^k}(R,S) = \{X \mid R \circ \dot{X^k} = S\} \tag{7.6.3}$$

$$\mathscr{X}^{(m)}(R,S) = \{X \mid R \circ X^m = S\} \tag{7.6.4}$$

$$\mathscr{X}_{(k)}^{(m)}(R,S) = \{X \mid R \circ X^m = S, X \in [0,1]_{(k)}^{n\times n}\} \tag{7.6.5}$$

特别地,$\mathscr{X}^{(1)}(R,S)$ 与 $\mathscr{X}_{(k)}^{(1)}(R,S)$ 分别记为 $\mathscr{X}(R,S)$ 与 $\mathscr{X}_{(k)}(R,S)$.

定理 7.6.1 变次 Fuzzy 相似关系矩阵方程

$$\dot{X^k} = Y$$

有解 ($\dot{\mathscr{X}^k}(I,Y) \neq \varnothing$)的充分必要条件为 Y 是 1 型阵.

证明 充分性显然. 现证必要性. 若 $\dot{X^k} = Y$ 有一解 A,则有

$$A^k = A^{k+1} = \cdots = Y$$

且 $Y^2 = A^{2k}$,而 $A^k = A^{2k}$,故 $Y = Y^2$. □

定理 7.6.2 设 Y 为 1 型阵,$m \geqslant k$,则

$$\mathscr{X}^{(m)}(I,Y) \supseteq \mathscr{X}^{(k)}(I,Y)$$

证明 $\forall X_0 \in \mathscr{X}^{(k)}(I,Y)$,有 $X_0^k = Y$. 因 $m \geqslant k$,总可以找到正整数 p,使得 $pk \geqslant m$. 于是由定理 3.4.3 有 $X_0^k \subseteq X_0^m \subseteq X_0^{pk}$. 因 Y 为 1 型阵,故

$$X_0^{pk} = Y^p = Y = X_0^k$$

从而 $X_0^m = X_0^k = Y$,即 $X_0 \in \mathscr{X}^{(m)}(I,Y)$. □

定理 7.6.3 设 $k > 1$,如果

$$R \neq E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{7.6.6}$$

则

$$\dot{\mathscr{X}^k}(R,S) = \bigcup_{Y \in \mathscr{X}_{(2)}(R,S)} \mathscr{X}_{(2)}^{(k)}(I,Y). \tag{7.6.7}$$

证明　首先易知 $\dot{\mathscr{X}}^{k}(R,S)=\bigcap_{m\geqslant k}\left(\bigcup_{Y\in\mathscr{X}_{(2)}(R,S)}\mathscr{X}_{(2)}^{(m)}(R,Y)\right).$

由定理 7.6.2 知 $\mathscr{X}_{(2)}^{(m)}(I,Y)\supseteq\mathscr{X}_{(2)}^{(k)}(I,Y),\ m\geqslant k,$

因此有 $\bigcup_{Y\in\mathscr{X}_{(2)}(R,S)}\mathscr{X}_{(2)}^{(m)}(I,Y)\supseteq\bigcup_{Y\in\mathscr{X}_{(2)}(R,S)}\mathscr{X}_{(2)}^{(k)}(I,Y),\ m\geqslant k,$

从而 $\bigcap_{m\geqslant k}\left(\bigcup_{Y\in\mathscr{X}_{(2)}(R,S)}\mathscr{X}_{(2)}^{(m)}(R,Y)\right)=\bigcup_{Y\in\mathscr{X}_{(2)}(R,S)}\mathscr{X}_{(2)}^{(k)}(I,Y).$ □

定理 7.6.4　1 变次 Fuzzy 相似关系矩阵方程 $R\circ X=S$ 有解且其解中含有 1 型阵的充分条件是，$R=S$ 或者 $R\subseteq S$ 且 $S=S^2$.

证明　若 $R=S$，则 $R\circ I=S$ 且 $I=I^2$.

若 $R\subseteq S$ 且 $S=S^2$，则 $R\circ S\subseteq S\circ S=S$. 由定理 3.5.5 知，$R\circ S\supseteq S$，故 $R\circ S=S$，且 $S=S^2$. □

例 7.6.1　考虑变次 Fuzzy 相似关系矩阵方程

$$\begin{bmatrix}1 & 0.6 & 0.3 & 0\\0.6 & 1 & 0.1 & 0.2\\0.3 & 0.1 & 1 & 0.7\\0 & 0.2 & 0.7 & 1\end{bmatrix}\circ\dot{X}^{2}=\begin{bmatrix}1 & 0.6 & 0.4 & 0.4\\0.6 & 1 & 0.4 & 0.4\\0.4 & 0.4 & 1 & 0.7\\0.4 & 0.4 & 0.7 & 1\end{bmatrix}$$

首先容易求得

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0.4\\0 & 1 & 0.4 & 0\\0 & 0.4 & 1 & 0\\0.4 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\leqslant\dot{X}^{2}\leqslant\begin{bmatrix}1 & 0.6 & 0.4 & 0.4\\0.6 & 1 & 0.4 & 0.4\\0.4 & 0.4 & 1 & 0.7\\0.4 & 0.4 & 0.7 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0.4 & 0\\0 & 1 & 0 & 0.4\\0.4 & 0 & 1 & 0\\0 & 0.4 & 0 & 1\end{bmatrix}\leqslant\dot{X}^{2}\leqslant\begin{bmatrix}1 & 0.6 & 0.4 & 0.4\\0.6 & 1 & 0.4 & 0.4\\0.4 & 0.4 & 1 & 0.7\\0.4 & 0.4 & 0.7 & 1\end{bmatrix}$$

不难验证下式

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0.4\\0 & 1 & 0.4 & 0\\0 & 0.4 & 1 & 0\\0.4 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}^{2}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0.4\\0 & 1 & 0.4 & 0\\0 & 0.4 & 1 & 0\\0.4 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0.4 & 0\\0 & 1 & 0 & 0.4\\0.4 & 0 & 1 & 0\\0 & 0.4 & 0 & 1\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0.4 & 0\\0 & 1 & 0 & 0.4\\0.4 & 0 & 1 & 0\\0 & 0.4 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0.6 & 0.4 & 0.4\\0.6 & 1 & 0.4 & 0.4\\0.4 & 0.4 & 1 & 0.7\\0.4 & 0.4 & 0.7 & 1\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}1 & 0.6 & 0.4 & 0.4\\0.6 & 1 & 0.4 & 0.4\\0.4 & 0.4 & 1 & 0.7\\0.4 & 0.4 & 0.7 & 1\end{bmatrix}$$

解定次方程

$$X^2=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0.4\\0 & 1 & 0.4 & 0\\0 & 0.4 & 1 & 0\\0.4 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \text{和 } X^2=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0.4 & 0\\0 & 1 & 0 & 0.4\\0.4 & 0 & 1 & 0\\0 & 0.4 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

容易得到

$$X=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0.4\\0 & 1 & 0.4 & 0\\0 & 0.4 & 1 & 0\\0.4 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \text{和 } X=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0.4 & 0\\0 & 1 & 0 & 0.4\\0.4 & 0 & 1 & 0\\0 & 0.4 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

然而下列的二次方方程

$$X^2=\begin{bmatrix}1 & 0.6 & 0.4 & 0.4\\0.6 & 1 & 0.4 & 0.4\\0.4 & 0.4 & 1 & 0.7\\0.4 & 0.4 & 0.7 & 1\end{bmatrix}$$

的最大解为

$$X=\begin{bmatrix}1 & 0.6 & 0.4 & 0.4\\0.6 & 1 & 0.4 & 0.4\\0.4 & 0.4 & 1 & 0.7\\0.4 & 0.4 & 0.7 & 1\end{bmatrix}$$

所以，由定理 7.6.3 知

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0.4\\0 & 1 & 0.4 & 0\\0 & 0.4 & 1 & 0\\0.4 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\leqslant X\leqslant\begin{bmatrix}1 & 0.6 & 0.4 & 0.4\\0.6 & 1 & 0.4 & 0.4\\0.4 & 0.4 & 1 & 0.7\\0.4 & 0.4 & 0.7 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.4 \\ 0.4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \leqslant X \leqslant \begin{bmatrix} 1 & 0.6 & 0.4 & 0.4 \\ 0.6 & 1 & 0.4 & 0.4 \\ 0.4 & 0.4 & 1 & 0.7 \\ 0.4 & 0.4 & 0.7 & 1 \end{bmatrix}$$

这便是所求的全部解. □

例 7.6.2 给定 Fuzzy 相似关系矩阵 R

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 & 0.8 & 0.5 & 0.3 \\ 0.1 & 1 & 0.1 & 0.2 & 0.4 \\ 0.8 & 0.1 & 1 & 0.3 & 0.1 \\ 0.5 & 0.2 & 0.3 & 1 & 0.6 \\ 0.3 & 0.4 & 0.1 & 0.6 & 1 \end{bmatrix}$$

用求传递闭包的方法将 R 改造成 Fuzzy 等价矩阵 $t(R)$

$$t(R) = R^4 = R^8 = \begin{bmatrix} 1 & 0.4 & 0.8 & 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 1 & 0.4 & 0.4 & 0.4 \\ 0.8 & 0.4 & 1 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.4 & 0.5 & 1 & 0.6 \\ 0.5 & 0.4 & 0.5 & 0.6 & 1 \end{bmatrix}$$

我们考虑还有哪些 Fuzzy 相似矩阵也能改造成 $t(R)$. 解变次 Fuzzy 相似矩阵方程

$$R^{\dot{4}} = \begin{bmatrix} 1 & 0.4 & 0.8 & 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 1 & 0.4 & 0.4 & 0.4 \\ 0.8 & 0.4 & 1 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.4 & 0.5 & 1 & 0.6 \\ 0.5 & 0.4 & 0.5 & 0.6 & 1 \end{bmatrix}$$

其解为

$$\begin{bmatrix} 1 & a & 0.8 & b & b \\ a & 1 & a & a & a \\ 0.8 & a & 1 & b & b \\ b & a & b & 1 & 0.6 \\ b & a & b & 0.6 & 1 \end{bmatrix} \leqslant X \leqslant \begin{bmatrix} 1 & 0.4 & 0.8 & 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 1 & 0.4 & 0.4 & 0.4 \\ 0.8 & 0.4 & 1 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.4 & 0.5 & 1 & 0.6 \\ 0.5 & 0.4 & 0.5 & 0.6 & 1 \end{bmatrix}$$

其中,主对角线上方的四个 a 中,有一个为 0.4,而其余三个均为 0;四个 b 中,有一个为 0.5,而其余三个皆为 0.

由此可见,当 $X_0 \in \{X \mid X^4 = t(R)\}$ 时, $X_0^4 = X_0^8 = t(R)$. □

§7.7 Fuzzy 矩阵的广义逆

7.7.1 最大—最小型广义 Fuzzy 逆矩阵

定义 7.7.1 (Kim, Roush, 1980) 设 $R \in [0,1]^{n\times m}$，若存在 $Q \in [0,1]^{m\times n}$，使得 $R\circ Q\circ R=R$，则称 R 是正则的，且 Q 称为 R 的广义 Fuzzy 逆矩阵，简称 G—逆. 若 Q 是 R 的 G—逆，而且 $Q\circ R\circ Q=Q$，则称 Q 为 R 的 Thierrin-Vagner 逆，简称 T—逆.

由定义易知：Q 是 R 的 T—逆，则 R 是 Q 的 T—逆.

定理 7.7.1 设 Q 是 R 的 G—逆，则 $S=Q\circ R\circ Q$ 是 R 的 T—逆.

证明 因 Q 是 R 的 G—逆，则

$$R\circ S\circ R=R\circ(Q\circ R\circ Q)\circ R=(R\circ Q\circ R)\circ Q\circ R=R\circ Q\circ R=R$$

同理可证

$$\begin{aligned} S\circ R\circ S &= (Q\circ R\circ Q)\circ R\circ(Q\circ R\circ Q) \\ &= Q\circ(R\circ Q\circ R)\circ(Q\circ R\circ Q)=Q\circ R\circ Q=S. \end{aligned}$$ □

下面介绍一种求广义 Fuzzy 逆矩阵的方法.

令 $$\overline{X}=(\overline{x}_{jk})\in[0,1]^{m\times n}$$

其中 $\overline{x}_{jk}=\bigwedge\limits_{s,t}\{r_{st}\mid r_{st}<r_{sj}\wedge r_{kt}\}, j=1,2,\cdots,m; k=1,2,\cdots,n$.

例 7.7.1 设

$$R=\begin{bmatrix}0.5 & 0.5 & 0.3\\ 0.4 & 0.4 & 0.3\\ 0.2 & 0.2 & 0.5\end{bmatrix}$$

则

$$\overline{X}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0.3\\ 1 & 1 & 0.3\\ 0.2 & 0.2 & 1\end{bmatrix}$$

易证 $R\circ\overline{X}\circ R=R$. 故 R 是正则的，且 $\overline{X}$ 是 R 的 G—逆. □

定理 7.7.2 (罗承忠，1981) Fuzzy 矩阵 R 为正则的充分必要条件为 $R\circ\overline{X}\circ R=R$. 此时，$\overline{X}$ 是 R 的最大 G—逆. 即当

$$R\circ X\circ R=R \tag{7.7.1}$$

时必有 $X\subseteq\overline{X}$.

证明 充分性显然，现证必要性. 设 X 是 R 的任意一个 G—逆，则 $R\circ X\circ R=R$，于是 $\forall(i,l)$ 有

$$\bigvee_k \{(\bigvee_j \{r_{ij} \wedge x_{jk}\}) \wedge r_{kl}\} = r_{il}$$

即
$$\bigvee_k \bigvee_j \{r_{ij} \wedge x_{jk} \wedge r_{kl}\} = r_{il},\ \forall (i,l)$$

从而
$$\forall (i,l),(j,k),\ r_{ij} \wedge x_{jk} \wedge r_{kl} \leqslant r_{il}$$

于是 $\forall (i,l),(j,k)$，得：

(1) $r_{ij} \wedge r_{kl} \leqslant r_{il} \Rightarrow 0 \leqslant x_{jk} \leqslant 1$;

(2) $r_{ij} \wedge r_{kl} > r_{il} \Rightarrow 0 \leqslant x_{jk} \leqslant r_{il}$.

由此我们得到 $\forall (j,k),\quad x_{jk} \leqslant \bigwedge_{i,l} \{r_{il} \mid r_{il} < r_{ij} \wedge r_{kl}\} = \overline{x}_{jk}$

即 $X \subseteq \overline{X}$，且
$$R \circ \overline{X} \circ R \supseteq R \circ X \circ R = R$$

另一方面，$\forall (i,l),(j,k)$，得：

(1) $r_{ij} \wedge r_{kl} \leqslant r_{il} \Rightarrow r_{ij} \wedge \overline{x}_{jk} \wedge r_{kl} \leqslant r_{ij} \wedge r_{kl} \leqslant r_{il}$;

(2) $r_{ij} \wedge r_{kl} > r_{il} \Rightarrow r_{ij} \wedge \overline{x}_{jk} \wedge r_{kl} \leqslant \overline{x}_{jk} \leqslant r_{il}$.

于是
$$\forall (i,l),\ \bigvee_j \bigvee_k \{r_{ij} \wedge \overline{x}_{jk} \wedge r_{kl}\} \leqslant r_{il}$$

即
$$R \circ \overline{X} \circ R \subseteq R$$

所以
$$R \circ \overline{X} \circ R = R$$

故 $\overline{X}$ 是 R 的最大 G—逆. □

给定一个 $n \times m$ 阶正则 Fuzzy 矩阵 R，置

$$G_{il} = \{g_{il} = (j_{il}, k_{il}) \mid r_{ij_{il}} \wedge r_{k_{il}l} \geqslant r_{il}, \overline{x}_{j_{il}k_{il}} \geqslant r_{il}\}$$
$$\mathscr{G} = \{G = (g_{il})_{n\times m} \mid g_{il} \in G_{il}\}$$

$\forall\ G \in \mathscr{G}$，令 $X_G \in [0,1]^{m\times n}$，满足

$$x_{G_{jk}} = \bigvee \{r_{il} \mid (j_{il}, k_{il}) = (j,k)\},\ j = 1,2,\cdots,m;\ k = 1,2,\cdots,n.$$

定理 7.7.3 （罗承忠，1981）设 $R \in [0,1]^{n\times m}$ 是正则的，则 $\mathscr{G} \neq \varnothing$，并且 R 的全部 G —逆集合是

$$\mathscr{X} = \{X \mid X_G \subseteq X \subseteq \overline{X},\ G \in \mathscr{G}\} \tag{7.7.2}$$

证明 (1)设 X 是 R 的任意广义 Fuzzy 逆矩阵，则有

$$R \circ X \circ R = R \text{ 且 } X \subseteq \overline{X}$$

即
$$\forall (i,l),\ \bigvee_j \bigvee_k \{r_{ij} \wedge x_{jk} \wedge r_{kl}\} = r_{il}$$

故存在 (j_{il}, k_{il})，使得

$$r_{ij_{il}} \wedge x_{j_{il}k_{il}} \wedge r_{k_{il}l} = r_{il}$$

因而，存在 $g_{il} = (j_{il}, k_{il})$，使得

$$r_{ij_{il}} \wedge r_{k_{il}l} \geqslant r_{il}$$

且
$$\overline{x}_{j_{il}k_{il}} \geqslant x_{j_{il}k_{il}} \geqslant r_{il}$$

所以 $g_{il} \in G_{il}$，即存在 $G = (g_{il}) \in \mathscr{G}$.

令 $$x_{G_{jk}} = \vee \{r_{il} \mid (j_{il}, k_{il}) = (j,k)\}, j=1,2,\cdots,m; k=1,2,\cdots,n$$

$\forall (j,k)$，如果某些 $(j_{il}, k_{il}) = (j,k)$，则有

$$r_{il} \leqslant x_{j_{il}k_{il}} = x_{jk}, \ \forall (j_{il}, k_{il}) = (j,k)$$

于是 $$x_{G_{jk}} = \vee \{r_{il} \mid (j_{il}, k_{il}) = (j,k)\} \leqslant x_{jk}$$

如果所有 $(j_{il}, k_{il}) \neq (j,k)$，则

$$x_{G_{jk}} = \vee \varnothing = 0 \leqslant x_{jk}$$

于是，有 $$X_G \subseteq X \subseteq \overline{X}$$

即 $$X \in \mathscr{X}.$$

(2) $\forall G = (g_{il}) \in \mathscr{G}$，则 $\forall (i,l)$，$g_{il} = (j_{il}, k_{il}) = (j', k')$ 满足

$$r_{ij'} \wedge r_{k'l} = r_{ij_{il}} \wedge r_{k_{il}l} \geqslant r_{il}$$

且 $$\overline{x}_{j_{il}k_{il}} \geqslant r_{il}$$

于是 $$x_{G_{j'k'}} = \vee \{r_{st} \mid (j_{st}, k_{st}) = (j_{il}, k_{il})\} \geqslant r_{il}$$

因此 $$r_{ij'} \wedge x_{G_{j'k'}} \wedge r_{k'l} \geqslant r_{il}$$

于是 $$\bigvee_k \bigvee_j \{r_{ij} \wedge x_{G_{jk}} \wedge r_{kl}\} \geqslant r_{ij'} \wedge x_{G_{j'k'}} \wedge r_{k'l} \geqslant r_{il}, \ \forall (i,l)$$

所以 $$R \subseteq R \circ X_G \circ R \subseteq R \circ \overline{X} \circ R = R$$

即一切满足 $X_G \subseteq X \subseteq \overline{X}$ 的 $n \times m$ 阶 Fuzzy 矩阵都满足

$$R \circ X_G \circ R = R \circ X \circ R = R \circ \overline{X} \circ R = R.$$ □

X_G 称为 R 的对应于 $G \in \mathscr{G}$ 的拟极小 G—逆. 在全体拟极小 G—逆中选出互不包含者，得到全体极小 G—逆.

推论 7.7.1 正则 Fuzzy 矩阵 R 的全体 T—逆集合是

$$\mathscr{T} = \{T \mid T_G \subseteq T \subseteq \overline{T}, G \in \mathscr{G}\} \tag{7.7.3}$$

其中 $\overline{T} = \overline{X} \circ R \circ \overline{X}$ 称为 R 的最大 T—逆. 而 $T_G = X_G \circ R \circ X_G$ 称为 R 的对应于 $G \in \mathscr{G}$ 的拟极小 T—逆.

7.7.2 ⊤型和 α 型广义 Fuzzy 逆矩阵

下面总设 ⊤ 是对 ∨ 可分配的 t-模.

定义 7.7.2 设 $R \in [0,1]^{n\times m}$，若存在 $Q \in [0,1]^{m\times n}$，使得 $R \circ_{\top} Q \circ_{\top} R = R$，则称 R 是 ⊤—正则的，且 Q 称为 R 的 ⊤ 型广义 Fuzzy 逆矩阵，简称 $G_{\top}$—逆. 若 Q 是 R 的 $G_{\top}$—逆，而且 $Q \circ_{\top} R \circ_{\top} Q = Q$，则称 Q 为 R 的 ⊤ 型 Thierrin-Vagner 逆，简称 $T_{\top}$—逆. 若存在 $Q \in [0,1]^{m\times n}$，使得 $R\alpha_{\top}(Q\alpha_{\top} R) = R$，则称 R 是 α—正则的，且 Q 称为 R 的 α 型广义 Fuzzy 逆矩阵，简称 G_{α}—逆. 若 Q 是 R 的 G_{α}—逆，而且 $Q\alpha_{\top}(R\alpha_{\top} Q) = Q$，则称 Q 为 R 的 ⊤ 型 Thierrin-Vagner 逆，简称 T_{α}—逆.

定理 7.7.4 （胡宝清，1988a）Fuzzy 矩阵 R 为 $\top$—正则的充分必要条件为 $R\circ_\top \overline{X}\circ_\top R=R$. 其中，$\overline{X}=(\overline{x}_{jk})$ 是 R 的最大 $G_\top$—逆. 且 $\overline{X}$ 由下式确定

$$\overline{x}_{jk}=\bigwedge_{s,t}\{(r_{sj}\top r_{kt})\alpha r_{st}\} \tag{7.7.4}$$

证明 充分性显然，现证必要性.

设 X 是 R 的任意一个 G_T—逆，则 $R\circ_\top X\circ_\top R=R$，$\forall(i,l)$ 有

$$\bigvee_k\{(\bigvee_j\{r_{ij}\top x_{jk}\})\top r_{kl}\}=r_{il}$$

由 $\top$ 对 $\vee$ 可分配的假设得 $\quad\bigvee_k\bigvee_j\{r_{ij}\top x_{jk}\top r_{kl}\}=r_{il}$，$\forall(i,l)$

从而 $\quad\forall(i,l),(j,k)$，$r_{ij}\top x_{jk}\top r_{kl}\leqslant r_{il}$

由定理 1.3.15(2)得 $\forall(i,l),(j,k)$，$x_{jk}\leqslant(r_{ij}\top r_{kl})\alpha r_{il}$

由此我们得到 $\quad\forall(j,k)$，$x_{jk}\leqslant\bigwedge_{i,l}\{(r_{ij}\top r_{kl})\alpha r_{il}\}=\overline{x}_{jk}$

即 $\quad X\subseteq\overline{X}$

于是由定理 3.4.7 得 $\quad R\circ_\top\overline{X}\circ_\top R\supseteq R\circ_\top X\circ_\top R=R$

另一方面，因为 $\forall(i,l),(j,k)$，$\overline{x}_{jk}=\bigwedge_{s,t}\{(r_{sj}\top r_{kt})\alpha r_{st}\}\leqslant(r_{ij}\top r_{kl})\alpha r_{il}$，从而 $\forall(i,l),(j,k)$

$$\begin{aligned}r_{ij}\top\overline{x}_{jk}\top r_{kl}&\leqslant r_{ij}\top((r_{ij}\top r_{kl})\alpha r_{il})\top r_{kl}=(r_{ij}\top r_{kl})\top((r_{ij}\top r_{kl})\alpha r_{il})\\&\leqslant r_{il}\text{，(由定理 1.3.15(1))}\end{aligned}$$

于是 $\quad\bigvee_j\bigvee_k\{r_{ij}\top\overline{x}_{jk}\top r_{kl}\}\leqslant r_{il}$，$\forall(i,l)$

即 $\quad R\circ_\top\overline{X}\circ_\top R\subseteq R$

所以 $\quad R\circ_\top\overline{X}\circ_\top R=R$

于是 $\overline{X}$ 是 R 的最大 $G_\top$—逆. □

我们还容易证得以下定理.

定理 7.7.5 Fuzzy 矩阵 R 是 $\top$—正则的充分必要条件为存在 Y 及 X 使

$$R\circ_\top Y=R,\quad X\circ_\top R=Y \tag{7.7.5}$$

例 7.7.2 设 $\top=\odot$（有界积），则 $\forall a,b\in[0,1]$

$$a\odot b=(a+b-1)\vee 0$$

$$a\alpha_\odot b=\begin{cases}1, & a\leqslant b\\ 1-a+b, & a>b\end{cases}$$

设 $R=(r_{ij})_{n\times m}$，$0\leqslant r_{ij}\leqslant 0.5$，$i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m$，则

$$\overline{x}_{jk}=\bigwedge_{s,t}\{(r_{sj}\odot r_{kt})\alpha_\odot r_{st}\}=1,j=1,2,\cdots,m;k=1,2,\cdots,n$$

从而 $R\circ_\odot\overline{X}\circ_\odot R=O$. 这说明除零阵外，对所有满足 $0\leqslant r_{ij}\leqslant 0.5(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m)$ 的 Fuzzy 矩阵 $R=(r_{ij})_{m\times n}$ 关于 $\odot$ 都不是正则的. □

下面的结论是正则 Fuzzy 矩阵的推广（胡宝清，1988a）.

给定一个 $n\times m$ 阶 T 一正则 Fuzzy 矩阵 R，置

$$G_{il}=\{g_{il}=(j_{il},k_{il})\mid r_{ij_{il}}\top r_{k_{il}l}\geqslant r_{il},\overline{x}_{j_{il}k_{il}}\geqslant r_{il}\}$$

$$\mathcal{G}=\{G=(g_{il})_{n\times m}\mid g_{il}\in G_{il}\}$$

$\forall G\in\mathcal{G}$，令 $X_G\in[0,1]^{m\times n}$，满足

$$x_{G_{jk}}=\bigvee\{r_{il}\mid(j_{il},k_{il})=(j,k)\},j=1,2,\cdots,m;k=1,2,\cdots,n.$$

定理 7.7.6 设 $R\in[0,1]^{n\times m}$ 是T一正则的，则 $\mathcal{G}\neq\varnothing$，并且 R 的全部 $G_\top$ 一逆集合是

$$\mathcal{X}=\{X\mid X_G\subseteq X\subseteq\overline{X},G\in\mathcal{G}\}\tag{7.7.6}$$

对于 Fuzzy 矩阵的 α 一正则性有类似结果(胡宝清，1988a，b).

定理 7.7.7 Fuzzy 矩阵 R 是 α 一正则的充分必要条件为存在 Y 及 X 使

$$R\alpha_\top Y=R,\quad X\alpha_\top R=Y\tag{7.7.7}$$

定理 7.7.8 Fuzzy 矩阵 R 为 α 一正则的充分必要条件为 $R\alpha_\top(\overline{X}\alpha_\top R)=R$. 其中，$\overline{X}=(\overline{x}_{jk})$ 是 R 的最大 G_α 一逆. 且 $\overline{X}$ 由下式确定

$$\overline{x}_{jk}=\bigwedge_{s,t}\{(r_{sj}\top r_{st})\alpha r_{kt}\}.\tag{7.7.8}$$

证明 充分性显然，现证必要性.

设 X 是 R 的任意一个 G_α 一逆，则 $R\alpha_\top(X\alpha_\top R)=R$，$\forall(i,l)$ 有

$$\bigwedge_j\{r_{ij}\alpha(\bigwedge_k\{x_{jk}\alpha r_{kl}\})\}=r_{il}$$

$\forall(i,l)$，由定理 1.3.16(2)得

$$\bigwedge_j\bigwedge_k\{r_{ij}\alpha(x_{jk}\alpha r_{kl})\}=r_{il}$$

从而 $\forall(i,l),(j,k)$ $\quad r_{ij}\alpha(x_{jk}\alpha r_{kl})\geqslant r_{il}$

由定理 1.3.15(2)得 $\forall(i,l),(j,k)$

$$r_{ij}\top r_{il}\leqslant x_{jk}\alpha r_{kl}\Rightarrow r_{ij}\top r_{il}Tx_{jk}\leqslant r_{kl}\Rightarrow x_{jk}\leqslant(r_{ij}\top r_{il})\alpha r_{kl},$$

由此得到 $\quad\forall(j,k),\ x_{jk}\leqslant\bigwedge_{i,l}\{(r_{ij}\top r_{il})\alpha r_{kl}\}=\overline{x}_{jk}$

即 $\quad X\subseteq\overline{X}$

于是由定理 3.4.11 $\quad R=R\alpha_\top(X\alpha_\top R)\supseteq R\alpha_\top(\overline{X}\alpha_\top R)$

另一方面，因为 $\forall(i,l),(j,k)$，$\overline{x}_{jk}=\bigwedge_{s,t}((r_{sj}\top r_{st})\alpha r_{kt})\leqslant(r_{ij}\top r_{il})\alpha r_{kl}$，从而，由定理 1.3.15(2)

$$\forall(i,l),(j,k),\ r_{ij}\alpha(\overline{x}_{jk}\alpha r_{kl})\geqslant r_{il}$$

于是 $\quad\bigwedge_j\bigwedge_k\{r_{ij}\alpha(\overline{x}_{jk}\alpha r_{kl})\}\leqslant r_{il},\ \forall(i,l)$

即 $\quad\bigwedge_j\{r_{ij}\alpha(\bigwedge_k\{\overline{x}_{jk}\alpha r_{kl}\})\}\leqslant r_{il},\ \forall(i,l)$

亦即 $\quad R\alpha_\top(\overline{X}\alpha_\top R)\supseteq R$

所以 $$R\alpha_{\top}(\overline{X}\alpha_{\top} R)=R$$

于是 $\overline{X}$ 是 R 的最大 $G_{\top}$—逆. □

例 7.7.3 设 $R=(r_{ij})\in[0,1]^{n\times m}$，其中 $r_{ij}=r<1$，$\forall(i,j)$，由定理 1.3.15(7)知 $\overline{x}_{jk}=\bigwedge\limits_{s,t}\{(r_{sj}\top r_{st})\alpha r_{kt}\}=1$，$\forall(j,k)$，即 $\overline{X}=E$. 又 $E\alpha_{\top}R=R$，$R\alpha_{\top}R=E$，所以 $R\alpha_{\top}(\overline{X}\alpha_{\top}R)=E\neq R$，故 R 是非 α—正则. □

7.7.3 区间值 Fuzzy 矩阵的广义逆

定义 7.7.3 设 $R\in{}^{n\times m}_{[0,1]}$，若存在 $Q\in I^{m\times n}_{[0,1]}$，使得 $R\circ_{\top}Q\circ_{\top}R=R$，则称区间值 Fuzzy 矩阵 R 是 $\top$—正则的，且 Q 称为 R 的 $\top$ 型广义 Fuzzy 逆矩阵，简称 $G_{\top}$—逆. 若 Q 是 R 的 $G_{\top}$—逆，而且 $Q\circ_{\top}R\circ_{\top}Q=Q$，则称 Q 为区间值 Fuzzy 矩阵 R 的 $\top$ 型 Thierrin-Vagner 逆，简称 $T_{\top}$—逆.

定理 7.7.9 （彭祖赠，胡宝清，1984）设区间值 Fuzzy 矩阵 $R=([\underline{r}_{ij},\overline{r}_{ij}])\in I^{n\times m}_{[0,1]}$，则 R 是 $\top$—正则的充分必要条件是 $\underline{R}=(\underline{r}_{ij})_{n\times m}$ 和 $\overline{R}=(\overline{r}_{ij})_{n\times m}$ 正则且 $\underline{R}$ 和 $\overline{R}$ 分别有 $G_{\top}$—逆 $X=(x_{jk})_{m\times n}$，$Y=(y_{jk})_{m\times n}$ 存在使得 $X\subseteq Y$（即 $x_{jk}\leqslant y_{jk}$，$j=1,2,\cdots,m;k=1,2,\cdots,n$）成立.

证明 设区间值 Fuzzy 矩阵 $R=([\underline{r}_{ij},\overline{r}_{ij}])\in I^{n\times m}_{[0,1]}$ 是 $\top$—正则，则必有 $Z=([x_{jk},y_{jk}])_{m\times n}\in I^{m\times n}_{[0,1]}$，使得

$$R\circ_{\top}Z\circ_{\top}R=R$$

即 $$\forall(i,l),\ \bigvee_k\{\bigvee_j\{[\underline{r}_{ij},\overline{r}_{ij}]\top[x_{jk},y_{jk}]\}\top[\underline{r}_{kl},\overline{r}_{kl}]\}=[\underline{r}_{il},\overline{r}_{il}]$$

亦即 $$\forall(i,l),\ \bigvee_k\bigvee_j\{[\underline{r}_{ij},\overline{r}_{ij}]\top[x_{jk},y_{jk}]\top[\underline{r}_{kl},\overline{r}_{kl}]\}=[\underline{r}_{il},\overline{r}_{il}]$$

从而 $$\forall(i,l),\ [\bigvee_k\bigvee_j\underline{r}_{ij}\top x_{jk}\top\underline{r}_{kl},\ \bigvee_k\bigvee_j\overline{r}_{ij}\top y_{jk}\top\overline{r}_{kl}]=[\underline{r}_{il},\overline{r}_{il}]$$

故 $$\forall(i,l),\ \bigvee_k\bigvee_j\{\underline{r}_{ij}\top x_{jk}\top\underline{r}_{kl}\}=\underline{r}_{il},\ \bigvee_k\bigvee_j\{\overline{r}_{ij}\top y_{jk}\top\overline{r}_{kl}\}=\overline{r}_{il}$$

这说明 $X=(x_{jk})_{m\times n}$ 和 $Y=(y_{jk})_{m\times n}$ 分别是 $\underline{R}$ 和 $\overline{R}$ 的 $G_{\top}$—逆，$X\subseteq Y$ 是明显的.

再设 $\underline{R}$ 和 $\overline{R}$ 分别有 $G_{\top}$—逆 $X=(x_{jk})_{m\times n}$ 和 $Y=(y_{jk})_{m\times n}$ 且 $X\subseteq Y$，则由上述证明反推立即可得 $([x_{jk},y_{jk}])_{m\times n}$ 是 R 的 $G_{\top}$—逆. □

定理 7.7.9 给出了求区间值 Fuzzy 矩阵 $R=([\underline{r}_{ij},\overline{r}_{ij}])_{n\times m}G_{\top}$—逆的一种方法，即设 $\underline{R}=(\underline{r}_{ij})_{n\times m}$ 的全体 $G_{\top}$—逆集合为 $\mathscr{X}_{\underline{R}}$，$\overline{R}=(\overline{r}_{ij})_{n\times m}$ 的全体 $G_{\top}$—逆集合为 $\mathscr{X}_{\overline{R}}$，置

$$\mathscr{X}=\{([x_{jk},y_{jk}])_{m\times n}\mid(x_{jk})_{n\times m}\in\mathscr{X}_{\underline{R}},(y_{jk})_{n\times m}\in\mathscr{X}_{\overline{R}}\text{ 且 }x_{jk}\leqslant y_{jk},\forall j,k\}\tag{7.7.9}$$

则 $\mathscr{X}$ 是区间值 Fuzzy 矩阵 R 的全体 $G_{\top}$—逆集合，从而 R 的 $T_{\top}$—逆也可以求出.

例 7.7.4 设

$$R=\begin{bmatrix}[0.3,0.5] & [0.3,0.5] & [0.1,0.3]\\ [0.2,0.4] & [0.2,0.4] & [0.1,0.3]\\ [0,0.2] & [0,0.2] & [0.3,0.5]\end{bmatrix}$$

并且 $\top=\wedge$，则

$$\underline{R}=\begin{bmatrix}0.3 & 0.3 & 0.1\\ 0.2 & 0.2 & 0.1\\ 0 & 0 & 0.3\end{bmatrix},\quad \overline{R}=\begin{bmatrix}0.5 & 0.5 & 0.3\\ 0.4 & 0.4 & 0.3\\ 0.2 & 0.2 & 0.5\end{bmatrix}$$

都是正则的，且

$$X_1=\begin{bmatrix}[0,1] & [0,1] & [0,0.1]\\ [0.3,1] & [0,1] & [0,0.1]\\ [0,0] & [0,0] & [0.3,1]\end{bmatrix}\quad 及\ X_2=\begin{bmatrix}[0.3,1] & [0,1] & [0,0.1]\\ [0,1] & [0,1] & [0,0.1]\\ [0,0] & [0,0] & [0.3,1]\end{bmatrix}$$

是 $\underline{R}=(\underline{r}_{ij})_{n\times m}$ 的全体 $G_{\wedge}$ —逆集合；

$$X_3=\begin{bmatrix}[0,1] & [0,1] & [0,0.3]\\ [0.5,1] & [0,1] & [0,0.3]\\ [0,0.2] & [0,0.2] & [0.5,1]\end{bmatrix}\quad 及\ X_4=\begin{bmatrix}[0.5,1] & [0,1] & [0,0.3]\\ [0,1] & [0,1] & [0,0.3]\\ [0,0.2] & [0,0.2] & [0.5,1]\end{bmatrix}$$

是 $\overline{R}_{ij}=(\overline{r}_{ij})_{n\times m}$ 的全体 $G_{\wedge}$ —逆集合. 则

$$\mathscr{X}=\{([x_{jk},y_{jk}])_{3\times 3}\mid (x_{jk})_{3\times 3}\in X_1\ 或\ X_2,(y_{jk})_{3\times 3}\in X_3\ 或\ X_4,x_{jk}\leqslant y_{jk},j,k=1,2,3\}$$

是区间值 Fuzzy 矩阵 R 的全体 $G_{\wedge}$ —逆集合. □

7.7.4 格阵的广义逆

定义 7.7.4 设 $R\in L^{n\times m}$，若存在 $Q\in L^{m\times n}$，使得 $R\circ Q\circ R=R$，则称格阵 R 是正则的，且 Q 称为格阵 R 的广义逆矩阵，简称 G—逆. 若 Q 是 R 的 G—逆，而且 $Q\circ R\circ Q=Q$，则称 Q 为格阵 R 的 Thierrin-Vagner 逆，简称 T—逆.

定理 7.7.10 格阵 R 是正则的充分必要条件为存在 Y 及 X 使

$$R\circ Y=R,\quad X\circ R=Y \tag{7.7.10}$$

定理 7.7.11 （胡宝清，1988b）设格阵 $R=([\underline{r}_{ij},\overline{r}_{ij}])\in L^{n\times m}$，则 R 是正则的充分必要条件是 $R\circ\overline{X}\circ R=R$. 其中，$\overline{X}=(\overline{x}_{jk})$ 是 R 的最大 G—逆. 且 $\overline{X}$ 由下式确定

$$\overline{x}_{jk}=\bigwedge_{s,t}\{(r_{sj}\wedge r_{kt})\alpha r_{st}\} \tag{7.7.11}$$

给定一个 $n\times m$ 阶格阵 R，置

$$\mathscr{G}_{il}=\{g_{il}=(j_{il},k_{il})\mid r_{ij_{il}}\wedge r_{k_{il}l}\geqslant r_{il},\overline{x}_{j_{il}k_{il}}\geqslant r_{il}\}$$

$$\mathscr{G}=\{G=(g_{il})_{n\times m}\,|\,g_{il}\in G_{il}\}$$

$\forall G\in\mathscr{G}$,令 $X_G\in L^{m\times n}$,满足

$$x_{G_{jk}}=\bigvee\{r_{il}\,|\,(j_{il},k_{il})=(j,k)\},j=1,2,\cdots,m;k=1,2,\cdots,n.$$

定理 7.7.12 (胡宝清,1988b) 设 $R\in L^{n\times m}$ 是正则的,则 $\mathscr{G}\neq\varnothing$,并且 R 的全部 G —逆集合是

$$\mathscr{X}=\{X\,|\,X_G\subseteq X\subseteq\overline{X},G\in\mathscr{G}\}\tag{7.7.12}$$

上面我们对最大—最小型和最大—乘积型 Fuzzy 关系方程的求解方法进行了讨论,这些方法主要是通过研究方程的极小解来得出解集的结构. 除了这一方面外还可以利用 Fuzzy 神经网络理论与遗传算法来进行迭代求解(Blanco, Delgado, et al. , 1995a,1995b; Buckley, Eslami, et al. , 1997; Pedrycz, 1995)和求方程的近似解(Gottwald, 1994, 1995; Pedrycz, 1991). 更详细地了解 Fuzzy 关系方程理论可以参阅相关文献(Adamopoulos, Pappis, 1993; Bourke, Fisher, 1998; Czogala, Drewnial, et al. , 1982; Gottwald, 1993; Guo, Wang, et al. , 1988; Higashi, Klir, 1984; Imai, Miyakoshi, et al. , 1997; Loetamonphong, Fang, 1999; Luoh, Wang, et al. , 2002; Pappis, Sugeno, 1985; Pedrycz, 1984, 1989; Peeva, Kyosev, 2007; Prevot, 1981; Wu, Guu, 2004). Fuzzy 关系方程还可以向不同方向推广,如 t-模(Bourke, Fisher, 1995; Cheng, Peng, 1988; Gupta, Qi, 1991a, b; Hong, Hwang, 1994; Imai, Kikuchi, et al. , 1998; Lin, 2009; Miyakoshi, Shimbo, 1984, 1985; Shieh, 2007; Stamou, Tzafestas, 2001; Wu, Guu, 2008.)、区间值(Li, Fang, 1998)与格值(Nola, 1985; Qu, Wang, 2007; Wang, 2001; Wang, Xia, 2009)等. Fuzzy 关系方程理论在 Fuzzy 规划与优化(Fang, Li, 1999; Guu, Wu, 2010; Lin, Wu, et al. , 2009; Loetamonphong, Fang, 2001; Loetamonphong, Fang, et al. , 2002; Lu, Fang, 2001; Wang, 1995; Wu, Guu, 2005; Wu, Guu, et al. , 2008)、Fuzzy 控制,离散动力系统与知识工程 (Cuninghame-Green, 1979; Nola, Sessa, et al. , 1989)等领域有着广泛的应用.

第8章 隶属函数与Fuzzy统计

我们知道,论域 X 上的 Fuzzy 集 A 实质上是 $X \to [0,1]$ 的函数,所以实际中处理模糊现象的首要任务是确定隶属函数 $A(x)$. 正如在概率论的应用中人们只能统计出近似的概率一样,在 Fuzzy 集合论的应用中,由于人们认识事物的局限性,也只能建立近似的隶属度,从而得到大致的隶属函数. 本章围绕如何确定隶属函数的问题展开讨论. 首先介绍确定隶属函数的思路,然后介绍确定隶属函数的方法——Fuzzy 统计、二元对比排序、集值统计以及插值法与增量法,最后给出了常用的 Fuzzy 分布.

§8.1 确定隶属函数的思路

在自然界和人类的活动中所遇到的各种各样的现象,大体上可以分为两类:确定性现象和不确定性现象.

所谓确定性现象是指在一定条件下必然会出现的现象.

不确定性现象又可以分为两类:随机现象和模糊现象. 即:

$$\text{事物}\begin{cases}\text{确定性现象}\\ \text{不确定性现象}\begin{cases}\text{随机现象}\\ \text{模糊现象}\end{cases}\end{cases}$$

于是,数学模型便可以分为三大类:确定性数学模型,随机性数学模型和模糊性数学模型. 概率论是研究和处理随机现象的数学分支,而模糊集合论则是研究和处理模糊现象的数学分支. 随机现象和模糊现象的区别在于,随机事件本身有明确的含义,只是由于条件不充分,使得在条件与事件之间能出现决定性的因果关系,而在事件发生与否上表现出不确定的性质. 然而,模糊概念本身就没有明确的外延,一个对象是否符合这个概念是难以判定的,因此造成了划分的不确定性.

概率论的运用,是从随机性中把握广义的因果律——概率规律;模糊集合论则是从模糊性中确立广义的排中律——隶属规律.

概率反映了一定的条件对事物的内在联系与制约,概率的客观意义可以由

随机试验中呈现的频率稳定性来承担. 模糊性的根源在于客观事物差异之间存在着中介过渡,存在着亦此亦彼的现象. 但是,在亦此亦彼中依然存在差异、依然可以相互比较.

隶属度的具体确定确实包含着人脑的加工,其中有着某种心理过程;但是归根结底,心理活动也是物质性的. 心理物理学的大量试验表明,人的各种感觉所反应出来的心理量与外界刺激的物理之间保持着相当严格的定律(如韦伯定律,幂函数定律等),这个定律在某些自然科学中扮演着基础性的角色,如声学中的分贝,色度学中的三刺激组,光度学中的视量度函数等都与之相关.

下面说明,Fuzzy 统计试验中所呈现的频率稳定性可以承担隶属度的客观意义.

§8.2 Fuzzy 统计

8.2.1 二相 Fuzzy 统计

随机试验有 4 个基本要素:

(1)基本空间 Ω, Ω 是集中全部相关因素而形成的一个维数极高的直积空间;

(2) Ω 中的一个变元 ω, ω 的确定意味着全部因素都要各自固定在某一特定的状态上;

(3)事件 A, A 是 Ω 中的一个确定的经典集合;

(4)条件 S, S 是对变元 ω 活动的一种限制.

一个 Fuzzy 统计试验也有 4 个要素:

(1)论域 X;

(2)试验所要处理的论域 X 的固定元素 x_0;

(3)论域 X 的可变动的普通集合 A^*, A^* 作为 Fuzzy 集 A 的可塑性边界的反映,可以由此得到每次试验中 x_0 是否符合 A 所刻画的模糊概念的一个判决;

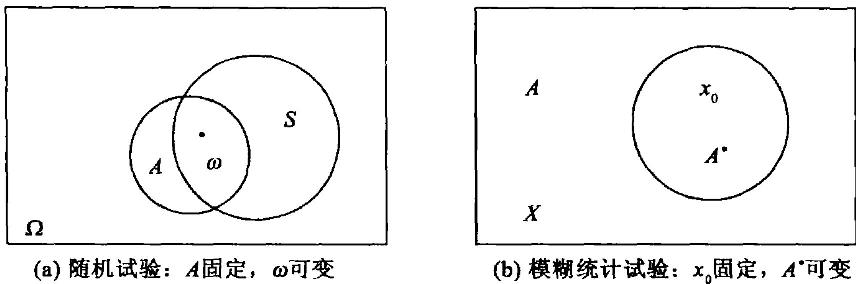
(4)条件 S, S 限制着 A^* 的变化.

以上分析如图 8.2.1 所示.

一个 Fuzzy 统计试验的基本要求是,在每次试验中,要对 x_0 是否属于 A^* 做出一个确定的判断,而 A^* 可以在每次试验中发生改变,但都是 X 的子集.

做 n 次试验,计算 x_0 对 Fuzzy 集 A 的隶属频率 $l_n(A)(x_0)$ 为

$$l_n(A)(x_0) \triangleq \frac{\text{“}x_0 \in A^*\text{”的次数}}{n} \tag{8.2.1}$$



(a) 随机试验：A固定，ω可变　　(b) 模糊统计试验：x_0固定，A^*可变

图 8.2.1　两种试验模型

试验表明，随着 n 的增大，$l_n(A)(x_0)$ 也会呈现某种稳定性，称 $l_n(A)(x_0)$ 所稳定的值为 x_0 对于 A 的隶属度，即

$$A(x_0)=\lim_{n\to+\infty}\frac{\text{“}x_0\in A^*\text{”的次数}}{n} \tag{8.2.2}$$

例 8.2.1　取年龄论域 $X=[0,100]$（单位：岁）. Fuzzy 集 A 表示 Fuzzy 概念“青年人”，选取年龄 $x_0=27$，试用 Fuzzy 统计来确定 x_0 对 A 的隶属度.

选取 129 位合适的人，每个人能根据自己对“青年人”的理解，报出他们认为“青年人”的最适宜的年限，具体数据如表 8.2.1 所示.

表 8.2.1　“青年人”年龄区间统计表

18～25	17～36	17～28	18～25	16～35	14～25	18～30	18～35	18～35	16～25
15～30	18～35	17～30	18～25	10～25	18～35	20～30	18～30	16～30	20～35
18～30	18～30	15～25	18～30	15～25	16～28	16～30	18～30	16～30	18～35
18～25	18～25	16～28	18～30	16～30	16～28	18～35	18～35	17～27	16～28
15～28	16～30	19～28	15～30	15～26	17～25	15～36	18～30	17～30	18～35
15～28	18～30	15～25	15～25	18～30	16～24	15～25	16～32	15～27	18～35
16～35	15～25	15～25	18～28	16～30	15～28	18～35	18～30	17～28	18～35
16～25	18～28	16～28	18～30	18～35	18～30	18～30	17～30	18～30	18～35
16～30	18～35	17～25	15～30	18～25	17～30	14～25	18～26	18～28	18～35
18～28	18～30	18～25	16～35	17～29	18～25	17～30	16～28	18～30	16～28
15～30	15～35	18～30	20～30	20～30	16～25	17～30	15～30	18～30	16～30
18～28	18～35	16～30	15～30	18～35	18～35	18～30	17～30	18～35	17～30
15～25	18～35	15～30	15～25	15～30	18～30	17～25	18～29	18～28	

$x_0=27$ 对"青年人"年限的隶属频率如表 8.2.2 所示.

表 8.2.2　　27 岁对"青年人"的隶属频率表

n	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	129
隶属次数	6	14	23	31	39	47	53	62	68	76	85	95	101
隶属频率	0.60	0.70	0.77	0.78	0.78	0.78	0.76	0.78	0.76	0.76	0.75	0.79	0.78

从图 8.2.2 容易看出,27 岁对于"青年人"年限的隶属频率大致稳定在 0.78 附近,因此可以取 $A(x_0)=A(27)=0.78$.

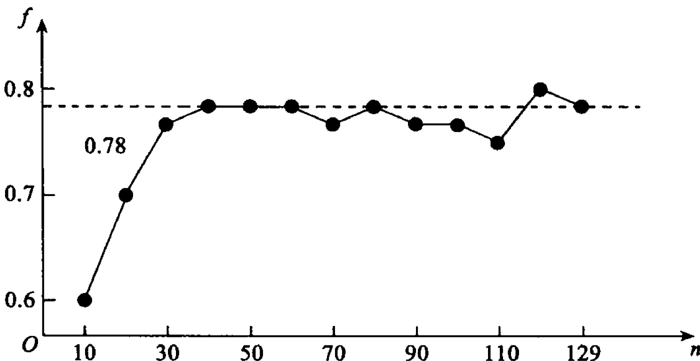


图 8.2.2　27 岁对"青年人"的隶属频率

另外,我们还不难求出"青年人"的隶属函数. 事实上,将 X 分组,每组以中值为代表计算隶属频率,如表 8.2.3 所示.

表 8.2.3　　"青年人"的隶属频率表

分组序号	分 组	频 率	相对频率
1	13.5～14.5	2	0.0155
2	14.5～15.5	27	0.2093
3	15.5～16.5	51	0.3953
4	16.5～17.5	67	0.5194
5	17.5～18.5	124	0.9612
6	18.5～19.5	125	0.9690

续表

分组序号	分 组	频 率	相对频率
7	19.5～20.5	129	1.0000
8	20.5～21.5	129	1.0000
9	21.5～22.5	129	1.0000
10	22.5～23.5	129	1.0000
11	23.5～24.5	129	1.0000
12	24.5～25.5	128	0.9922
13	25.5～26.5	103	0.7984
14	26.5～27.5	101	0.7829
15	27.5～28.5	99	0.7674
16	28.5～29.5	80	0.6202
17	29.5～30.5	77	0.5969
18	30.5～31.5	27	0.2093
19	31.5～32.5	27	0.2093
20	32.5～33.5	26	0.2016
21	33.5～34.5	26	0.2016
22	34.5～35.5	26	0.2016
23	35.5～36.5	1	0.0078

根据表 8.2.3 可以描出直方图如图 8.2.3 所示，再连续地描出图形便可以得出 $A(x)$ 的曲线.

在上述介绍的 Fuzzy 统计方法中，将年龄分成“青年人”与“非青年人”两组，故 Fuzzy 统计又称为二相 Fuzzy 统计(the two-phase fuzzy statistics). 二相指的是

$$P_2=\{A,A^c\} \tag{8.2.3}$$

每进行一次 Fuzzy 试验，都确定了一个映射

$$e:X\to P_2$$

该映射是对 X 的一个划分. 二相 Fuzzy 统计实际上是两个相反的模糊概念在论域 X 中进行“竞选”的统计. 由此可以推知，由二相 Fuzzy 统计所得到的隶属函数，具有性质

$$\forall x\in X,\ A(x)+A^c(x)=1 \tag{8.2.4}$$

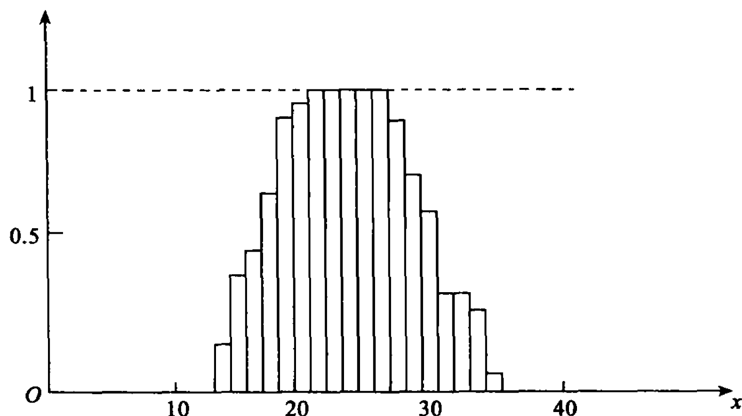


图 8.2.3

在有些问题中，所考察的 Fuzzy 集合不止两个，这需要将上述的二相 Fuzzy 统计法推广为多相 Fuzzy 统计模型.

8.2.2 多相 Fuzzy 统计

给定

$$P_m = \{A_1, A_2, \cdots, A_m\},\ A_i \in \mathscr{F}(X),\ i = 1, 2, \cdots, m \qquad (8.2.5)$$

如果每一次试验的结果都能确定一个映射

$$e: X \to P_m$$

称这样的试验为对 P_m 的 m 相 Fuzzy 统计试验，称集合 P_m 为 m 相集.

例如，{高个子，中等个子，矮个子}，{老，中，青}都是三相集，{小雨，中雨，大雨，大暴雨}是四相集等.

多相统计的结果，能得到各相在论域 X 上的隶属函数. 它们具有性质：

$$\forall x \in X,\ A_1(x) + A_2(x) + \cdots + A_m(x) = 1 \qquad (8.2.6)$$

下面以三相为例，讨论三分法的基本原理.

三相 Fuzzy 统计试验可以等价于下列随机试验：视 (u, v) 为二维随机向量观察值，对其进行抽样，再求得 u, v 的概率分布，从而得到 Fuzzy 集 A_1, A_2, A_3 的隶属函数. 为此先证明下面的定理.

定理 8.2.1 设 $A_1, A_2, A_3 \in \mathscr{F}(\mathbf{R})$，而 (ξ, η) 为随机向量，且满足 $P\{\xi \leqslant \eta\} = 1$，而 $\forall u, v \in \mathbf{R}$，$(u, v)$ 能确定映射

$$e(u,v)(x)=\begin{cases}A_1, & x\leqslant u\\ A_2, & u<x\leqslant v\\ A_3, & x>v\end{cases} \tag{8.2.7}$$

又若 $p_\xi(u)$，$p_\eta(v)$ 分别为 ξ，η 的概率密度函数，而 $p(u,v)$ 为 ξ，η 的联合概率密度函数，则

$$A_1(x)=\int_x^{+\infty}p_\xi(t)\mathrm{d}t \tag{8.2.8}$$

$$A_3(x)=\int_{-\infty}^{x}p_\eta(t)\mathrm{d}t \tag{8.2.9}$$

$$A_2(x)=1-A_1(x)-A_3(x) \tag{8.2.10}$$

证明 给定 $x\in\mathbf{R}$，设做 n 次试验. 由条件，对于几乎每一次试验，存在数对 (u,v)：$u\leqslant v$，以及 $\mathbf{R}$ 的子区间 A_1^*，使得 $x\in A_1^*$，当且仅当 $x\leqslant u$ 且 $x\leqslant v$. 故

$$\frac{\text{“}x\in A_1^*\text{”的次数}}{n}=\frac{\{x\leqslant\xi,x\leqslant\eta\}\text{ 发生次数}}{n} \tag{8.2.11}$$

从而由式(8.2.2)并考虑式(8.2.11)得

$$A_1(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{\text{“}x\in A_1^*\text{”的次数}}{n}=P\{x\leqslant\xi,x\leqslant\eta\} \tag{8.2.12}$$

结合图 8.2.4，有

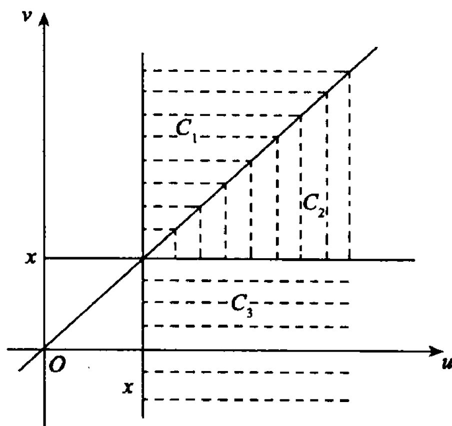


图 8.2.4

$$P\{x\leqslant\xi,x\leqslant\eta\}=\iint\limits_{x\leqslant u,x\leqslant v}p(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\iint\limits_{C_1\cup C_2}p(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

但
$$P\{\xi \leqslant \eta\}=1,$$
故
$$0=P(\xi>\eta) \geqslant \iint_{C_2 \cup C_3} p(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$
即有
$$\iint_{C_2} p(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\iint_{C_3} p(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v=0$$
从而由式(8.2.12)得
$$A_1(x)=\iint_{C_1 \cup C_2 \cup C_3} p(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\int_x^{+\infty}\mathrm{d}u\int_{-\infty}^{+\infty} p(u,v)\,\mathrm{d}v$$
而
$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(u,v)\,\mathrm{d}v=p_{\xi}(u),$$
故
$$A_1(x)=\int_x^{+\infty} p_{\xi}(t)\,\mathrm{d}t$$
同理可证
$$A_3(x)=\int_{-\infty}^{x} p_{\eta}(t)\,\mathrm{d}t$$
为了证明定理,剩下只需证明
$$A_1(x)+A_2(x)+A_3(x)=1 \tag{8.2.13}$$

由于对每一试验结果 (u,v),存在区间 A_1^*,A_2^*,A_3^*,且确定映射
$$e(u,v):\mathbf{R} \to \{A_1,A_2,A_3\}$$
故 $\forall t \in \mathbf{R}$, $t \in A_1^* \cup A_2^* \cup A_3^*$. 记 $b(i,k,x)$ 表示在第 k 次试验中 $x \in A_i^*$ $(i=1,2,3)$ 的次数,则
$$b(i,k,x)=\begin{cases}1, & x \in A_i^* \\ 0, & x \overline{\in} A_i^*\end{cases}$$
这里 $k=1,2,3$. 故在 n 次试验中,有
$$l_n(A_i)(x)=\frac{\text{“}x \in A_i^*\text{”的次数}}{n}=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} b(i,k,x)}{n}$$
从而由式(8.2.2)得　$A_i(x)=\lim\limits_{n \to +\infty}\dfrac{1}{n}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} b(i,k,x)\right)$

这样
$$A_1(x)+A_2(x)+A_3(x)=\lim_{n \to +\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{3} b(i,k,x)\right)$$
而由 $b(i,k,x)$ 的定义,对 $k=1,2,\cdots,n$, $\sum\limits_{k=1}^{3} b(i,k,x)=1$, 故

$$A_1(x)+A_2(x)+A_3(x)=1$$

式(8.2.13)成立,定理得证. □

例 8.2.2 试在某地区建立下列三个 Fuzzy 集的隶属函数:

$$A_1=\text{“矮个子”},\quad A_2=\text{“中等个子”},\quad A_3=\text{“高个子”}$$

设

$$P_3=\{\text{矮个子,中等个子,高个子}\}$$

$$X=(0,3),(\text{单位:m})$$

每次 Fuzzy 试验确定 X 的一次划分,每次划分确定一对数 (ξ,η):

ξ: 矮个子与中等个子的分界点;

η: 中等个子与高个子的分界点.

反之,给定 (ξ,η),也就确定了映射 e,即分出了矮个子、中等个子和高个子,从而使模糊概念明确化了,如图 8.2.5 所示.

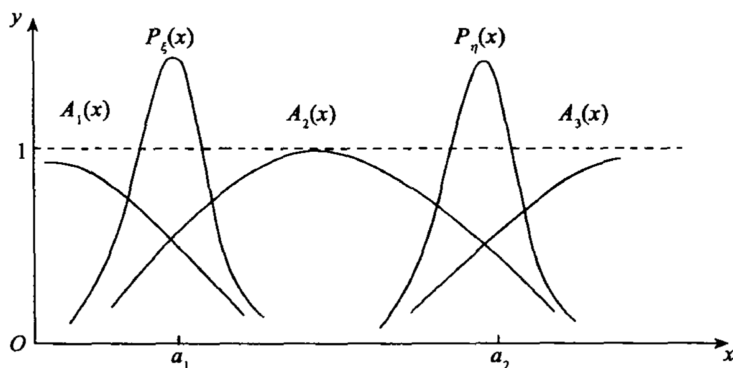


图 8.2.5

矮个子、中等个子与高个子的区间是随机区间,从而 ξ 和 η 是随机变量,现假设它们都服从正态分布,而且

$$\xi\sim N(a_1,\sigma_1^2),\quad \eta\sim N(a_2,\sigma_2^2)$$

则由定理 8.2.1,有

$$A_1(x)=\int_x^{+\infty}p_\xi(t)\mathrm{d}t=1-\int_{-\infty}^{x}p_\xi(t)\mathrm{d}t=1-\Phi\left(\frac{x-a_1}{\sigma_1}\right)$$

$$A_3(x)=\int_{-\infty}^{x}p_\eta(t)\mathrm{d}t=\Phi\left(\frac{x-a_2}{\sigma_2}\right)$$

从而

$$A_2(x)=1-A_1(x)-A_3(x)=\Phi\left(\frac{x-a_1}{\sigma_1}\right)-\Phi\left(\frac{x-a_2}{\sigma_2}\right)$$

其中
$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right)\mathrm{d}t$$
为标准正态分布函数. □

§8.3 二元对比排序

有时在做多相 Fuzzy 统计时,被调查者往往很难从众多的 Fuzzy 集合中选择出唯一的隶属度为 1 的 Fuzzy 集. 实际上,人们最习惯于两两比较(即二元对比). 例如,“张三比李四更热情”,如果设“热情”这个 Fuzzy 概念的外延为 A,那么便有

$$A\,(\text{张三})\geqslant A\,(\text{李四})$$

拿张三与李四对比,看谁对“热情”的隶属度高,这称为二元对比(binary comparisons).

8.3.1 择优比较法(preferred comparison method)

1. 多个 Fuzzy 集的确定

设 $P=\{p_1,p_2,\cdots,p_n\}$ 为被调查对象集,X 是论域,$A_i\in\mathscr{F}(X)$是设定的 m 个 Fuzzy 集 $(i=1,2,\cdots,m)$,$x\in X$,待求隶属度 $A_i(x)$,$i=1,2,\cdots,m$. 对任意一对 (A_s,A_k),$1\leqslant s<k\leqslant m$,$\forall p_j\in P$,规定

$$A_i(x,p_j)=\begin{cases}1, & p_j \quad x\in A_i\\ 0, & p_j \quad x\overline{\in} A_i\end{cases}\tag{8.3.1}$$

$$A_s(x,p_j)+A_k(x,p_j)=1\tag{8.3.2}$$

若
$$A_s(x,p_j)=1,\quad A_k(x,p_j)=0$$
则记为
$$f_{A_k}(A_s,p_j)=1,\quad f_{A_s}(A_k,p_j)=0$$
总起来,可以得到表 8.3.1.

表 8.3.1 p_j 的两两对比表

	A_1	A_2	A_3	$\cdots$	A_m
A_1		0	1	$\cdots$	0
A_2	1		0	$\cdots$	0
A_3	0	1		$\cdots$	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_m	1	1	0	$\cdots$	

将 n 个人的对比结果综合起来便得到两两对比的总表，如表 8.3.2 所示.

表 8.3.2　　n 个人两两比较总表

	A_1	A_2	A_3	…	A_m	$\sum$
A_1		$\sum_{j=1}^{n} f_{A_2}(A_1, p_j)$	$\sum_{j=1}^{n} f_{A_3}(A_1, p_j)$	…	$\sum_{j=1}^{n} f_{A_m}(A_1, p_j)$	
A_2	$\sum_{j=1}^{n} f_{A_1}(A_2, p_j)$		$\sum_{j=1}^{n} f_{A_3}(A_2, p_j)$	…	$\sum_{j=1}^{n} f_{A_m}(A_2, p_j)$	
A_3	$\sum_{j=1}^{n} f_{A_1}(A_3, p_j)$	$\sum_{j=1}^{n} f_{A_2}(A_3, p_j)$		…	$\sum_{j=1}^{n} f_{A_m}(A_3, p_j)$	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
A_m	$\sum_{j=1}^{n} f_{A_1}(A_m, p_j)$	$\sum_{j=1}^{n} f_{A_2}(A_m, p_j)$	$\sum_{j=1}^{n} f_{A_3}(A_m, p_j)$	…		

当 $s \neq k$ 时，显然有下列性质：

性质 8.3.1

$$\sum_{j=1}^{n} f_{A_s}(A_k, p_j) + \sum_{j=1}^{n} f_{A_k}(A_s, p_j) = \sum_{j=1}^{n} (f_{A_s}(A_k, p_j) + f_{A_k}(A_s, p_j)) = \sum_{j=1}^{n} 1 = n \tag{8.3.3}$$

性质 8.3.2

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{s=1, s\neq k}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} f_{A_k}(A_s, p_j) \right) = \frac{n(m^2 - m)}{2} = \frac{nm(m-1)}{2} \tag{8.3.4}$$

这时，隶属度 $A_i(x)(i=1,2,\cdots,m)$ 可以按下式计算

$$A_i(x) = \frac{\sum_{k=1, k\neq i}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} f_{A_k}(A_i, p_j) \right)}{\frac{1}{2} nm(m-1)} \tag{8.3.5}$$

显然 $A_i(x)$ 满足下列条件

$$\sum_{i=1}^{m} A_i(x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\sum_{k=1, k\neq i}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} f_{A_k}(A_i, p_j) \right)}{\frac{1}{2} nm(m-1)} = 1 \tag{8.3.6}$$

2. 一个 Fuzzy 集的确定

设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$ 为有限论域，$A\in\mathscr{F}(X)$，待求 $A(x_i)$，$i=1,2,\cdots,m$. 仍设 $P=\{p_1,p_2,\cdots,p_n\}$ 为被调查对象集. 对任意一对 (x_s,x_k)，$1\leqslant s<k\leqslant m$，$\forall p_j\in P$，规定

$$A(x_i,p_j)=\begin{cases}1, & p_j \quad x_i\in A\\ 0, & p_j \quad x_i\,\overline{\in}\,A\end{cases}\tag{8.3.7}$$

$$A(x_s,p_j)+A(x_k,p_j)=1\tag{8.3.8}$$

若 $\qquad A(x_s,p_j)=1,\quad A(x_k,p_j)=0$

则记为 $\qquad f_{x_k}(x_s,p_j)=1,\quad f_{x_s}(x_k,p_j)=0$

这样可以得到表 8.3.3.

表 8.3.3 p_j 的两两对比表

	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_m
x_1		1	0	$\cdots$	0
x_2	0		1	$\cdots$	1
x_3	1	0		$\cdots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_m	1	0	1	$\cdots$	

再将 n 个人 $(p_1,p_2,\cdots,p_n)$ 的对比结果综合起来就得到一个总表，如表 8.3.4所示.

表 8.3.4 n 个人两两比较总表

	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_m	$\sum$
x_1		$\sum_{j=1}^{n}f_{x_2}(x_1,p_j)$	$\sum_{j=1}^{n}f_{x_3}(x_1,p_j)$	$\cdots$	$\sum_{j=1}^{n}f_{x_m}(x_1,p_j)$	
x_2	$\sum_{j=1}^{n}f_{x_1}(x_2,p_j)$		$\sum_{j=1}^{n}f_{x_3}(x_2,p_j)$	$\cdots$	$\sum_{j=1}^{n}f_{x_m}(x_2,p_j)$	
x_3	$\sum_{j=1}^{n}f_{x_1}(x_3,p_j)$	$\sum_{j=1}^{n}f_{x_2}(x_3,p_j)$		$\cdots$	$\sum_{j=1}^{n}f_{x_m}(x_3,p_j)$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
x_m	$\sum_{j=1}^{n}f_{x_1}(x_m,p_j)$	$\sum_{j=1}^{n}f_{x_2}(x_m,p_j)$	$\sum_{j=1}^{n}f_{x_3}(x_m,p_j)$	$\cdots$		

当 $s \neq k$ 时，也可以得到下列性质：

性质 8.3.3 $$\sum_{j=1}^{n} f_{x_s}(x_k, p_j) + \sum_{j=1}^{n} f_{x_k}(x_s, p_j) = n \tag{8.3.9}$$

性质 8.3.4 $$\sum_{k=1}^{m} \sum_{s=1, s\neq k}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} f_{x_k}(x_s, p_j) \right) = \frac{mn(m-1)}{2} \tag{8.3.10}$$

这时，隶属度 $A(x_i)(i=1,2,\cdots,m)$ 可以按下式计算

$$A(x_i) = \frac{\sum_{k=1, k\neq i}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} f_{x_k}(x_i, p_j) \right)}{\frac{1}{2} mn(m-1)}, \quad i=1,2,\cdots,m \tag{8.3.11}$$

易知，$A(x_i)$ 满足下列条件

$$\sum_{i=1}^{m} A(x_i) = 1 \tag{8.3.12}$$

例 8.3.1 生产乒乓球拍用什么颜色最好？这里以被选择的颜色作为论域：

$$X = \{红,橙,黄,绿,蓝\} = \{r, o, y, g, b\}$$

令 A = 颜色好. 设法求出 X 中各元素对 A 的隶属度，则隶属度最大的颜色为最好.

为此，从乒乓球爱好者中随机抽取 500 人，每人将 X 中的五个颜色按表 8.3.5中的序号两两对比，择优指定一种作为自己所喜爱的颜色. 所得结果如表 8.3.6 所示（由于每人测两次，故 $n = 500 \times 2 = 1000$）.

表 8.3.5 **择优试验顺序表**

	r	o	y	g	b
r					
o	1				
y	5	2			
g	8	6	3		
b	10	9	7	4	

表 8.3.6 **择优结果表**

	r	o	y	g	b	$\sum$
r		517	525	545	661	2248
o	483		841	477	576	2377
y	475	159		534	614	1782
g	455	523	466		643	2087
b	339	524	386	357		1506

$$A(r)=\frac{2248}{1000\times5\times4\times\frac{1}{2}}=0.2248$$

$$A(o)=0.2377,\quad A(y)=0.1782$$

$$A(g)=0.2087,\quad A(b)=0.1506$$

于是 $A=\frac{0.2248}{r}+\frac{0.2377}{o}+\frac{0.1782}{y}+\frac{0.2087}{g}+\frac{0.1506}{b}$. □

8.3.2 绝对比较法 (the absolute comparison method)

1. 多个 Fuzzy 集的确定

在择优比较法中,我们在进行两两对比时,都有一个约定

$$\begin{cases}A_i(x,p_j)=1 \text{ 或 } 0\\ A_s(x,p_j)+A_k(x,p_j)=1,\ 1\leqslant s<k\leqslant 1\end{cases}\tag{8.3.13}$$

现在我们取消这一约定,即在两两比较中,允许 $A_s(x,p_j)$ 与 $A_k(x,p_j)$ 在 $[0,1]$ 区间中取值. 特别地,在某一类问题中,可以采用如下很方便的绝对比较法.

设 $A_1,A_2,\cdots,A_m\in\mathscr{F}(X)$ 为待求的 m 个 Fuzzy 集, $x\in X$, 我们来确定隶属度 $A_i(x)$, $i=1,2,\cdots,m$.

假定存在某一指标 $r\in\{1,2,\cdots,m\}$, 使得 x 明显地优先属于 A_r, 即

$$A_r(x)=\max\{A_i(x)\mid 1\leqslant i\leqslant m\}\tag{8.3.14}$$

则不采用全面的两两比较,而只作出与 A_r 的各个比较值

$$f_{A_r}(A_i,p_j),\quad i=1,2,\cdots,m\tag{8.3.15}$$

这里 $f_{A_r}(A_r,p_j)$ 是作为参照的标准值.

仍设 $P=\{p_1,p_2,\cdots,p_n\}$ 为被调查者集,若记

$$a_i\triangleq\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}f_{A_r}(A_i,p_j)\tag{8.3.16}$$

则各隶属度可以取为

$$A_i(x)=\frac{a_i}{\sum_{k=1}^{m}a_k}\tag{8.3.17}$$

很显然, $\sum_{i=1}^{m}A_i(x)=1$.

2. 一个 Fuzzy 集的确定

现在假定 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$ 为有限集, $A\in\mathscr{F}(X)$ 是待确定的 Fuzzy 集, 求 $A(x_i)$, $i=1,2,\cdots,m$.

第一步:确定指标 $r \in \{1,2,\cdots,m\}$, 使得

$$A(x_r)=\max\{A(x_1),A(x_2),\cdots,A(x_m)\} \tag{8.3.18}$$

即 x_r 优先属于 A.

第二步:对每个调查者 p_j $(j=1,2,\cdots,n)$作两两比较值

$$f_{x_r}(x_i,p_j),\quad i=1,2,\cdots,m \tag{8.3.19}$$

第三步:综合 n 个调查者两两比较的结果,得

$$a_i=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}f_{x_r}(x_i,p_j),\quad i=1,2,\cdots,m \tag{8.3.20}$$

第四步:根据诸 a_i 通过归一化计算隶属度

$$A(x_i)=\frac{a_i}{\sum_{j=1}^{m}a_j},\quad i=1,2,\cdots,m \tag{8.3.21}$$

例 8.3.2 评价某项工程,设因素集为 $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$, 其中:

x_1——技术可行性;x_2——设备投资;x_3——作业成本;x_4——用料用工费.

试确定 X 中元素的权重分配 $A=(A(x_1),A(x_2),A(x_3),A(x_4))\in\mathscr{F}(X)$.

现选取了 10 名评议者:$P=\{p_1,p_2,\cdots,p_{10}\}$. 首先,他们共同议定 x_4 为影响经济效益的主要指标,并打上最高分 10 分,即 $f_{x_4}(x_4,p_j)=10$, $j=1,2,\cdots,10$, 另

$$f_{x_4}(x_1,p_1)=4,\quad f_{x_4}(x_2,p_1)=9,\quad f_{x_4}(x_3,p_1)=6$$
$$f_{x_4}(x_1,p_2)=4,\quad f_{x_4}(x_2,p_2)=8,\quad f_{x_4}(x_3,p_2)=7$$
$$f_{x_4}(x_1,p_3)=4,\quad f_{x_4}(x_2,p_3)=8,\quad f_{x_4}(x_3,p_3)=7$$
$$f_{x_4}(x_1,p_4)=5,\quad f_{x_4}(x_2,p_4)=8,\quad f_{x_4}(x_3,p_1)=5$$
$$f_{x_4}(x_1,p_5)=5,\quad f_{x_4}(x_2,p_5)=8,\quad f_{x_4}(x_3,p_5)=5$$
$$f_{x_4}(x_1,p_6)=4,\quad f_{x_4}(x_2,p_6)=8,\quad f_{x_4}(x_3,p_6)=5$$
$$f_{x_4}(x_1,p_7)=5,\quad f_{x_4}(x_2,p_7)=9,\quad f_{x_4}(x_3,p_7)=5$$
$$f_{x_4}(x_1,p_8)=4,\quad f_{x_4}(x_2,p_8)=9,\quad f_{x_4}(x_3,p_8)=5$$
$$f_{x_4}(x_1,p_9)=4,\quad f_{x_4}(x_2,p_9)=9,\quad f_{x_4}(x_3,p_9)=6$$
$$f_{x_4}(x_1,p_{10})=4,\quad f_{x_4}(x_2,p_{10})=9,\quad f_{x_4}(x_3,p_{10})=6$$

计算它们的平均数,可得

$$a_1=\frac{1}{10}\sum_{j=1}^{10}f_{x_4}(x_1,p_j)=4.3$$

$$a_2=\frac{1}{10}\sum_{j=1}^{10}f_{x_4}(x_2,p_j)=8.5$$

$$a_3 = \frac{1}{10}\sum_{j=1}^{10} f_{x_4}(x_3, p_j) = 5.7$$

$$a_4 = \frac{1}{10}\sum_{j=1}^{10} f_{x_4}(x_4, p_j) = 10$$

将 a_1, a_2, a_3, a_4 归一化，便得

$$A(x_1) = \frac{a_1}{\sum_{i=1}^{4} a_i} = \frac{4.3}{4.3 + 8.5 + 5.7 + 10} \approx 0.15$$

同理　　$A(x_2) \approx 0.30,\quad A(x_3) \approx 0.20,\quad A(x_4) \approx 0.35.$

由此得到　　$A = (0.15, 0.30, 0.20, 0.35).$　□

8.3.3 相对比较法(the relative comparison method)

1. 多个 Fuzzy 集的确定

设 $P = \{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$ 为被调查对象集，X 是论域，$A_i \in \mathscr{F}(X)$ 是设定的 m 个 Fuzzy 集 $(i = 1, 2, \cdots, m)$，$x \in X$，待求隶属度 $A_i(x)$，$i = 1, 2, \cdots, m$. 用 $f_{A_s}(A_k, p_j)$ 表示对于 x，A_k 与 A_s 相比较，p_j 认为 A_k 的取值，如表 8.3.7 所示.

约定 $0 \leqslant f_{A_s}(A_k, p_j) \leqslant 1$，且 $f_{A_s}(A_s, p_j) = 1$，但不要求满足 $f_{A_s}(A_k, p_j) + f_{A_k}(A_s, p_j) = 1$. 记

$$f_{A_s}(A_k) \triangleq \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f_{A_s}(A_k, p_j) \tag{8.3.22}$$

可以获得 n 个人的比较结果，如表 8.3.8 所示.

表 8.3.7　　p_j 的两两对比表

	A_1	A_2	A_3	$\cdots$	A_m
A_1		$f_{A_2}(A_1, p_j)$	$f_{A_3}(A_1, p_j)$	$\cdots$	$f_{A_m}(A_1, p_j)$
A_2	$f_{A_1}(A_2, p_j)$		$f_{A_3}(A_2, p_j)$	$\cdots$	$f_{A_m}(A_2, p_j)$
A_3	$f_{A_1}(A_3, p_j)$	$f_{A_2}(A_3, p_j)$		$\cdots$	$f_{A_m}(A_3, p_j)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_m	$f_{A_1}(A_m, p_j)$	$f_{A_2}(A_m, p_j)$	$f_{A_3}(A_m, p_j)$	$\cdots$	

再令

$$f(A_k \mid A_s) \triangleq \frac{f_{A_s}(A_k)}{\max\{f_{A_s}(A_k), f_{A_k}(A_s)\}} = \min\left\{1, \frac{f_{A_s}(A_k)}{f_{A_k}(A_s)}\right\} \tag{8.3.23}$$

表 8.3.8 p_j 的两两对比表

	A_1	A_2	A_3	…	A_m
A_1		$f_{A_2}(A_1)$	$f_{A_3}(A_1)$	…	$f_{A_m}(A_1)$
A_2	$f_{A_1}(A_2)$		$f_{A_3}(A_2)$	…	$f_{A_m}(A_2)$
A_3	$f_{A_1}(A_3)$	$f_{A_2}(A_3)$		…	$f_{A_m}(A_3)$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
A_m	$f_{A_1}(A_m)$	$f_{A_2}(A_m)$	$f_{A_3}(A_m)$	…	

由此可以得到一个矩阵，如表 8.3.9 所示.

表 8.3.9 p_j 的两两对比表

	A_1	A_2	A_3	…	A_m
A_1		$f(A_1 \mid A_2)$	$f(A_1 \mid A_3)$	…	$f(A_1 \mid A_m)$
A_2	$f(A_2 \mid A_1)$		$f(A_2 \mid A_3)$	…	$f(A_2 \mid A_m)$
A_3	$f(A_3 \mid A_1)$	$f(A_3 \mid A_2)$		…	$f(A_3 \mid A_m)$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
A_m	$f(A_m \mid A_1)$	$f(A_m \mid A_2)$	$f(A_m \mid A_3)$	…	

显然有

$$f(A_k \mid A_s) = \begin{cases} \dfrac{f_{A_s}(A_k)}{f_{A_k}(A_s)}, & f_{A_s}(A_k) \leqslant f_{A_k}(A_s) \\ 1, & f_{A_k}(A_s) > f_{A_s}(A_k), s = k \end{cases} \tag{8.3.24}$$

再将诸 $f(A_k \mid A_s)$ 综合起来便得到隶属度，比如取

$$A_i(x) = \bigwedge_{s=1}^{m} f(A_i \mid A_s), \quad i = 1, 2, \cdots, m. \tag{8.3.25}$$

2. 一个 Fuzzy 集的确定

类似§8.3.1 和§8.3.2 也有相应的确定一个 Fuzzy 集的相对比较法. 下面通过例子来说明该方法.

例 8.3.3 设 $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ 为有限论域，x_1 表示长子，x_2 表示次子，x_3 表示幼子；$A \in \mathscr{F}(X)$表示 Fuzzy 概念"与父亲相像". 假定由两两比较得到表 8.3.10.

表 8.3.10 相似值 $f_{x_j}(x_i)$

	x_1	x_2	x_3
x_1	1	0.8	0.5
x_2	0.5	1	0.4
x_3	0.3	0.7	1

不难算出

$$f(x_1 \mid x_2) = \frac{f_{x_2}(x_1)}{\max\{f_{x_1}(x_2), f_{x_2}(x_1)\}} = \frac{0.8}{\max\{0.5, 0.8\}} = 1$$

$$f(x_2 \mid x_1) = \frac{0.5}{0.8} \approx 0.62, \quad f(x_1 \mid x_3) = \frac{0.5}{0.5} = 1$$

$$f(x_3 \mid x_1) = \frac{0.3}{0.5} \approx 0.60, \quad f(x_2 \mid x_3) = \frac{0.4}{0.7} \approx 0.57$$

$$f(x_3 \mid x_2) = 1.$$

由此又可以建立表 8.3.11.

表 8.3.11 关 系 表

	x_1	x_2	x_3	min
x_1	1	1	1	1
x_2	0.62	1	0.57	0.57
x_3	0.60	1	1	0.60

将表 8.3.11 中元素按行取小得到隶属度

$$A(x_1) = 1, \quad A(x_2) = 0.57, \quad A(x_3) = 0.60$$

由此得到，长子最像父亲，幼子次之，次子最不像. □

8.3.4 对比平均法(the average pairwise comparison method)

1. 多个 Fuzzy 集的确定

根据表 8.3.8，取适当的 Fuzzy 综合函数 $\varphi \in \mathcal{U}_m$ (参见 § 6.3)，令

$$A_i(x) = \varphi(f_{A_1}(A_i), f_{A_2}(A_i), \cdots, f_{A_m}(A_i)), \quad i = 1, 2, \cdots, m \qquad (8.3.26)$$

则得到隶属函数. 特别地，取加权平均型 Fuzzy 综合函数，且 $a_j = \frac{1}{m}$，则有常用公式

$$A_i(x)=\sum_{j=1}^{m}a_j f_{A_j}(A_i)=\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}f_{A_j}(A_i) \tag{8.3.27}$$

2. 一个 Fuzzy 集的确定

类似§8.3.1和§8.3.2也有相应的确定一个 Fuzzy 集的对比平均法. 下面通过例子来说明该方法.

例 8.3.4 设 $X=\{x_1,x_2,x_3\}$，x_1 表示长子，x_2 表示次子，x_3 表示幼子；$A\in\mathscr{F}(X)$表示 Fuzzy 概念"美". 假定由两两比较得到表 8.3.12.

表 8.3.12 **相似值 $f_{x_j}(x_i)$**

	x_1	x_2	x_3	$\sum$
x_1	1	0.8	0.9	2.8
x_2	0.7	1	0.8	2.5
x_3	0.5	0.4	1	1.9

按行平均后便得到所求的隶属度

$$A(x_1)=\frac{2.8}{3}\approx 0.93,\quad A(x_2)=\frac{2.5}{3}\approx 0.83,\quad A(x_3)=\frac{1.9}{3}\approx 0.63$$

由上述可知美的次序从大到小为长子、次子和幼子.

这里三子的权重是相同的，即他们是等权的. 如果考虑偏爱或特殊兴趣，例如分别给三子赋权重 0.1，0.8，0.1，则

$$\begin{aligned}A(x_1)&=0.1\times f_{x_1}(x_1)+0.8\times f_{x_2}(x_1)+0.1\times f_{x_3}(x_1)\\&=0.1\times 1+0.8\times 0.8+0.1\times 0.9=0.83\\A(x_2)&=0.1\times f_{x_1}(x_2)+0.8\times f_{x_2}(x_2)+0.1\times f_{x_3}(x_2)\\&=0.1\times 0.7+0.8\times 1+0.1\times 0.8=0.95\\A(x_3)&=0.1\times f_{x_1}(x_3)+0.8\times f_{x_2}(x_3)+0.1\times f_{x_3}(x_3)\\&=0.1\times 0.5+0.8\times 0.4+0.1\times 1=0.47.\end{aligned}$$

从而美的次序为次子、长子和幼子. 次子在此评为最美的原因是由于对次子的偏爱. □

8.3.5 优先关系定序法 (the ordering by precedence relation method)

设有 n 个对象 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，按照某种特性在它们之间排出一定的优劣次序. 如果把这种特性用论域 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 上的 Fuzzy 集 $A\in\mathscr{F}(X)$来表

示，则可以根据既定的次序确定出隶属函数 $A(x)$.

在这些对象之间建立一种优先关系 $C=(c_{ij})_{n\times n}$，其中 c_{ij} 表示 x_i 与 x_j 相比较时，x_i 比 x_j 优越的成分，或称 x_i 对 x_j 的优先选择比，要求满足条件：

(1) $c_{ii}=0$, $i=1,2,\cdots,n$;

(2) $0\leqslant c_{ij}\leqslant 1$, $i\neq j$, $i,j=1,2,\cdots,n$;

(3) $c_{ij}+c_{ji}=1$.

取定阈值 $\alpha\in[0,1]$，得到截矩阵

$$C_\alpha=\begin{bmatrix} c_{11}^{(\alpha)} & c_{12}^{(\alpha)} & \cdots & c_{1n}^{(\alpha)} \\ c_{21}^{(\alpha)} & c_{22}^{(\alpha)} & \cdots & c_{2n}^{(\alpha)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1}^{(\alpha)} & c_{n2}^{(\alpha)} & \cdots & c_{nn}^{(\alpha)} \end{bmatrix} \tag{8.3.28}$$

其中

$$c_{ij}^{(\alpha)}=\begin{cases}1, & c_{ij}\geqslant\alpha \\ 0, & c_{ij}<\alpha\end{cases} \tag{8.3.29}$$

让 α 从 1 到 0，若首先出现 C_{α_1}，上述矩阵的第 i_1 行元素除对角线之外全等于 1，则 x_{i_1} 算做是第一批优越对象(未必唯一).

除去第一批优越的那一批对象，得到新的优先关系矩阵，用同样的方法获得第二批优越的对象，如此继续下去，可以将全部对象排出一定的优劣次序.

设 $X_j=\{x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_{k_j}}\}$ 为第 j 批优越对象，其中 $j=1,2,\cdots,s$，并且 $k_1+k_2+\cdots+k_s=n$，隶属度由下式得出

$$A(x)=\frac{n-\sum_{p=1}^{j-1}k_p}{n} \tag{8.3.30}$$

其中 $x\in X_j$, $j=1,2,\cdots,s$；约定 $\sum_{p=1}^{0}k_p=0$.

例 8.3.5　设 $X=\{x_1,x_2,x_3\}$，$A\in\mathscr{F}(X)$为待定的 Fuzzy 集. 已知其优先关系矩阵为

$$C=\begin{bmatrix} 0 & 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0 & 0.7 \\ 0.8 & 0.3 & 0 \end{bmatrix}$$

让 α 从大到小依次截取矩阵 C，得到矩阵

$$C_{0.9}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad C_{0.8}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_{0.7}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix},\quad C_{0.3}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$$

当 α 降至 0.3 时，在 $C_{0.3}$ 中首次出现这种现象：其第三行除主对角线外，其余元素均为 1，这意味着 x_3 对其他元素的优越成分一致地超过了 0.3，因此把 x_3 算做第一批优越对象.

除去 x_3 以后，又得到优先关系矩阵

$$C^{(1)}=\begin{bmatrix}0&0.9\\0.1&0\end{bmatrix}$$

注意

$$C_{0.9}^{(1)}=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$$

$C_{0.9}^{(1)}$ 的第一行除主对角线元素以外为 1，故取 x_1 为第二批优越对象.

最后的结论是：x_3 优于 x_1，x_1 优于 x_2. 同时

$$A(x_3)=\frac{3-0}{3}=1,\quad A(x_1)=\frac{3-1}{3}\approx 0.67,\quad A(x_2)=\frac{3-2}{3}\approx 0.33.\quad \square$$

8.3.6 Delphi 法

Delphi 法是利用专家集体智慧来确定因素权重 Fuzzy 集的有效方法之一. 设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$ 为有限论域(因素集)，$A\in\mathscr{F}(X)$，待求 $A(x_i)$，$i=1,2,\cdots,m$. 设 $P=\{p_1,p_2,\cdots,p_n\}$ 为被调查对象(专家)集. 对每一专家给出各因素 x_i 的重要性序列值 e_i，这里 $e_i\in\{1,2,\cdots,m\}$ 确定方法如下：对最重要的因素，取 $e_i=m$；对最次要的因素，取 $e_i=1$. 将第 k 个专家对因素 x_i 所给定的因素重要性序列值记为 $e_i(k)$. 第 k 个专家的评定结果如表 8.3.13 所示.

表 8.3.13 第 k 个专家的 e_i 值评定表

	x_1	x_2	$\cdots$	x_m
$e_i(k)$	$e_1(k)$	$e_2(k)$	$\cdots$	$e_m(k)$

根据专家们所提供的因素重要性序列值 e_i 进行如下统计：

当 $\dfrac{e_j(k)}{e_i(k)}>1$ 时，记 $f_{x_i}(x_j,p_k)=1$；当 $\dfrac{e_j(k)}{e_i(k)}<1$ 时，记 $f_{x_i}(x_j,p_k)=0$.

将所有参加评议的专家的值 $f_{x_i}(x_j,p_k)$ 累加起来，即

$$f_{ij}=\sum_{k=1}^{n}f_{x_i}(x_j,p_k),\quad i,j=1,2,\cdots,m \tag{8.3.31}$$

记
$$f_i=\sum_{j=1}^{n}f_{ij},$$
$$i=1,2,\cdots,m,$$
$$f_{\max}=\max\{f_i \mid i=1,2,\cdots,m\},$$
$$f_{\min}=\min\{f_i \mid i=1,2,\cdots,m\}.$$

因素重要程度系数 a_i 可以由下列两个公式之一计算：

$$a_i=\frac{f_i-f_{\min}}{d}+0.1,\quad i=1,2,\cdots,m \tag{8.3.32}$$

或

$$a_i=1-\frac{f_{\max}-f_i}{d}+0.1,\quad i=1,2,\cdots,m \tag{8.3.33}$$

其中 $d=\frac{f_{\max}-f_{\min}}{0.9}$. 由此得到所需要的因素重要程度 Fuzzy 集.

§8.4 层次分析法与因素权重 Fuzzy 集

层次分析法(Analytic Hierarchy Process,简称 AHP)是对一些较为复杂、较为模糊的问题作出决策的简易方法,该方法特别适用于那些难以完全定量分析的问题. 该方法的特点是定性分析与定量分析相结合,将人的主观判断用数量形式表达和处理. 该方法是美国运筹学家 T. L. Saaty 教授于 20 世纪 70 年代初期提出的一种简便、灵活而又实用的多准则决策方法. 该方法的核心就是因素权重的确定,而因素权重就是一个 Fuzzy 集. 下面介绍确定因素权重 Fuzzy 集的层次分析法.

8.4.1 判断矩阵

在确定诸因素在整个问题中所占的比重时,遇到的主要困难是这些比重常常不易定量化. 此外,当影响某问题的因素较多时,直接考虑各因素对该问题有多大程度的影响时,常常会因考虑不周全、顾此失彼而使决策者提出与他实际认为的重要性程度不相一致的数据,甚至有可能提出一组隐含矛盾的数据. 为看清这一点,可以作如下假设:将一块重为 1kg 的石块砸成 n 小块,你可以精确称出它们的重量,设为 $w_1,w_2,\cdots,w_n$, 现在,请人估计这 n 小块的重量占总重量的比例(不能让他知道各小石块的重量),此人不仅很难给出精确的比值,而且完全可能因顾此失彼而提供彼此矛盾的数据.

设现在要比较 n 个因素 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 在整个中各占多大比重? Saaty 等人建议可以采取对因素进行两两比较建立成对比较矩阵的办法. 即每次取

两个因素 x_i 和 x_j，以 a_{ij} 表示 x_i 和 x_j 对总体的影响大小之比，全部比较结果用矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 表示，称 A 为判断矩阵. 容易看出，若 x_i 与 x_j 对总体的影响之比为 a_{ij}，则 x_j 与 x_i 对总体的影响之比应为 $a_{ji}=\frac{1}{a_{ij}}$.

定义 8.4.1 若矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 满足

(1) $a_{ij}>0$；(2) $a_{ji}=\frac{1}{a_{ij}}$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$.

则称 A 为正互反矩阵(易见 $a_{ii}=1$, $i=1,2,\cdots,n$).

关于如何确定 a_{ij} 的值，Saaty 等建议引用数字 1～9 及其倒数作为标度. 表 8.4.1 列出了 1～9 标度的含义：

表 8.4.1 1～9 标度方法表

标度	含　义
1	表示两个因素相比较，具有相同重要性(Equal Importance).
3	表示两个因素相比较，前者比后者稍重要(Moderate Importance).
5	表示两个因素相比较，前者比后者明显重要(Strong Importance).
7	表示两个因素相比较，前者比后者十分重要(Very Strong Importance).
9	表示两个因素相比较，前者比后者极其重要(Extreme Importance).
2,4,6,8	表示上述相邻判断的中间值.
倒数	若因素 x_i 与因素 x_j 的重要性之比为 a_{ij}，那么因素 x_j 与因素 x_i 重要性之比为 $a_{ji}=\frac{1}{a_{ij}}$.

例 8.4.1 考虑汽车的三个因素 x_1(购车成本)，x_2(维修成本)和 x_3(一加仑汽油所行驶的里程). 专家评定对总目标而言，x_1 比 x_2 稍重要；x_2 比 x_3 稍重要；x_1 比 x_3 明显重要. 据此即可得正互反矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ \frac{1}{3} & 1 & 3 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

从心理学观点来看，分级太多会超越人们的判断能力，既增加了作判断的难度，又容易因此而提供虚假数据. Saaty 等人还用实验方法比较了在各种不同标度下人们判断结果的正确性，实验结果也表明，采用 1～9 标度最为合适.

最后，应该指出，一般地作 $\frac{n(n-1)}{2}$ 次两两判断是必要的. 有人认为把所有元素都和某个元素相比较，即只作 $n-1$ 个比较就可以了. 这种作法的弊病在于，任何一个判断的失误均可导致不合理的排序，而个别判断的失误对于难以定量的系统往往是难以避免的. 进行 $\frac{n(n-1)}{2}$ 次比较可以提供更多的信息，通过各种不同角度的反复比较，从而导出一个合理的排序.

为了依据判断矩阵给出各因素对总目标而言的重要性权重，先设因素 x_i 的重要性权重为 $w_i \in (0,1)$，且 $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$，则 $W=(w_1, w_2, \cdots, w_n)^{\mathrm{T}}$ 就是权向量. 构造矩阵

$$A^* = \left(\frac{w_i}{w_j}\right)_{n\times n} = (a_{ij}^*)_{n\times n}, \text{ 即 } a_{ij}^* = \frac{w_i}{w_j}, \quad i,j=1,2,\cdots,n \tag{8.4.1}$$

$$A^* = \begin{bmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \cdots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \cdots & \frac{w_2}{w_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \cdots & \frac{w_n}{w_n} \end{bmatrix} \tag{8.4.2}$$

容易验证 A^* 具有下列性质：

(1) 正互反性；

(2) 一致性，即 $a_{ij}^* = \frac{w_i}{w_j} = \frac{w_i}{w_k} \cdot \frac{w_k}{w_j} = a_{ik}^* a_{kj}^*$ ($i,j,k=1,2,\cdots,n$)；

(3) A^* 的任意两行(列)都成正比例，从而 A^* 的秩为 1. n 是 A^* 的最大特征值，W 是对应特征值 n 的(归一化)特征向量. A^* 的其余 $n-1$ 个特征值都是 0.

事实上

$$A^* W = \begin{bmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \cdots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \cdots & \frac{w_2}{w_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \cdots & \frac{w_n}{w_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = n \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = nW$$

即 n 是 A^* 的特征值，再注意到 A^* 的所有特征值之和为 $\mathrm{tr}(A^*) = n$；

(4)
$$w_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\frac{w_i}{w_j}}{\sum_{k=1}^{n} \frac{w_k}{w_j}} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{a_{ij}^*}{\sum_{k=1}^{n} a_{kj}^*}, \quad i=1,2,\cdots,n \tag{8.4.3}$$

(5)
$$w_i=\frac{w_i\left(\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{w_j}\right)^{\frac{1}{n}}}{\sum_{k=1}^{n}w_k\left(\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{w_j}\right)^{\frac{1}{n}}}=\frac{\left(\prod_{j=1}^{n}\frac{w_i}{w_j}\right)^{\frac{1}{n}}}{\sum_{k=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{n}\frac{w_k}{w_j}\right)^{\frac{1}{n}}}$$
$$=\frac{\left(\prod_{j=1}^{n}a_{ij}^{*}\right)^{\frac{1}{n}}}{\sum_{k=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{n}a_{kj}^{*}\right)^{\frac{1}{n}}},\quad i=1,2,\cdots,n \tag{8.4.4}$$

即权向量的每一个分量可以直接由以上两式简单的求和或求积方式给出.

我们可以确定判断矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，但我们事先不知道 $A^*=\left(\frac{w_i}{w_j}\right)_{n\times n}$. 用 A 代替 A^*，可以给出 $W=(w_1,w_2,\cdots,w_n)'$ 的如下几个近似计算方法.

(1) 特征根法(简记 EM)，解判断矩阵 A 的特征根问题

$$AW=\lambda_{\max}W \tag{8.4.5}$$

式中，$\lambda_{\max}$ 是 A 的最大特征根，W 是相应的特征向量，所得到的 W 经归一化后就可以作为权重向量.

(2) 和法，将判断矩阵 A 的 n 个列向量归一化后的行向量算术平均值，近似作为权重向量，即

$$w_i=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{a_{ij}}{\sum_{k=1}^{n}a_{kj}},\quad i=1,2,\cdots,n \tag{8.4.6}$$

(3) 根法(即几何平均法)，将 A 的各个行向量进行几何平均，然后归一化，得到的行向量就是权重向量. 其公式为

$$w_i=\frac{\left(\prod_{j=1}^{n}a_{ij}\right)^{\frac{1}{n}}}{\sum_{k=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{n}a_{kj}\right)^{\frac{1}{n}}},\quad i=1,2,\cdots,n \tag{8.4.7}$$

可以用最小二乘法获得几何平均方法. 事实上，用拟合方法确定权重向量 $W=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^{\mathrm{T}}$，使残差平方和 $Q=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\ln a_{ij}-\ln\left(\frac{w_i}{w_j}\right)\right]^2$ 为最小. 因为

$$\frac{\partial Q}{\partial w_k}=2\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\ln a_{ik}-\ln\frac{w_i}{w_k}\right)\frac{1}{w_k}-\sum_{j=1}^{n}\left(\ln a_{kj}-\ln\frac{w_k}{w_j}\right)\frac{1}{w_k}\right],\quad k=1,2,\cdots,n \tag{8.4.8}$$

令 $\frac{\partial Q}{\partial w_k}=0$，可得

$$2n\ln w_k=\sum_{j=1}^{n}(\ln a_{kj}-\ln a_{jk}+2\ln w_j),\quad k=1,2,\cdots,n \tag{8.4.9}$$

注意 $a_{jk}=\frac{1}{a_{kj}}$，故

$$w_k=\left(\prod_{j=1}^{n}a_{kj}\right)^{\frac{1}{n}}\left(\prod_{j=1}^{n}w_j\right)^{\frac{1}{n}},\quad k=1,2,\cdots,n \tag{8.4.10}$$

再由 $\sum_{k=1}^{n}w_k=1$，得

$$\left(\prod_{j=1}^{n}w_j\right)^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{\sum_{k=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{n}a_{kj}\right)^{\frac{1}{n}}} \tag{8.4.11}$$

从而可得所需的结果.

例 8.4.2 判断矩阵见例 8.4.1 的 A.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\ \frac{1}{3} & 1 & 3\\ \frac{1}{5} & \frac{1}{3} & 1\end{pmatrix}$$

(1) 特征根法，A 的最大特征根为 $\lambda_{\max}=3.039$，其归一化的特征向量为 $(0.64,0.26,0.10)$，则权重为 $w_1=0.64$，$w_2=0.26$，$w_3=0.10$.

(2) 和法，将 A 的列向量归一化得

$$\begin{pmatrix}0.65 & 0.69 & 0.56\\ 0.22 & 0.23 & 0.33\\ 0.13 & 0.08 & 0.11\end{pmatrix}$$

按行平均得到 $w_1=0.63$，$w_2=0.26$，$w_3=0.11$，与特征根法的结果差别很小.

(3) 根法，将 A 的各个行向量进行几何平均得到 $(2.4662,1,0.4055)$，再归一化得 $w_1=0.6370$，$w_2=0.2583$，$w_3=0.1047$，与特征根法的结果差别很小.

□

8.4.2 一致性检验

判断矩阵 A 对应于最大特征值 $\lambda_{\max}$ 的特征向量 W，经归一化后即为同一层次相应因素对于上一层次某因素相对重要性的排序权值，这一过程称为层次单

排序.

上述构造成对比较判断矩阵的办法虽能减少其他因素的干扰，较客观地反映出一对因子影响力的差别．但综合全部比较结果时，其中难免包含一定程度的非一致性．如果比较结果是前后完全一致的，则矩阵 A 的元素还应当满足

$$a_{ij}a_{jk}=a_{ik}\,,\ \forall\, i,j,k=1,2,\cdots,n \tag{8.4.12}$$

定义 8.4.2 满足关系式(8.4.12)的矩阵称为一致矩阵，简称 A 是一致的.

例 8.4.3 (1) 例 8.4.1 的判断矩阵 A 不是一致的.

(2) 设判断矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & \frac{1}{3}\\ 1 & 1 & \frac{1}{3}\\ 3 & 3 & 1\end{pmatrix}$$

则 A 是一致的. □

需要检验构造出来的正互反判断矩阵 A 是否严重地非一致，以便确定是否接受 A.

定理 8.4.1 (Perron) 正互反矩阵 A 的最大特征根 $\lambda_{\max}$ 必为正实数，其对应特征向量的所有分量均为正实数. A 的其余特征值的模均严格小于 $\lambda_{\max}$.

定理 8.4.2 若正互反矩阵 A 为一致矩阵，则：

(1) A 的转置矩阵 A' 也是一致矩阵；

(2) A 的任意两行成比例，比例因子大于零，从而 $\text{rank}(A)=1$(同样，A 的任意两列也成比例)；

(3) 若 A 的最大特征值 $\lambda_{\max}$ 对应的特征向量为 $W=(w_1,w_2,\cdots,w_n)'$，则

$$a_{ij}=\frac{w_i}{w_j},\quad i,j=1,2,\cdots,n.$$

证明 (1)、(2)直接由定义得到．下证(3).

因 $W=(w_1,w_2,\cdots,w_n)'$ 是 $\lambda_{\max}$ 的特征值，所以

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}w_k=\lambda_{\max}w_i\,,\quad i=1,2,\cdots,n$$

又因 A 的一致性，得到 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ij}a_{jk}w_k=\lambda_{\max}w_i\,,\ i,j=1,2,\cdots,n$

于是 $a_{ij}\sum\limits_{k=1}^{n}a_{jk}w_k=\lambda_{\max}w_i$，即 $a_{ij}\lambda_{\max}w_j=\lambda_{\max}w_i\,,\ i,j=1,2,\cdots,n.$

再由定理 8.4.1 知 $\lambda_{\max} > 0$，故 $a_{ij} = \frac{w_i}{w_j}$，$i,j=1,2,\cdots,n$. □

定理 8.4.3　设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 是正互反矩阵，$\lambda_{\max}$ 对应的特征向量为 $W=(w_1,w_2,\cdots,w_n)'$，记 $a_{ij}=\frac{w_i}{w_j}\varepsilon_{ij}$，$i,j=1,2,\cdots,n$. 则：

(1) $\lambda_{\max}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_{ij}$；

(2) $\lambda_{\max}\geqslant n$；

(3) A 为一致矩阵当且仅当其最大特征根 $\lambda_{\max}=n$（A 的其余特征根均为零）.

证明　(1) 因 $W=(w_1,w_2,\cdots,w_n)'$ 是 $\lambda_{\max}$ 对应的特征向量，由定理8.4.2 知 $w_i>0(i=1,2,\cdots,n)$且

$$\lambda_{\max}w_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}w_j=\sum_{j=1}^{n}\frac{w_i}{w_j}\varepsilon_{ij}w_j=w_i\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_{ij},\quad i=1,2,\cdots,n$$

约去 $w_i\neq 0$，再对 i 求和，得

$$\lambda_{\max}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_{ij}.$$

(2) 由 $a_{ij}>0$，$w_i>0$ 可知 $\varepsilon_{ij}>0$，再由 A 的互反性，则

$$\frac{w_i}{w_j}\varepsilon_{ij}=a_{ij}=\frac{1}{a_{ji}}=\frac{1}{\frac{w_j}{w_i}\varepsilon_{ji}}=\frac{w_i}{w_j}\frac{1}{\varepsilon_{ji}}$$

即 $\varepsilon_{ij}=\frac{1}{\varepsilon_{ji}}$. 由 $\varepsilon_{ij}>0$ 易知 $\varepsilon_{ij}+\frac{1}{\varepsilon_{ji}}\geqslant 2$. 于是

$$\lambda_{\max}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_{ij}=\frac{1}{n}\left(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\left(\varepsilon_{ij}+\frac{1}{\varepsilon_{ji}}\right)+\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_{ii}\right)\geqslant\frac{2}{n}\cdot\frac{n(n-1)}{2}+1=n.$$

(3) 由(2)的证明可知

$$\lambda_{\max}=n\Leftrightarrow\varepsilon_{ij}+\frac{1}{\varepsilon_{ji}}=2(i,j=1,2,\cdots,n)\Leftrightarrow\varepsilon_{ij}=1(i,j=1,2,\cdots,n)$$

$$\Leftrightarrow a_{ij}=\frac{w_i}{w_j}(i,j=1,2,\cdots,n)$$

再由定理 8.4.2(3)得到 A 为一致矩阵当且仅当其最大特征根 $\lambda_{\max}=n$. □

根据定理 8.4.3，我们可以由 $\lambda_{\max}$ 是否等于 n 来检验判断矩阵 A 是否为一致矩阵. 由于特征根连续地依赖于 a_{ij}，故 $\lambda_{\max}$ 比 n 大得越多，A 的非一致性程度也就越严重，$\lambda_{\max}$ 对应的标准化特征向量也就越不能真实地反映出因素所占的比重. 因此，对决策者提供的判断矩阵有必要作一次一致性检验，以决定是否能接受这个矩阵.

对判断矩阵的一致性检验的步骤如下：

(1)计算一致性指标(consistency index)CI

$$CI=\frac{\lambda_{max}-n}{n-1} \tag{8.4.13}$$

(2)查找相应的平均随机一致性指标(random consistency index)RI. 对 $n=1,2,\cdots,9$, Saaty 给出了 RI 的值,如表 8.4.2 所示.

表 8.4.2 给出了 1～15 阶正互反矩阵的随机一致性指标. 对于 1 阶和 2 阶的正互反矩阵总是一致的，CI 都为 0. 对于 3～15 阶正互反矩阵的 RI 值是这样得到的,对确定的阶数，随机生成 1 000 个样本正互反矩阵,分别计算出各自的 CI,再取平均值.

表 8.4.2 平均随机一致性指标 RI

n	1	2	3	4	5	6	7	8
RI	0	0	0.52	0.89	1.12	1.26	1.36	1.41
n	9	10	11	12	13	14	15	
RI	1.46	1.49	1.52	1.54	1.56	1.58	1.59	

(3)计算一致性比例 CR

$$CR=\frac{CI}{RI} \tag{8.4.14}$$

当 $CR<0.10$ 时,认为判断矩阵的一致性是可以接受的,否则应对判断矩阵作适当修正.

例 8.4.4 判断矩阵见例 8.4.1 的 A

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ \frac{1}{3} & 1 & 3 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

由例 8.4.2 知 A 的最大特征根为 $\lambda_{max}=3.039$，故 $CI=\frac{\lambda_{max}-n}{n-1}=\frac{0.039}{2}=0.0195$. 由表 8.4.2 查出 $n=3$ 的 $RI=0.52$,从而 $CR=0.0375<0.1$，故可以将由例 8.4.2 计算出来的对应 λ_{max} 的(归一化)特征向量 $W=(0.64,0.26,0.10)'$ 作为权向量. □

§8.5 集值统计

设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_q\}$ 为有限论域，$A\in\mathscr{F}(X)$为待确定的 Fuzzy 集，$P=\{p_1,p_2,\cdots,p_n\}$ 为参与确定 Fuzzy 集的人员集合，欲求隶属度 $A(x_i)$，$i=1,2,\cdots,q$.

当 q 值较大时，即使采用两两比较，有时也很难确定 $f_{x_r}(x_i,p_j)$，下面的方法避免了这一问题.

首先选定一个初始值 $k:1\leqslant k\leqslant q$. 随后 $p_j(j=1,2,\cdots,n)$ 按下列步骤完成统计试验：

(1)在 X 中选取 p_j 认为优先属于 A 的 $r_1=k$ 个元素，得 X 的子集(从而是集值统计)

$$X_1^{(j)}=\{x_{i_1}^{(j)},x_{i_2}^{(j)},\cdots,x_{i_k}^{(j)}\}\subseteq X \tag{8.5.1}$$

(2)在 X 中选取 p_j 认为优先属于 A 的 $r_2=2k$ 个元素，得 X 的子集

$$X_2^{(j)}=\{x_{i_1}^{(j)},x_{i_2}^{(j)},\cdots,x_{i_k}^{(j)},x_{i_{k+1}}^{(j)},\cdots,x_{i_{2k}}^{(j)}\}\supseteq X_1^{(j)} \tag{8.5.2}$$

之所以 $X_2^{(j)}\supseteq X_1^{(j)}$，是因为第一次认为优先的元素，第二次便认为更优先，因此第一次选中的元素第二次也一定要选中.

如此继续下去，

(t)在 X 中选取 p_j 认为优先属于 A 的 $r_t=tk$ 个元素. 得 X 的子集

$$X_t^{(j)}=\{x_{i_1}^{(j)},\cdots,x_{i_t}^{(j)}\}\supseteq X_{t-1}^{(j)} \tag{8.5.3}$$

若自然数 t 满足 $q=tk+v$，$1\leqslant v\leqslant k$，则迭代过程终止于第 $t+1$ 步；

($t+1$)取 $X_{t+1}^{(j)}=X$.

计算 x_i 的覆盖频率

$$m(x_i)\triangleq\frac{1}{n(t+1)}\sum_{s=1}^{t+1}\sum_{j=1}^{n}\chi_{X_s^{(j)}}(x_i),\quad i=1,2,\cdots,q \tag{8.5.4}$$

其中 $\chi_{X_s^{(j)}}$ 为集合 $X_s^{(j)}$ 的特征函数.

再将诸 $m(x_i)$ 归一化便得到隶属度

$$A(x_i)=\frac{m(x_i)}{\sum_{j=1}^{q}m(x_j)},\quad i=1,2,\cdots,q \tag{8.5.5}$$

该方法称为集值统计方法(the set-valued statistical method).

例 8.5.1 设 $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$，$P=\{p_1,p_2,p_3,p_4,p_5\}$，$A\in\mathscr{F}(X)$是待定的 Fuzzy 集. 取 $k=1$. 每个人的选择过程可以写为一个三角形表

$$
\begin{array}{llllll}
p_1: & r_1=1 & x_2 & & & \\
 & r_2=2 & x_2 & x_1 & & \\
 & r_3=3 & x_2 & x_1 & x_4 & \\
 & r_4=4 & x_2 & x_1 & x_4 & x_3
\end{array}
$$

这个表可以改写成更简洁的形式

$$
\begin{array}{ccccc}
p_1 & x_2 & x_1 & x_4 & x_3 \\
 & 4 & 3 & 2 & 1
\end{array}
$$

同样道理可以得到 p_2,p_3,p_4,p_5 的结果

$$
\begin{array}{ccccc}
p_2 & x_2 & x_4 & x_1 & x_3 \\
 & 4 & 3 & 2 & 1 \\
p_3 & x_1 & x_2 & x_4 & x_3 \\
 & 4 & 3 & 2 & 1 \\
p_4 & x_2 & x_1 & x_3 & x_4 \\
 & 4 & 3 & 2 & 1 \\
p_5 & x_2 & x_3 & x_1 & x_4 \\
 & 4 & 3 & 2 & 1
\end{array}
$$

计算 x_1,x_2,x_3,x_4 的覆盖频率

$$
m(x_1)=\frac{14}{4\times 5}=\frac{7}{10},\quad m(x_2)=\frac{19}{20},\quad m(x_3)=\frac{8}{20}=\frac{2}{5},\quad m(x_4)=\frac{9}{20}
$$

再将 $m(x_i)$ $(i=1,2,3,4)$ 归一化便得 $A(x_i)$ $(i=1,2,3,4)$

$$
A(x_1)=\frac{m(x_1)}{\sum_{i=1}^{4} m(x_i)}=\frac{7}{25}\approx 0.28
$$

$$
A(x_2)=\frac{19}{50}\approx 0.38,\quad A(x_3)=\frac{4}{25}\approx 0.16,\quad A(x_4)=\frac{9}{50}\approx 0.18.
$$

因此
$$
A=(0.28,0.38,0.16,0.18).
$$
□

§8.6 其他数学方法

8.6.1 插值法

在实际应用中,我们经常用到正规 Fuzzy 集. 要建立正规 Fuzzy 集 A 的隶属函数,可以采用插值法(interpolation method),其基本步骤如下:

1. 依据客观规律与实践经验找出 A 的核 $\ker(A)$. 假定有唯一的 x_0 使

$A(x_0)=1$.

2. 在 x_0 的左、右两边各找一个零点 x_1、x_2 使得 $\forall x\in(x_1,x_2)$，均有 $A(x)>0$，$x\leqslant x_1, x\geqslant x_2$ 均有 $A(x)=0$.

3. 分别在 (x_1,x_0) 与 (x_0,x_2) 内各找一个最模糊的点 x_1^* 与 x_2^*，即

$$A(x_1^*)=A(x_2^*)=\frac{1}{2}.$$

4. 以 $x_1, x_1^*, x_0, x_2^*, x_2$ 5 点为基础，用插值法求 $A(x)$. 于是，我们设

$$A(x)=\begin{cases}[f_1(x)]^\alpha, & x_1\leqslant x\leqslant x_0\\ [f_2(x)]^\beta, & x_0<x\leqslant x_2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}\tag{8.6.1}$$

其中线性函数 $f_1(x)$，$f_2(x)$ 应满足

$$f_1(x_1)=f_2(x_2)=0,\quad f_1(x_0)=f_2(x_0)=1$$

由直线方程的两点式可得 $f_1(x)$，$f_2(x)$ 的表达式. 指数 α，β 可以按如下求得

$$\frac{1}{2}=A(x_1^*)=[f_1(x_1^*)]^\alpha\Rightarrow -\ln 2=\alpha\ln[f_1(x_1^*)]\tag{8.6.2}$$

故
$$\alpha=\frac{-\ln 2}{\ln[f_1(x_1^*)]}\tag{8.6.3}$$

同理可得
$$\beta=\frac{-\ln 2}{\ln[f_2(x_2^*)]}\tag{8.6.4}$$

如图 8.6.1 所示.

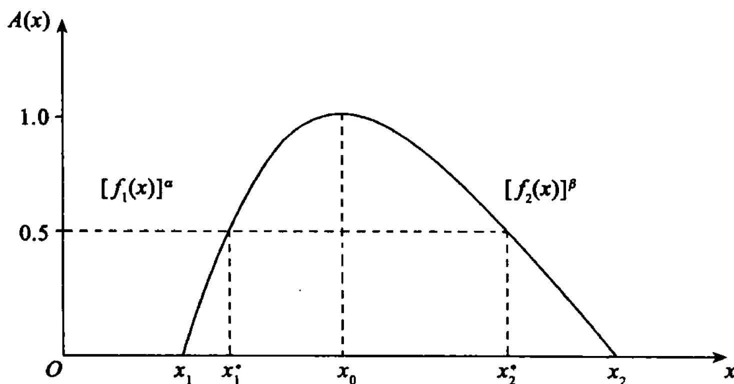


图 8.6.1

例 8.6.1　为了确定青年人的隶属函数，取 $x_1=14$，$x_1^*=16$，$x_0=25$，$x_2^*=40$，$x_2=50$. 于是

$$f_1(x)=\frac{1}{11}(x-14),\quad f_2(x)=-\frac{1}{25}(x-50)$$

并且
$$\alpha=\frac{-\ln 2}{\ln\frac{1}{11}(16-14)}\approx 0.407$$

$$\beta=\frac{-\ln 2}{\ln\left[-\frac{1}{25}(40-50)\right]}\approx 0.756$$

故
$$A(x)=\begin{cases}\left[\frac{1}{11}(x-14)\right]^{0.407}, & 14\leqslant x\leqslant 25\\ \left[-\frac{1}{25}(x-50)\right]^{0.756}, & 25<x<50\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$ □

8.6.2 增量法

增量法(the incremental method)的思想起源于19世纪德国心理学家G. T. Fechner在研究人对外界刺激的反应问题的工作. 下面通过 A =“年老”这个Fuzzy集的隶属函数 $A(x)$ ($x\in X=[0,100]$)的确定来说明该方法.

任取 $x\in X$, 给定 x 的一个增量 Δx ($x+\Delta x\in X$, $\Delta x\neq 0$),相应 $A(x)$ 有一个增量 $\Delta A(x)$. 作为简化条件,可以认为 $\Delta A(x)$ 与 Δx 成正比. 另一方面,对同一增量 Δx, 若 x 越大,则 $\Delta A(x)$ 也越大. 考虑到 $A(x)\leqslant 1$, 则 $A(x)$ 越接近1, $\Delta A(x)$ 就应越小,故设

$$\Delta A(x)=k\cdot\Delta x\cdot x\cdot(1-A(x))$$

即
$$\frac{\Delta A(x)}{\Delta x}=k\cdot x\cdot(1-A(x))$$

令 $\Delta x\to 0$, 得到微分方程

$$\frac{\mathrm{d}A(x)}{\mathrm{d}x}=k\cdot x\cdot(1-A(x))$$

解之得
$$A(x)=1-c\mathrm{e}^{-\frac{kx^2}{2}}$$

其中 c 是积分常数. 适当选择 k 和 c, 则 $A(x)$ 可以完全确定. 这种方法称为增量法.

§8.7 Fuzzy分布

下面我们列出几类实数域 $\mathbf{R}$ 上Fuzzy集的隶属函数,以便在研究实际问题时供选择之用.

定义 8.7.1 若 $A \in \mathscr{F}(\mathbf{R})$,则称 $A(x)(x \in \mathbf{R})$ 为 Fuzzy 分布(fuzzy distribution).

常见的 Fuzzy 分布有以下几种.

1. 矩形分布

(1) 偏小型

$$A(x)=\begin{cases}1, & x \leqslant a \\ 0, & x > a\end{cases} \tag{8.7.1}$$

(2) 中间型

$$A(x)=\begin{cases}1, & a \leqslant x \leqslant b \\ 0, & x < a \text{ 或 } x > b\end{cases} \tag{8.7.2}$$

(3) 偏大型

$$A(x)=\begin{cases}0, & x < a \\ 1, & x \geqslant a\end{cases} \tag{8.7.3}$$

如图 8.7.1 所示.

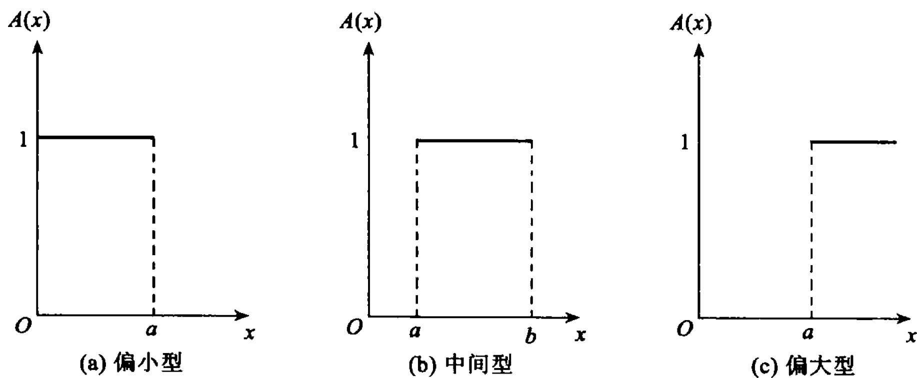


图 8.7.1 矩形 Fuzzy 分布

2. 梯形分布

(1) 偏小型

$$A(x)=\begin{cases}1, & x \leqslant a \\ \dfrac{b-x}{b-a}, & a < x \leqslant b \\ 0, & x > b\end{cases} \tag{8.7.4}$$

(2) 中间型

$$A(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a<x\leqslant b\\ 1, & b\leqslant x<c\\ \dfrac{d-x}{d-c}, & c\leqslant x<d\\ 0, & x\geqslant d\end{cases}\tag{8.7.5}$$

(3) 偏大型

$$A(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a<x\leqslant b\\ 1, & x>b\end{cases}\tag{8.7.6}$$

如图 8.7.2 所示.

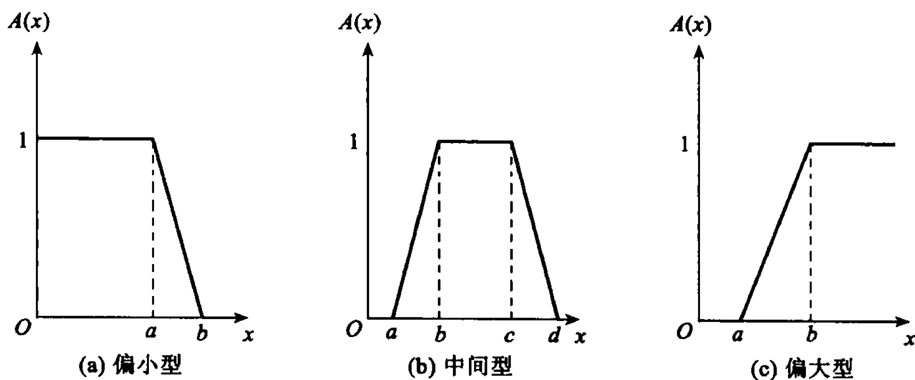


图 8.7.2 梯形 Fuzzy 分布

3. Γ-分布

(1) 偏小型

$$A(x)=\begin{cases}1, & x\leqslant a\\ e^{-k(x-a)}, & x>a\end{cases}\tag{8.7.7}$$

(2)中间型

$$A(x)=\begin{cases}e^{k(x-a)}, & x\leqslant a\\ 1-e^{-k(x-a)}, & x>a\end{cases}\tag{8.7.8}$$

(3) 偏大型

$$A(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant a\\ 1-\mathrm{e}^{-k(x-a)}, & x>a\end{cases} \tag{8.7.9}$$

其中 $k>0$，如图 8.7.3 所示.

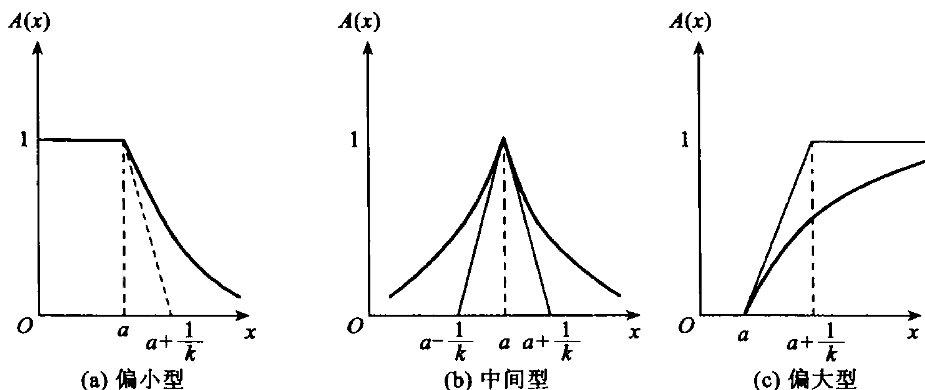


图 8.7.3　Γ－分布

4. 正态分布

(1) 偏小型

$$A(x)=\begin{cases}1, & x\leqslant a\\ \mathrm{e}^{-k(x-a)^2}, & x>a\end{cases} \tag{8.7.10}$$

(2) 中间型

$$A(x)=\mathrm{e}^{-k(x-a)^2} \tag{8.7.11}$$

(3) 偏大型

$$A(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant a\\ 1-\mathrm{e}^{-k(x-a)^2}, & x>a\end{cases} \tag{8.7.12}$$

其中 $k>0$，如图 8.7.4 所示.

5. Cauchy 分布

(1) 偏小型

$$A(x)=\begin{cases}1, & x\leqslant a\\ \dfrac{1}{1+\alpha(x-a)^\beta}, & x>a\end{cases}, \alpha>0, \beta>0 \tag{8.7.13}$$

(2) 中间型

$$A(x)=\frac{1}{1+\alpha(x-a)^\beta}, \alpha>0, \beta\text{为正偶数} \tag{8.7.14}$$

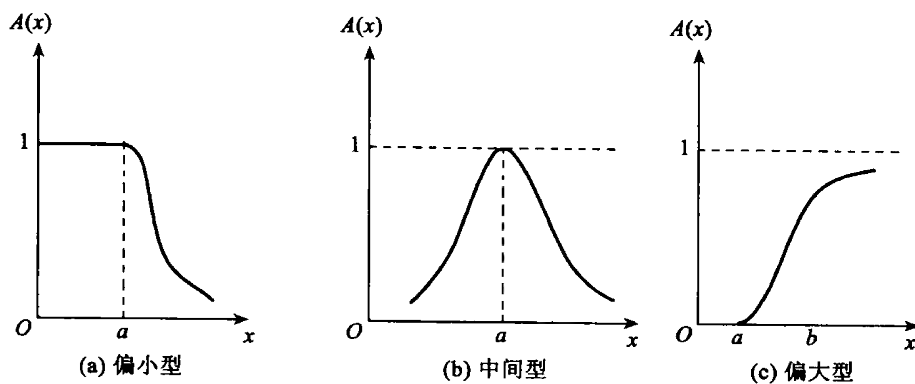


图 8.7.4　正态分布

（3）偏大型

$$A(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant a\\ \dfrac{1}{1+\alpha\,(x-a)^{-\beta}}, & x>a\end{cases},\ \alpha>0,\beta>0 \tag{8.7.15}$$

如图 8.7.5 所示.

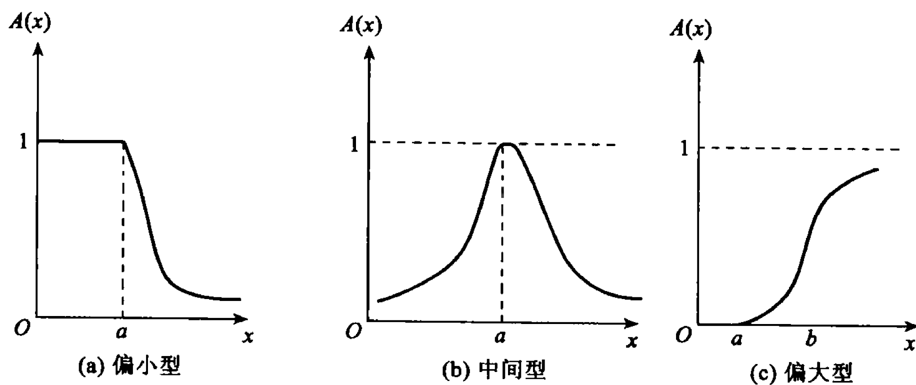


图 8.7.5　Cauchy 分布

6. 岭形分布

（1）偏小型

$$A(x)=\begin{cases}1, & x\leqslant a_1\\ \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\pi}{a_2-a_1}\left(x-\dfrac{a_1+a_2}{2}\right), & a_1<x\leqslant a_2\\ 0, & x>a_2\end{cases}\tag{8.7.16}$$

(2) 中间型

$$A(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant -a_2\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\pi}{a_2-a_1}\left(x-\dfrac{a_1+a_2}{2}\right), & -a_2<x\leqslant -a_1\\ 1, & -a_1<x\leqslant a_1\\ \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\pi}{a_2-a_1}\left(x-\dfrac{a_1+a_2}{2}\right), & a_1<x\leqslant a_2\\ 0, & x>a_2\end{cases}\tag{8.7.17}$$

(3) 偏大型

$$A(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant a_1\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\pi}{a_2-a_1}\left(x-\dfrac{a_1+a_2}{2}\right), & a_1<x\leqslant a_2\\ 1, & x>a_2\end{cases}\tag{8.7.18}$$

如图 8.7.6 所示.

7. k 次抛物线型分布

(1) 偏小型

$$A(x)=\begin{cases}1, & x\leqslant a\\ \left(\dfrac{b-x}{b-a}\right)^k, & a<x\leqslant b\\ 0, & x>b\end{cases}\tag{8.7.19}$$

(2)中间型

$$A(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ \left(\dfrac{x-a}{b-a}\right)^k, & a\leqslant x<b\\ 1, & b\leqslant x<c\\ \left(\dfrac{d-x}{d-c}\right)^k, & c\leqslant x<d\\ 0, & x\geqslant d\end{cases}\tag{8.7.20}$$

(3)偏大型

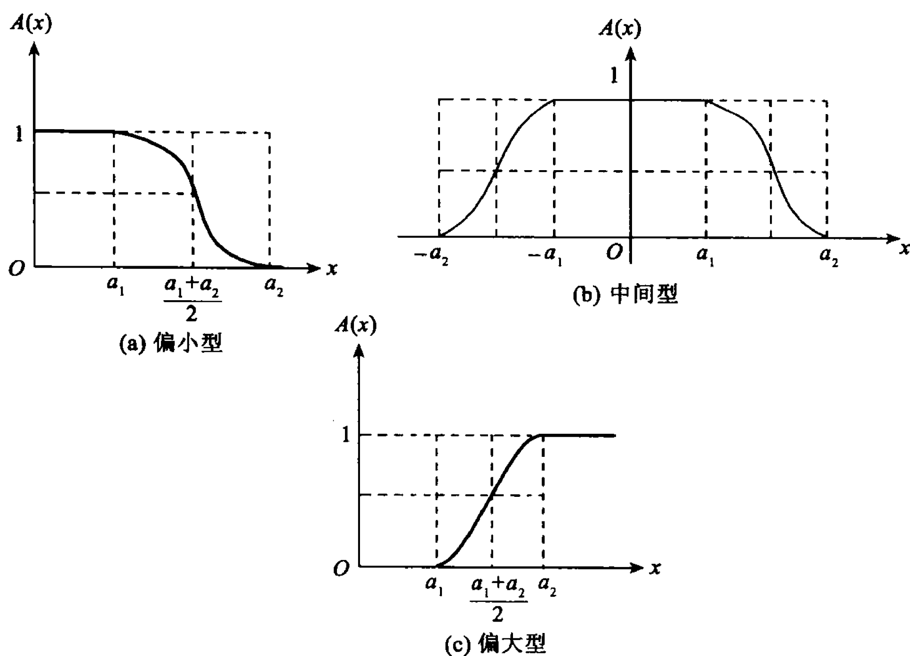


图 8.7.6 岭形分布

$$A(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ \left(\dfrac{x-a}{b-a}\right)^k, & a\leqslant x\leqslant b\\ 1, & x>b\end{cases}\tag{8.7.21}$$

其中 $k>0$，如图 8.7.7 所示.

很容易看到，当 $k=1$ 时抛物线型分布退化为梯形分布.

8. Z 型分布

$$A(x)=\begin{cases}1, & x\leqslant a\\ 1-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-a}{b-a}\right)^2, & a<x\leqslant b\\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-c}{c-b}\right)^2, & b<x\leqslant c\\ 0, & x>c\end{cases}\tag{8.7.22}$$

如图 8.7.8 所示.

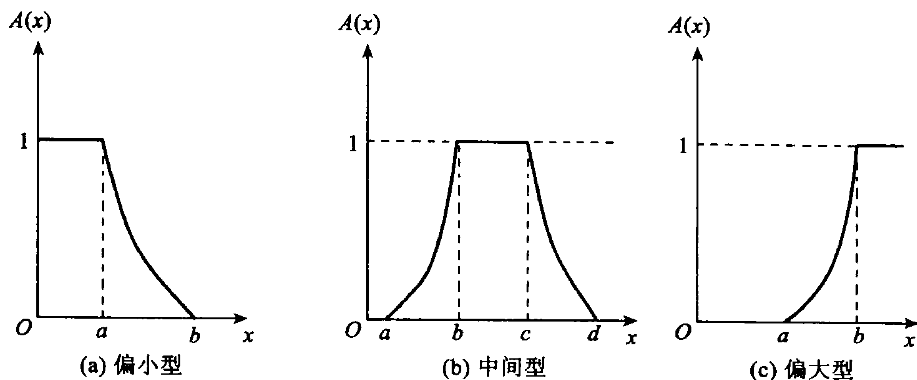


图 8.7.7 k 次抛物线型分布

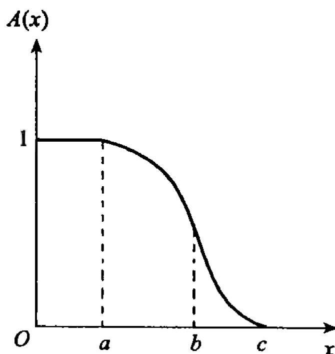


图 8.7.8 Z 型分布

9. S 型分布

$$A(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant a\\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-a}{b-a}\right)^2, & a<x\leqslant b\\ 1-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-c}{c-b}\right)^2, & b<x\leqslant c\\ 1, & x>c\end{cases}\tag{8.7.23}$$

如图 8.7.9 所示.

从 Fuzzy 集理论产生开始,如何确定隶属函数一直是人们最关注的问题.除了上面介绍的方法外,还有插补方法(Chen, Otto, 1995)、基于统计数据的方法(Chameau, Santamarina, 1987; Civanlar, Trussell, 1986; Klir, Yuan,

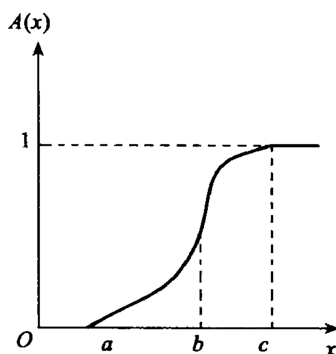


图 8.7.9 S型分布

1995; Norwich, Turksen, 1984; Turksen, 1991)、基于 Bézier 曲线的构造方法(Medaglia, Fang, et al., 2002)、基于神经网络与演化计算的方法(Lin, George Lee, 1996; Roger, Sun, et al., 1997)和 Fuzzy Delphi 方法(Chang, Huang, et al., 2000; Hsu, Lee, et al., 2010; Kaufmann, Gupta, 1988; Murray, Pipino, 1985),等等. 还可以参阅其他相关文献(Dombi, J., 1990; Medasani, Kim, 1998; Zimmermann, Zysno, 1985).

第 9 章 Fuzzy 规划与优化

在生产过程，科学试验，甚至日常生活中，人们总希望用最少的人力、物力、财力和时间去办更多的事，这就是所谓的“最优化问题”. 最优化问题一般形式的数学模型是考虑在某些“约束条件”下寻找某个“目标函数”的最大（或最小）值. 线性规划，动态规划等方法是解决许多最优化问题的有效方法. 但是经典的最优化方法，常将目标函数和约束条件都视为确定的. 然而，在实际问题中不论目标函数还是约束条件都具有不同程度的不确定性. 从而提出了 Fuzzy 的规划与优化问题，即用 Fuzzy 集方法来求解 Fuzzy 最优化问题. Bellman 与 Zadeh 于 1970 年对这一研究做出了开创性的工作. 本章介绍 Fuzzy 环境下的条件极值和最优化方法，Fuzzy 线性规划，多目标 Fuzzy 规划，区间目标线性规划，Fuzzy 目标线性规划，Fuzzy 动态规划和 Fuzzy 关系不等式约束下的格化线性规划等.

§ 9.1 Fuzzy 环境下的条件极值

设 $A \in \mathscr{P}(X)$，$f:X \to \mathbf{R}$. 在确定性数学中，最优化的一般形式可以写成：

模型 1
$$\max \quad y = f(x) \qquad (9.1.1)$$
$$\text{s. t.} \quad x \in A$$

其中 f 是目标函数，A 是约束条件或约束集.

$$M = \{x^* \mid f(x^*) = \max_{x \in A} f(x)\} \qquad (9.1.2)$$

称为 f 在 A 上的（条件）优越集（conditional superiority set）.

当 A 是 Fuzzy 集时，如何确定函数 f 在 Fuzzy 集 A 上的条件极值？这时我们称 A 为 Fuzzy 环境或 Fuzzy 约束.

$\forall \alpha \in [0,1]$，Fuzzy 集 A 的 α-截集为 A_α，记 M_α 为 f 在 A_α 上的优越集，即

$$M_\alpha = \{x^* \mid f(x^*) = \max_{x \in A_\alpha} f(x)\} \qquad (9.1.3)$$

例 9.1.1 假设实值函数 $f(x)$ 和 Fuzzy 集 $A(x)$ 的曲线如图 9.1.1 所示. 对给定的 $\alpha \in [0,1]$（设 $\alpha \leqslant A(x_2)$），则 $f(x)$ 在 A_α 上的优越集是

$$M_\alpha = [x_2, x_3]$$

对给定的 $\beta \in [0,1]$（设 $A(x_2) < \beta \leqslant 1$），则 $f(x)$ 在 A_β 上的优越集为

$$M_\beta = \{x_1\}$$

而 $f(x)$ 在 A_α 上的条件极值是 y_m，在 A_β 上的条件极值为 $f(x_1)$. □

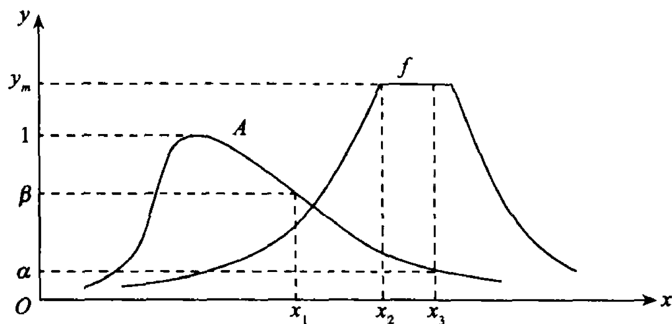


图 9.1.1 不同截集下的优越集示意图

下面给出 M_α 与 A_α 的关系.

定理 9.1.1 设 $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 1$，则：

(1) $A_\beta \cap M_\alpha \neq \varnothing \Rightarrow M_\beta = A_\beta \cap M_\alpha$；

(2) $A_\beta \cap M_\alpha = \varnothing \Rightarrow M_\beta \cap M_\alpha = \varnothing$.

证明 (1) 由截集 A_β 上优越集的定义知 $M_\beta \subseteq A_\beta$.

由于 $A_\beta \cap M_\alpha \neq \varnothing$，所以 $\exists x_0 \in A_\beta \cap M_\alpha$，即 $x_0 \in A_\beta$，且 $x_0 \in M_\alpha$，亦即

$$f(x_0) = \max_{x \in A_\alpha} f(x) \tag{9.1.4}$$

由此及 $A_\beta \subseteq A_\alpha$ 推出

$$\max_{x \in A_\alpha} f(x) = \max_{x \in A_\beta} f(x) \tag{9.1.5}$$

故当 $x \in M_\beta$ 时，必有 $x \in A_\beta$ 和 $x \in M_\alpha$. 因此

$$M_\beta \subseteq A_\beta \cap M_\alpha$$

反之，$\forall x \in A_\beta \cap M_\alpha$，有 $x \in A_\beta$ 和 $x \in M_\alpha$. 又由式(9.1.5)得 $x \in M_\beta$，因此

$$M_\beta \supseteq A_\beta \cap M_\alpha$$

从而推出(1).

(2)假设 $M_\beta \cap M_\alpha \neq \varnothing$，则 $x_0 \in M_\alpha$ 且 $x_0 \in M_\beta$，故 $x_0 \in A_\beta$，矛盾. □

对于 α 的不同值，可以得到不同的优越集 M_α，因而不宜作为 Fuzzy 集 A 上

的优越集. 因为我们在 Fuzzy 集上求极值,所以其优越集也应为 Fuzzy 集. 为此,取所有 M_α 的并集,记

$$M=\bigcup_{0<\alpha\leqslant 1} M_\alpha,\quad \overline{M}=M\cup M_0\quad 或\ \overline{M}=\bigcup_{0\leqslant\alpha\leqslant 1} M_\alpha$$

称 M 为 f 在 Fuzzy 集 A 上的优越支集(superiority support set). 对一个元素 $x\in M$, x 可能属于许多个不同的 M_α,在 x 所属的那些 M_α 中,必有一个 α 的最大值. 将这个 α 值作为 x 的隶属度. 这样,便得到一个新的 Fuzzy 集,记做 A_f. 于是有以下定义:

定义 9.1.1　设 $A\in\mathscr{F}(X)$, $f:X\to\mathbf{R}$, 称 Fuzzy 集

$$A_f=\bigcup_{0<\alpha\leqslant 1}\alpha M_\alpha \tag{9.1.6}$$

为 f 在 Fuzzy 集 A 上的 Fuzzy 优越集(fuzzy superiority set). 其隶属函数为

$$A_f(x)=\begin{cases}\vee\{\alpha\in(0,1]\mid x\in M_\alpha\}, & x\in M\\ 0, & x\overline{\in} M\end{cases} \tag{9.1.7}$$

而称 $f(A_f)$ 为 f 在 Fuzzy 集 A 上的 Fuzzy 极大值(fuzzy maximal value).

根据扩张原理 I (定义 2.4.1), $f(A_f)$ 的隶属函数为

$$f(A_f)(y)=\begin{cases}\bigvee_{x\in f^{-1}(y)} A_f(x), & f^{-1}(y)\neq\varnothing\\ 0, & f^{-1}(y)=\varnothing\end{cases} \tag{9.1.8}$$

定理 9.1.2　设 $A\in\mathscr{F}(X)$,则:

(1) $\forall\alpha\in[0,1]$, $A_\alpha\cap\overline{M}=\bigcup_{\alpha\leqslant\beta\leqslant 1} M_\beta$;

(2) $\mathrm{supp}(A_f)=M$;

(3) $A_f=A\cap M=A\cap\overline{M}$.

证明　(1)对 $\alpha\in[0,1]$, 记

$$P_\alpha^{(1)}=A_\alpha\cap\left(\bigcup_{\beta\in[0,\alpha),M_\beta\cap A_\alpha\neq\varnothing} M_\beta\right)$$

$$P_\alpha^{(2)}=A_\alpha\cap\left(\bigcup_{\beta\in[0,\alpha),M_\beta\cap A_\alpha=\varnothing} M_\beta\right)$$

则由定理 9.1.1(1),得

$$P_\alpha^{(1)}=\bigcup_{\beta\in[0,\alpha),M_\beta\cap A_\alpha\neq\varnothing}(A_\alpha\cap M_\beta)=\bigcup_{\beta\in[0,\alpha),M_\beta\cap A_\alpha\neq\varnothing} M_\alpha=M_\alpha$$

并且 $P_\alpha^{(2)}=\bigcup_{\beta\in[0,\alpha),M_\beta\cap A_\alpha=\varnothing}(A_\alpha\cap M_\beta)=\varnothing$, 所以

$$A_\alpha\cap\overline{M}=A_\alpha\cap\left(P_\alpha^{(1)}\cup P_\alpha^{(2)}\cup\left(\bigcup_{\beta\in[\alpha,1]} M_\beta\right)\right)$$

$$=A_\alpha \cap \left(M_\alpha \cup \left(\bigcup_{\beta\in[\alpha,1]} M_\beta\right)\right)=A_\alpha \cap \left(\bigcup_{\beta\in[\alpha,1]} M_\beta\right)$$

又 $\forall \beta \in [\alpha,1]$, $A_\beta \subseteq A_\alpha$, $M_\beta \subseteq A_\beta$, 从而, $M_\beta \subseteq A_\alpha$, 所以

$$\bigcup_{\beta\in[\alpha,1]} M_\beta \subseteq A_\alpha$$

这样, $A_\alpha \cap \overline{M}=\bigcup_{\beta\in[\alpha,1]} M_\beta$, (1)得证.

(2)由 M 和 A_f 的定义直接得到.

(3)首先证明 $A_f=A\cap M$. 由(2)只需证当 $x\in M$ 时

$$A_f(x)=A(x)$$

$\forall x_0 \in M$, $\exists\ \alpha\in(0,1]$, 使 $x_0\in M_\alpha$. 由定理 9.1.1, 当 $\beta\geqslant\alpha$ 且 $x_0\in A_\beta$ 时, 必有 $x_0\in M_\beta$. 于是若 $\beta\geqslant\alpha$, 有

$$x_0\in M_\beta \Leftrightarrow x_0\in A_\beta$$

因此 $$A_f(x_0)=\bigvee_{0<\beta\leqslant 1}\{\beta\wedge M_\beta(x_0)\}=\bigvee_{0<\beta\leqslant 1}\{\beta\wedge A_\beta(x_0)\}=A(x_0).$$

后证 $A\cap M=A\cap\overline{M}$. 事实上, $\forall x\in X$, 若 $x\in M\subseteq\overline{M}$, 则

$$(A\cap M)(x)=A\cap\overline{M}(x)=A(x)$$

若 $x\overline{\in}\overline{M}$, 则

$$(A\cap M)(x)=(A\cap\overline{M})(x)=0$$

若 $x\in\overline{M}$, 但 $x\overline{\in}M$, 由(2)知 $x\overline{\in}\operatorname{supp}(A_f)$, 故 $A_f(x)=0$. 又若 $A(x)>0$, 则 $\alpha=A(x)\in(0,1]$, $x\in A_\alpha\cap\overline{M}$. 由(1), $x\in\bigcup_{\alpha\leqslant\beta\leqslant 1} M_\beta\subseteq M$, 矛盾! 故 $A(x)=0$. (3)成立. □

考虑定义在 $[\underline{a},\overline{a}]\in I_{\mathbf{R}}$ 上的函数 $f(x)$ 及 $\underline{a}\leqslant a_1\leqslant a_2\leqslant\overline{a}$. 设 $f(x)$ 在 $[\underline{a},a_1]$ 上单调增, 在 $[a_1,a_2]$ 上取常数值; 在 $[a_2,\overline{a}]$ 上单调减. 这样的函数形状像 $\prod$, 故称为 $\prod$ 形函数, $[a_1,a_2]$ 称为峰域.

注意: 当 $a_1=a_2$ 时, 峰域只含一点; 当 $\underline{a}=a_1$ 时, 函数单调减; 当 $a_2=\overline{a}$ 时, 函数单调增.

对于 $\prod$ 形函数, 有以下定理.

定理 9.1.3 设 $A\in\widetilde{\mathbf{R}}$, 且 $A(x)$ 和 $f(x)$ 都是 $[\underline{a},\overline{a}]$ 上的 $\prod$ 形函数, 分别具有峰域 $[a_1,a_2]$ 和 $[f_1,f_2]$, 则

$$\overline{M}=\begin{cases}[a_2,f_2], & a_2<f_1\\ [f_1,f_2], & [a_1,a_2]\cap[f_1,f_2]\neq\varnothing\\ [f_1,a_1], & f_2<a_1\end{cases} \tag{9.1.9}$$

其曲线如图 9.1.2 所示.

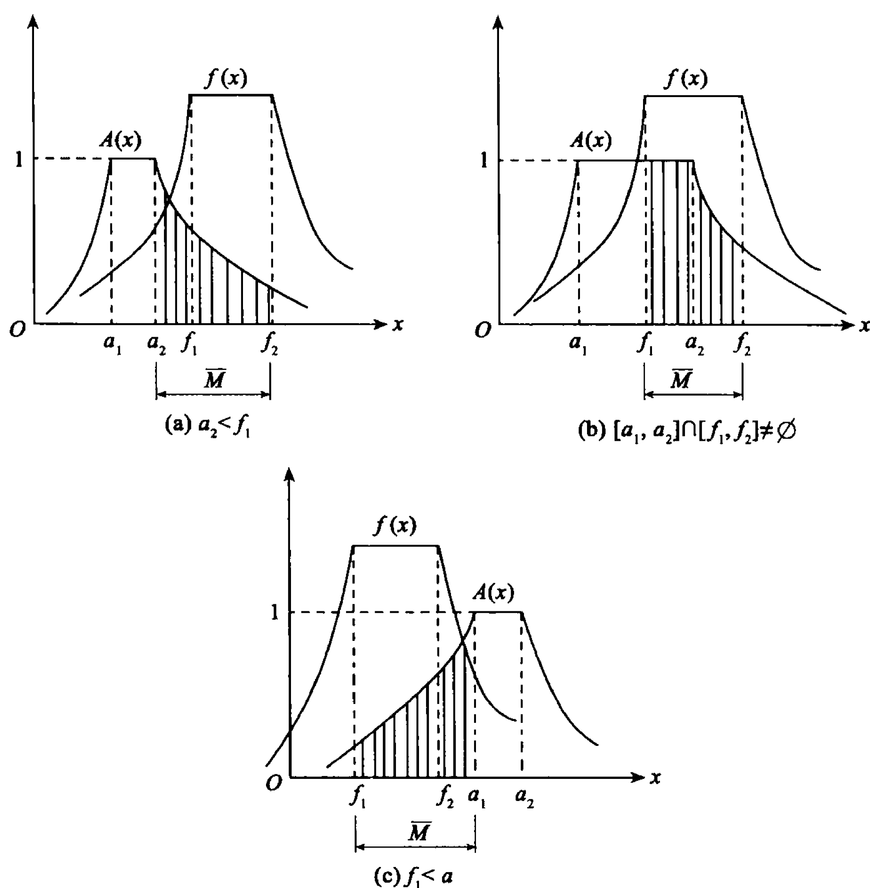


图 9.1.2　$\prod$ 形函数与 $\overline{M}$ 示意图

证明　不防设在 $[a_1,a_2]$ 上，$A(x)=1$. 显然有

$$M_0=[f_1,f_2] \text{ 和 } A_1=[a_1,a_2]$$

(1)当 $[a_1,a_2]\cap[f_1,f_2]\neq\varnothing$ 时，有

$$M_0\cap A_1\neq\varnothing$$

从而 $\forall\alpha\in[0,1]$，均有

$$M_0\cap A_\alpha\neq\varnothing$$

根据定理 9.1.1，应有

$$M_\alpha=M_0\cap A_\alpha\subseteq M_0=[f_1,f_2]$$

故有

$$\overline{M}=[f_1,f_2].$$

(2)当 $a_2 < f_1$ 时,有

$$M_0 \cap A_1 = \varnothing$$

此时有

$$M_0 \cap M_1 = \varnothing$$

因此 $f(x)$ 在 $[a_1, a_2]$ 上单调增,故

$$M_1 = \{a_2\}$$

同理,在 $[a_2, f_1]$ 上,有

$$M_{A(x)} = \{x\}$$

于是有

$$\overline{M} = [a_2, f_1] \cup [f_1, f_2] = [a_2, f_2].$$

(3)当 $f_2 < a_1$ 时,类似证明. □

定义 9.1.2 设 A_f 是 f 在 A ($A \in \mathscr{F}(X)$)上的 Fuzzy 优越集. 使 $A_f(x)$ 达到最大值的 x 称为最优规划值(optimal programming value),记做 x^* ,即

$$A_f(x^*) = \max A_f(x) \tag{9.1.10}$$

例 9.1.2 设在某种食品中投放某种调味剂. 当每单位食品投放这类调味剂 xg 时,所增加的销售量与 x 的关系为

$$f(x) = \frac{x}{2}\mathrm{e}^{(1-\frac{x}{10})}, \quad x \geqslant 0$$

考虑到成本、设备等因素,对这类调味剂应进行限制,且约束集 A 的边界是模糊的.

$$A(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ \dfrac{1}{1+(x-1)^2}, & x > 1 \end{cases}$$

试确定合适的剂量 x,使得在约束条件可以接受的前提下,获得较好的销售量.

首先注意到 $A(x)$ 与 $f(x)$ 均为 $\prod$ 形函数. 峰域分别为 $[a_1, a_2] = [0,1]$ 和 $[f_1, f_2] = [10,10]$. 按定理 9.1.3 知

$$\overline{M} = [1, 10]$$

再由定理 9.1.2,有 $A_f = A \cap \overline{M}$, 因此

$$A_f(x) = A(x) \wedge \overline{M}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+(x-1)^2}, & 1 \leqslant x \leqslant 10 \\ 0, & 0 \leqslant x < 1, x > 10 \end{cases}$$

又

$$A_f(1) = \max_x A_f(x)$$

即 $x^* = 1$. 这就是说,1g 的调味剂最恰当. □

§ 9.2 对称型 Fuzzy 规划

所谓对称型 Fuzzy 规划(symmetric fuzzy programming),是指在目标和约束具有同等重要的情况下,求最优化的问题.

设 $f:X\to\mathbf{R}$,且存在最大值与最小值,引入 $M_f\in\mathscr{F}(X)$,且

$$M_f(x)=\frac{f(x)-\min\limits_{t\in X}f(t)}{\max\limits_{t\in X}f(t)-\min\limits_{t\in X}f(t)},\ \forall x\in X \tag{9.2.1}$$

易见,若 f 在 x_1 处取得最大值,则 $M_f(x_1)=1$;若 f 在 x_2 处取得最小值,则 $M_f(x_2)=0$;当 f 在 x^* 处不取最大值和最小值时,$M_f(x^*)\in(0,1)$. 故可以认为,对于任意 $x\in X$,$M_f(x)$ 是 f 在 x 处取得最大值的程度. 据此,对 $A\in\mathscr{F}(X)$,可以将模型 1 改写为:

模型 2
$$\max\quad y=M_f(x) \tag{9.2.2}$$
$$\text{s. t.}\quad x\in A$$

或写成如下的无条件极值问题:

模型 3
$$\max\quad y=M_f(x)\top\chi_A(x) \tag{9.2.3}$$

其中 $\top$ 是任意 t-模.

易知模型 1 与模型 2 等价,且对任意 t-模,又与模型 3 等价.

设 $A\in\mathscr{F}(X)$且 $A\neq\varnothing$. 显然,在 A_α 上求 $f(x)$ 的最大值问题,等价于在 A_α 上求元素 x^*,使得

$$M_f(x^*)=\max_{x\in A_\alpha}M_f(x) \tag{9.2.4}$$

由模型 2,可得模型 4:

模型 4
$$\max\quad y=M_f(x) \tag{9.2.5}$$
$$\text{s. t.}\quad x\in A_\alpha\ (\text{或等价的 } A(x)\geqslant\alpha)$$

其中 $\alpha\in(0,1]$,当 $\alpha=0$ 时是无条件(无约束)极值问题.

模型 4 说明,对于 Fuzzy 约束 A,f 在 α 一 水平上的优化问题,即在确定性约束下的优化问题. 模型 4 的解必依赖于 α,可以将这个解记为 $x(\alpha)$. $x(\alpha)$ 是在 α 一 水平上使 M_f(即 f)取最大值的 x. 这里 $\alpha\in(0,1]$ 可以被解释为在 Fuzzy 约束 A 下,f 取到最大值的可能性(或称保证率).

设 $\alpha_1,\alpha_2\in(0,1]$,$x(\alpha_1),x(\alpha_2)$ 分别是模型 4 对应 α_1,α_2 的解,则

$$\alpha_1<\alpha_2\Rightarrow A_{\alpha_2}\subseteq A_{\alpha_1}\Rightarrow M_f(x(\alpha_2))\leqslant M_f(x(\alpha_1)) \tag{9.2.6}$$

即 $M_f(x(\alpha))$ 作为 α 的函数关于 α 是不增的.

定义 9.2.1 若有 $\alpha^*\in(0,1]$,使得当 $\alpha>\alpha^*$ 时,必有 $M_f(x(\alpha^*))>$

$M_f(x(\alpha))$，而当 $0<\alpha<\alpha^*$ 时，有 $M_f(x(\alpha*))\equiv M_f(x(\alpha))$，$\alpha^*$ 称为在 Fuzzy 约束 A 下的绝对最优水平.

图 9.2.1 是对定义 9.2.1 的几何描述.

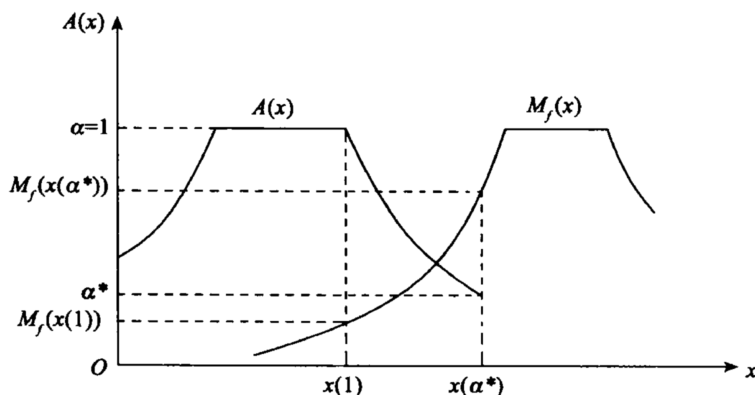


图 9.2.1 绝对最优水平示意图

因为 $M_f(x(\alpha))$ 关于 α 的不增性，对于任意 $\alpha\in(0,1]$ 都有 $M_f(x(\alpha))\geqslant M_f(x(1))$. 因此 $\forall\alpha\in(0,1]$, $M_f(x(\alpha))\in[M_f(x(1)),M_f(x(\alpha^*))]$. 这说明，在 Fuzzy 约束 A 下，M_f 取值 $M_f(x(1))$（对应的 $f(x(1))$）的可能性为 1（即完全可能）. 但 $M_f(x(1))$（对应的 $f(x(1))$）的值较小；而 M_f 取值 $M_f(x(\alpha^*))$（对应的 $f(x(\alpha^*))$）的可能性为 $\alpha^*\in(0,1)$，且 M_f 不可能取得比 $M_f(x(\alpha^*))$ 更大的值. 但这时 $\alpha^*\in(0,1)$ 是比较小的，这表明要取得这个（绝对的）最大值是要冒“风险”的. 因此，应当选择合适的 α，使得不冒很大的风险，即可以使 M_f 取得满意的较大值.

现在考虑在 Fuzzy 集 A 上求 $f(x)$ 的最大值问题：

模型 5
$$\max\quad y=M_f(x)\top A(x). \tag{9.2.7}$$
其中 $\top$ 是任意 t-模. 在 $\top=\wedge$ 时这个模型得到了广泛的应用.

定义 9.2.2 设约束 A 与目标 M_f 都是 X 上的 Fuzzy 集，如果
$$M_f(x^*)\top A(x^*)=\max_{x\in X}(M_f(x)\top A(x)) \tag{9.2.8}$$
则称 x^* 是 $f(x)$ 在 Fuzzy 集 A 上的极大元素（或最优点），而称 $f(x^*)$ 是在 Fuzzy 约束 A 下的最大值（或最优值）.

例 9.2.1 设 $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$ 是 5 个人的集合，经测量，X 中每人的身高 $f(x)$ 如表 9.2.1 所示.

表 9.2.1 身高数据 (单位:m)

x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$f(x)$	1.72	1.80	1.65	1.74	1.68

再设

$$A=\frac{0.7}{x_1}+\frac{0.5}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{0.8}{x_4}+\frac{0.9}{x_5}$$

表示 X 中"年轻人"的 Fuzzy 集,求 X 中年轻人的最高者.

这是求 f 在 Fuzzy 约束 A 下的极值问题,$M_f(x)$ 为

$$M_f=\frac{0.47}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{0}{x_3}+\frac{0.6}{x_4}+\frac{0.2}{x_5}$$

(1) 使用模型 4

计算结果如表 9.2.2 所示.

表 9.2.2 绝对最优水平

α	A_α	$x(\alpha)$	$M_f(x(\alpha))$
$0.9<\alpha\leqslant 1$	x_3	x_3	0
$0.8<\alpha\leqslant 0.9$	x_3,x_5	x_5	0.2
$0.7<\alpha\leqslant 0.8$	x_3,x_4,x_5	x_4	0.6
$0.5<\alpha\leqslant 0.7$	x_1,x_3,x_4,x_5	x_4	0.6
$0<\alpha\leqslant 0.5$	X	x_2	1

由表 9.2.2 可知,在 Fuzzy 约束 A 下绝对最优水平 $\alpha^*=0.5$,$x(\alpha^*)=x_2$,即 x_2 是在 Fuzzy 约束 A 下年轻人的最高者,不过保证率只有 50%.

(2) 使用模型 5 ($\top=\wedge$)

$$M_f\cap A=\frac{0.47}{x_1}+\frac{0.5}{x_2}+\frac{0}{x_3}+\frac{0.6}{x_4}+\frac{0.2}{x_5}$$

由最大隶属原则,x_4 是 X 中年轻人的最高者. □

例 9.2.2 用对称型来处理上一节例 9.1.2 的问题:

$$\text{目标函数}\quad f(x)=\frac{x}{2}\mathrm{e}^{\left(1-\frac{x}{10}\right)},\ x\geqslant 0$$

$$\text{约束函数}\quad A(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ \dfrac{1}{1+(x-1)^2}, & x>1\end{cases}$$

首先注意到当 $x \geqslant 0$ 时

$$f'(x)=\frac{1}{20}(10-x)e^{\left(1-\frac{x}{10}\right)}, \quad x \geqslant 0$$

令 $f'(x)=0$，得 $x=10$，$\max\limits_{x \geqslant 0} f(x)=f(10)=5$，$\min\limits_{x \geqslant 0} f(x)=f(0)=0$. 由此得到

$$M_f(x)=\frac{x}{10}e^{\left(1-\frac{x}{10}\right)}, x \geqslant 0$$

(1) 使用模型 4

任取 $\alpha \in (0,1]$，令 $\alpha=\frac{1}{1+(x-1)^2}$，得 $x=1+\sqrt{\frac{1-\alpha}{\alpha}}$，从而

$$A_\alpha=\left[0,1+\sqrt{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\right], \alpha \in (0,1]$$

对于优化问题

$$\max \quad M_f(x)=\frac{x}{10}e^{\left(1-\frac{x}{10}\right)}$$

$$\text{s.t.} \quad x \in \left[0,1+\sqrt{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\right]$$

当 $0 \leqslant x \leqslant 10$ 时，由 A_α 得

$$x(\alpha)=1+\sqrt{\frac{1-\alpha}{\alpha}}$$

当 $x=10$ 时得 $\alpha^*=\frac{1}{82}=0.012$（对应的 $f(x(\alpha^*))=f(10)=5$）. 而 $x(\alpha)|_{\alpha=1}=1$，$M_f(x(1))=M_f(1)=\frac{1}{10}e^{\frac{9}{10}}=0.246$ $\left(\text{对应的 } f(x(1))=f(1)=\frac{1}{2}e^{\frac{9}{10}}=1.23\right)$. 故当 $\alpha \in \left[\frac{1}{82},1\right]$ 时，$M_f(x(\alpha)) \in \left[\frac{1}{10}e^{\frac{9}{10}},1\right]$ $\left(\text{对应的 } f(x(\alpha)) \in \left[\frac{1}{2}e^{\frac{9}{10}},5\right]\right)$.

(2) 使用模型 5

若 $\top$ 取 $\wedge$，则问题

$$\max\left(\frac{x}{10}e^{\left(1-\frac{x}{10}\right)} \wedge \frac{1}{1+(x-1)^2}\right)$$

的解 x 应使

$$\frac{x}{10}e^{\left(1-\frac{x}{10}\right)}=\frac{1}{1+(x-1)^2}$$

近似地可得 $x=2.085$，$M_f(2.085) \approx 0.4593 \approx A(2.085)$，$f(2.085)=2.3$.

若 $\top$ 取 $\times$（即乘法），则为了求解问题

$$\max \quad f(x)=\frac{x}{10}e^{\left(1-\frac{x}{10}\right)} \frac{1}{1+(x-1)^2}$$

只需令

$$f'(x)=\frac{1}{100\,(1+(x-1)^2)^2}(x^3+8x^2+2x-20)\mathrm{e}^{(1-\frac{x}{10})}=0$$

得 $x=1.359$，且 $M_f(1.359)=0.323$，$A(1.359)=0.886$，$f(1.359)=1.612$.

x 的最终确定只能靠主观判断，且最后的决策也取决于经营者敢冒多大的风险. □

值得注意的是，§ 9.1 中例 9.1.2 得到的最优解 ($x^*=1$)，以对称型的标准来看，并不是最优的，前者是在最大约束 ($A_1=[0,1]$) 下的最优值，实际上是普通规划的解. 对称型的实质是从 $A_1=[0,1]$ 出发，适当放宽约束，并将目标函数模糊化，从而兼顾目标和约束两个方面. 这种灵活的思想方法，更符合实际情况.

上述方法容易推广到多目标最优化问题.

设 $f_i:X\to\mathbf{R}$ ($i=1,2,\cdots,m$)，考虑向量函数 $F(x)=(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_m(x))'$ 在多个 Fuzzy 约束 $A_1,A_2,\cdots,A_n\in\mathscr{F}(X)$ 下的最优化问题.

为了推广上述优化模型，总设 f_i ($i=1,2,\cdots,m$) 都在 X 上存在最大值与最小值. $M_{f_i}\in\mathscr{F}(X)$，且

$$M_{f_i}(x)=\frac{f_i(x)-\min\limits_{t\in X}f_i(t)}{\max\limits_{t\in X}f_i(t)-\min\limits_{t\in X}f_i(t)},\ \forall x\in X \tag{9.2.9}$$

令

$$M_F(x)=g(M_{f_1}(x),M_{f_2}(x),\cdots,M_{f_m}(x)) \tag{9.2.10}$$

$$A(x)=h(A_1(x),A_2(x),\cdots,A_n(x)) \tag{9.2.11}$$

其中 g、h 都是综合评判函数(参见 § 6.3).

现推广模型 4 和模型 5 分别为：

模型 6
$$\max\quad y=M_F(x) \tag{9.2.12}$$
$$\text{s. t.}\quad x\in A_\alpha\ (\text{或等价的 } A(x)\geqslant\alpha)$$

其中 $\alpha\in(0,1]$，当 $\alpha=0$ 时，为无条件(无约束)极值问题.

模型 7
$$\max\quad y=M_F(x)\top A(x) \tag{9.2.13}$$

其中 $\top$ 是任意 t-模.

例 9.2.3 为选购某种仪器，希望质量好、价格低；并且还希望携带尽可能方便、操作尽可能简单。现将质量好、价格低作为目标；携带尽可能方便、操作尽可能简单作为约束条件，对 I,II,III,IV,V 共 5 种产品进行了解. 将这 5 种产品各自对质量好 (M_{f_1})、价格低 (M_{f_2})、携带方便 (A_1)、操作简单 (A_2)的隶属程度列入表 9.2.3 中. 需要进行合理的选择，从中挑选出合适的产品.

记 $X=\{\text{I, II, III, IV, V}\}$，对 g 分别取加权平均型(归一化权重为 0.65,

0.35)和主因素突出型(正规化权重为 1,0.54, $\top=\times$)综合评判函数(参见§6.3),并将综合目标分别记为 M_{F_1} 和 M_{F_2},对 h 取加权平均型(归一化权重为 0.55,0.45),综合约束记为 A. M_{F_1}, M_{F_2} 和 A 也列入表 9.2.3 中.

表 9.2.3　　综合目标与综合约束

	I	II	III	IV	V
质量好 (M_{f_1})	0.9	0.7	1	0.4	0.6
价格低 (M_{f_2})	0.6	0.8	0.6	1	0.9
M_{F_1} ($0.65M_{f_1}+0.35M_{f_2}$)	0.80	0.74	0.86	0.61	0.71
M_{F_2} ($M_{f_1}\vee 0.54M_{f_2}$)	0.9	0.7	1	0.54	0.6
携带方便 (A_1)	0.8	1	0.6	1	0.4
操作简单 (A_2)	0.8	1	0.6	0.8	0.4
A ($0.55A_1+0.45A_2$)	0.8	1	0.6	0.91	0.4

使用模型 6,计算结果如表 9.2.4 所示.

表 9.2.4　　模型 6 的计算结果

α	$\max M_{F_1}(x)$	$\max M_{F_2}(x)$
(0,0.6]	M_{F_1}(III)=0.86	M_{F_2}(III)=1
(0.6,0.8]	M_{F_1}(I)=0.8	M_{F_2}(I)=0.9
(0.8,1]	M_{F_1}(II)=0.74	M_{F_2}(II)=0.7

由表 9.2.4 可知,若用加权平均型综合,当选择 II 时,质量好和价格低的综合程度只能达到 0.74,但这是完全可能的;当选择 III 时,则质量好和价格低的综合程度可以达到 0.86,但可能性只有 0.6. 若用主因素突出型综合,当选择 III 时,质量好和价格低的综合程度达到最大值 1,可能性仍为 0.6;当选择 II 时,则质量好和价格低的综合程度只有 0.7,但完全可能. 最终如何选择,只有依靠其他条件或作主观判断了. 显然 IV 与 V 这两类产品是没有使用价值的.

使用模型 7,分别取 $\top=\wedge,\times,\odot$ (参见§1.3),计算结果如表 9.2.5 所示.

表 9.2.5 模型 7 的计算结果

$\top$	$\max M_{F_1}(x)\top A(x)$	$\max M_{F_2}(x)\top A(x)$
$\wedge$	$M_{F_1}(\mathrm{I})\wedge A(\mathrm{I})=0.8$	$M_{F_2}(\mathrm{I})\wedge A(\mathrm{I})=0.8$
$\times$	$M_{F_1}(\mathrm{II})\times A(\mathrm{II})=0.74$	$M_{F_2}(\mathrm{I})\times A(\mathrm{I})=0.72$
$\odot$	$M_{F_1}(\mathrm{II})\odot A(\mathrm{II})=0.74$	$M_{F_2}(\mathrm{I})\odot A(\mathrm{I})=M_{F_2}(\mathrm{II})\odot A(\mathrm{II})=0.7$

从表 9.2.5 中可以看出，我们应该选择产品 I 或产品 II. □

§9.3 非对称型 Fuzzy 规划

如果把目标和约束看成不同等重要的，可以用加权的方法. 这就是所谓的非对称型 Fuzzy 规划(unsymmetric fuzzy programming).

设 $a\geqslant 0, b\geqslant 0, a+b=1$，记

$$B=aA+bM_F \tag{9.3.1}$$

即

$$B(x)=aA(x)+bM_F(x),\ \forall x\in X \tag{9.3.2}$$

若有 $x^*\in X$，使得

$$B(x^*)=\max_{x\in X}B(x) \tag{9.3.3}$$

则称 x^* 为 f 的最优点，$f(x^*)$ 为最优值.

对于多约束 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的情况，可以采用

$$A(x)=h(A_1(x), A_2(x), \cdots, A_n(x)) \tag{9.3.4}$$

对于多目标 $f_1, f_2, \cdots, f_m$，先求出模糊目标集 $M_{f_1}, M_{f_2}, \cdots, M_{f_m}$，再采用

$$M_F(x)=g(M_{f_1}(x), M_{f_2}(x), \cdots, M_{f_m}(x)) \tag{9.3.5}$$

其中 g、h 都是综合评判函数. 然后，对 A 和 M_F 使用上面的模型.

例 9.3.1 仍以例 9.2.3 为例. 对于表 9.2.3 中的 A 与 M_{F_1}，M_{F_2} 取权重 $a=0.4$，$b=0.6$，我们得到

$$\begin{aligned}B_1&=0.4A+0.6M_{F_1}\\&=0.4\left(\frac{0.8}{\mathrm{I}}+\frac{1}{\mathrm{II}}+\frac{0.6}{\mathrm{III}}+\frac{0.91}{\mathrm{IV}}+\frac{0.4}{\mathrm{V}}\right)+\\&\quad 0.6\left(\frac{0.80}{\mathrm{I}}+\frac{0.74}{\mathrm{II}}+\frac{0.86}{\mathrm{III}}+\frac{0.61}{\mathrm{IV}}+\frac{0.71}{\mathrm{V}}\right)\\&=\frac{0.8}{\mathrm{I}}+\frac{0.844}{\mathrm{II}}+\frac{0.756}{\mathrm{III}}+\frac{0.73}{\mathrm{IV}}+\frac{0.586}{\mathrm{V}}\end{aligned}$$

$$B_2=0.4A+0.6M_{F_2}$$

$$=0.4\left(\frac{0.8}{\mathrm{I}}+\frac{1}{\mathrm{II}}+\frac{0.6}{\mathrm{III}}+\frac{0.91}{\mathrm{IV}}+\frac{0.4}{\mathrm{V}}\right)+0.6\left(\frac{0.9}{\mathrm{I}}+\frac{0.7}{\mathrm{II}}+\frac{1}{\mathrm{III}}+\frac{0.54}{\mathrm{IV}}+\frac{0.6}{\mathrm{V}}\right)$$

$$=\frac{0.86}{\mathrm{I}}+\frac{0.82}{\mathrm{II}}+\frac{0.84}{\mathrm{III}}+\frac{0.688}{\mathrm{IV}}+\frac{0.52}{\mathrm{V}}$$

计算结果如表 9.3.1 所示.

表 9.3.1　　综合目标与综合约束的加权模型(非对称)

	I	II	III	IV	V
M_{F_1} $(0.65M_{f_1}+0.35M_{f_2})$	0.80	0.74	0.86	0.61	0.71
M_{F_2} $(M_{f_1}\vee 0.54M_{f_2})$	0.9	0.7	1	0.54	0.6
A $(0.55A_1+0.45A_2)$	0.8	1	0.6	0.91	0.4
$B_1=0.4A+0.6M_{F_1}$	0.8	0.844	0.756	0.73	0.586
$B_2=0.4A+0.6M_{F_2}$	0.86	0.82	0.84	0.688	0.52

易见 $B_1(\mathrm{II})=0.844=\max\limits_{x\in X}B_1(x)$, $B_2(\mathrm{I})=0.86=\max\limits_{x\in X}B_2(x)$. 这表明对于 F_1 应购买型号 II 设备，对于 F_2 应购买型号 I 设备. □

§ 9.4　Fuzzy 线性规划

在实际问题中,有的约束条件可能带有伸缩性. 对于这类问题,必须借助 Fuzzy 集的方法来处理,这便是 Fuzzy 线性规划(fuzzy linear programming). 该方法的一般形式是

$$\max\quad f=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\lesssim b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\lesssim b_2\\ \vdots\qquad\qquad\qquad\vdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\lesssim b_m\\ x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant 0\end{cases}\tag{9.4.1}$$

若记 $c=(c_1,c_2,\cdots,c_n)$, $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $b=(b_1,b_2,\cdots,b_m)'$, $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$. 式(9.4.1)可以简记为

$$\max \quad f = cx$$
$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} Ax \lesssim b \\ x \geqslant 0 \end{cases} \tag{9.4.2}$$

其中“$\lesssim$”表示某种弹性约束，可以理解为“近似小于或等于”.

Zimmermann（齐默曼，德国运筹学家，模糊数学家）首次提出了求解问题(9.4.1)的算法(Zimmermann,1991)，下面介绍这一算法.

令

$$X = \{x \mid x \in \mathbf{R}^n, x \geqslant 0\}$$

将 m 个通过“$\lesssim$”表示的约束条件改写成 m 个 Fuzzy 集 $D_i \in \mathscr{F}(X)$ $(i=1,2,\cdots,m)$，且

$$D_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right) = \begin{cases} 1, & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i, \\ 1 - \frac{1}{d_i}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i\right), & b_i < \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i + d_i, \\ 0, & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j > b_i + d_i, \end{cases} \tag{9.4.3}$$

$$i = 1,2,\cdots,m$$

其中 d_i $(i=1,2,\cdots,m)$是已知给定的非负数并称为弹性指标，$d=(d_1,d_2,\cdots,d_n)'$ 称为式(9.4.1)的弹性指标向量.

记 $t_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$，则 $D_i(t_i)$ 的图形如图 9.4.1 所示.

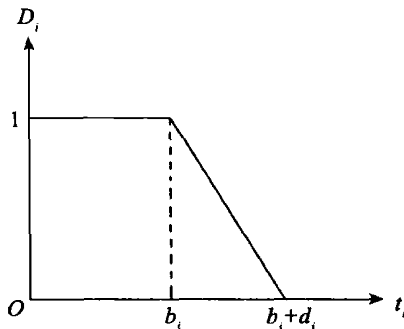


图 9.4.1 Fuzzy 约束的隶属函数

为了求得目标函数在 Fuzzy 约束下的最优解，还应给出 f 的取值范围，将目标值 Fuzzy 化．如让 $f_0 < f < f_0 + d_0$（其中 $d_0 > 0$），并取 $M \in \mathscr{F}(X)$，令

$$M\left(\sum_{j=1}^{n} c_j x_j\right) = \begin{cases} 0, & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j < f_0 \\ \dfrac{1}{d_0}\left(\sum_{j=1}^{n} c_j x_j - f_0\right), & f_0 \leqslant \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leqslant f_0 + d_0 \\ 1, & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \geqslant f_0 + d_0 \end{cases} \tag{9.4.4}$$

记 $t_0 = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$，则 M 与 t_0 之间的关系如图 9.4.2 所示．

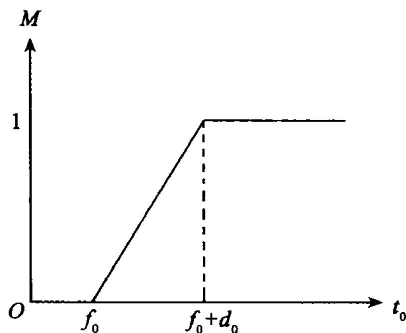


图 9.4.2 Fuzzy 目标的隶属函数

关于 f_0 与 d_0 的确定，可以由实际问题给出，亦可以参照普通线性规划问题

$$\text{P1:} \quad \max \ f = cx, \quad \text{s.t.} \begin{cases} Ax \leqslant b \\ x \geqslant 0 \end{cases} \tag{9.4.5}$$

$$\text{P2:} \quad \max \ f = cx, \quad \text{s.t.} \begin{cases} Ax \leqslant b + d \\ x \geqslant 0 \end{cases} \tag{9.4.6}$$

的解确定．例如，设问题 P1 的解为 f_*，问题 P2 的解为 $f_* + d_*$．

现令

$$D = D_1 \cap D_2 \cap \cdots \cap D_m \tag{9.4.7}$$

其中 D_i（$i = 1, 2, \cdots, m$）是前面定义的约束 Fuzzy 集．使用 § 9.2 中的模型，并取 $\mathrm{T} = \wedge$，即将 Fuzzy 约束下的线性规划问题转化为如下模型

$$\max \quad M(x) \wedge D(x) \tag{9.4.8}$$

为了给出该模型的解，先证明如下定理．

定理 9.4.1　设 $A,B\in\mathscr{F}(X)$，记

$$\Lambda_{AB}=\{\alpha\mid \exists x\in X, A(x)\geqslant\alpha, B(x)\geqslant\alpha\} \tag{9.4.9}$$

$$\alpha_0=\bigvee_{\alpha\in\Lambda_{AB}}\alpha,\ \alpha_*=\bigvee_{x\in X}(A(x)\wedge B(x)) \tag{9.4.10}$$

则 $\alpha_0=\alpha_*$.

证明　任取 $\alpha\in\Lambda_{AB}$，则 $\exists x\in X$，使 $A(x)\wedge B(x)\geqslant\alpha$，从而 $\alpha_*\geqslant\alpha$，故 $\alpha_*\geqslant\bigvee_{\alpha\in\Lambda_{AB}}\alpha=\alpha_0$. 下证 $\forall\varepsilon>0$，总有 $\alpha_*-\varepsilon\in\Lambda_{AB}$. 若不然，$\exists\varepsilon_0>0$，使 $\alpha_*-\varepsilon_0\overline{\in}\Lambda_{AB}$，即 $\forall x\in X$，都有 $A(x)<\alpha_*-\varepsilon_0$ 或 $B(x)<\alpha_*-\varepsilon_0$，故

$$\alpha_*=\bigvee_{x\in X}(A(x)\wedge B(x))\leqslant\alpha_*-\varepsilon_0$$

因 $\varepsilon_0>0$，这是不可能的，故 $\forall\varepsilon>0$，都有 $\alpha_*-\varepsilon\in\Lambda_{AB}$. 因此，$\alpha_*-\varepsilon\leqslant\bigvee_{\alpha\in\Lambda_{AB}}\alpha=\alpha_0$，由 $\varepsilon>0$ 的任意性知，$\alpha_*\leqslant\alpha_0$，即 $\alpha_*=\alpha_0$. □

根据定理 9.4.1，得到

$$\begin{aligned}\bigvee_{x\in X}(M(x)\wedge D(x))&=\bigvee_{\alpha\in[0,1]}\{\alpha\mid M(x)\geqslant\alpha, D(x)\geqslant\alpha\}\\&=\bigvee_{\alpha\in[0,1]}\{\alpha\mid M(x)\geqslant\alpha; D_1(x)\geqslant\alpha, D_2(x)\geqslant\alpha,\cdots,D_m(x)\geqslant\alpha\}\end{aligned} \tag{9.4.11}$$

据此，又可以将 Fuzzy 约束下的线性规划问题(9.4.8)转化成如下线性规划问题

$$\max\quad g=\alpha$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}1-\dfrac{1}{d_i}\left(\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j-b_i\right)\geqslant\alpha,\ i=1,2,\cdots,m\\ \dfrac{1}{d_0}\left(\sum\limits_{j=1}^{n}c_jx_j-f_0\right)\geqslant\alpha\\ \alpha\leqslant 1\\ \alpha\geqslant 0, x_j\geqslant 0,\ j=1,2,\cdots,n\end{cases} \tag{9.4.12}$$

稍加整理后得如下模型

$$\max\quad g=\alpha$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j+d_i\alpha\leqslant b_i+d_i,\ i=1,2,\cdots,m\\ \sum\limits_{j=1}^{n}c_jx_j-d_0\alpha\geqslant f_0\\ \alpha\leqslant 1\\ \alpha\geqslant 0, x_j\geqslant 0,\ j=1,2,\cdots,n\end{cases} \tag{9.4.13}$$

设 $(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*, \alpha)'$ 是问题(9.4.13)的最优解，则 $x^* = (x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)'$ 是问题(9.4.1)且限定 $f_0 < f < f_0 + d_0$ 之后的解. $f^* = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^*$ 是问题(9.4.1)加条件 $f_0 < f < f_0 + d_0$ 后所得目标函数的最大值.

例 9.4.1 甲、乙两机械每月最多约能运行分别为 400 个工时和 250 个工时，甲机械每工时耗费(维修、折旧等)3 元，但获净利润 7 元；乙机械每工时耗费 2 元，但获净利润 3 元. 甲、乙两机械每月耗费总和不得超过 1 500 元，试问如何安排两机械运行可以获得最大利润？

设 x_1 为甲机械运行工时数，x_2 为乙机械运行工时数，该问题就是 Fuzzy 线性规划问题.

$$\max \quad f = 7x_1 + 3x_2$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leqslant 1\,500 \\ x_1 \leqslant 400 \\ x_2 \leqslant 250 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

取弹性指标分别为 50(元)、5(工时)、5(工时).

(1)为了求 f_0，解普通线性规划问题

$$\max \quad f = 7x_1 + 3x_2$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leqslant 1\,500 \\ x_1 \leqslant 400 \\ x_2 \leqslant 250 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

化为

$$\max \quad f = 7x_1 + 3x_2$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1\,500 \\ x_1 + x_4 = 400 \\ x_2 + x_5 = 250 \\ x_i \geqslant 0, i = 1,2,3,4,5 \end{cases}$$

用单纯形法

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc:c} 7 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1\,500 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 400 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 250 \end{array}\right] \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc:c} 0 & 3 & 0 & -7 & 0 & -2\,800 \\ \hdashline 0 & 2 & 1 & -3 & 0 & 300 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 400 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 250 \end{array}\right] \end{array}$$

$$
\Rightarrow
\begin{array}{c}
\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \end{matrix} \\
\left[\begin{array}{ccccc:c}
0 & 0 & -1.5 & -2.5 & 0 & -3\ 250 \\
\hdashline
0 & 1 & 0.5 & -1.5 & 0 & 150 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 400 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 100
\end{array}\right]
\end{array}
$$

于是，$x_1=400$，$x_2=150$ 为最优解，$f_0=3\ 250$ 为最优值.

(2)为了求 d_0，解普通线性规划问题

$$
\max \quad f=7x_1+3x_2
$$

$$
\text{s. t.}\begin{cases}3x_1+2x_2\leqslant 1\ 500+50\\ x_1\leqslant 400+5\\ x_2\leqslant 250+5\\ x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0\end{cases}
$$

化为

$$
\max \quad f=7x_1+3x_2
$$

$$
\text{s. t.}\begin{cases}3x_1+2x_2+x_3=1\ 550\\ x_1+x_4=405\\ x_2+x_5=255\\ x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0\end{cases}
$$

同理用单纯形法得，$f_0+d_0=3\ 337.5$，故 $d_0=3\ 337.5-3\ 250=87.5$. 并且 $x_1=405$，$x_2=167.5$.

(3)对于普通线性规划问题

$$
\max \quad g=\alpha
$$

$$
\text{s. t.}\begin{cases}1-\dfrac{1}{50}(3x_1+2x_2-1\ 500)\geqslant \alpha\\ 1-\dfrac{1}{5}(x_1-400)\geqslant \alpha\\ 1-\dfrac{1}{5}(x_2-400)\geqslant \alpha\\ \dfrac{1}{87.5}(7x_1+3x_2-3\ 250)\geqslant \alpha\\ \alpha\leqslant 1\\ x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0,\alpha\geqslant 0\end{cases}
$$

即

$$\max \quad g=\alpha$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}3x_1+2x_2+50\alpha\leqslant 1\,550\\ x_1+5\alpha\leqslant 405\\ x_2+5\alpha\leqslant 255\\ -7x_1-3x_2+87.5\alpha\leqslant -3\,250\\ \alpha\leqslant 1\\ x_1\geqslant 0, x_2\geqslant 0, \alpha\geqslant 0\end{cases}$$

化为

$$\max \quad g=\alpha$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}3x_1+2x_2+50\alpha+x_3=1\,550\\ x_1+5\alpha+x_4=405\\ x_2+5\alpha+x_5=255\\ -7x_1-3x_2+87.5\alpha+x_6=-3\,250\\ \alpha+\alpha_0=1\\ \alpha\geqslant 0, \alpha_0\geqslant 0, x_i\geqslant 0, i=1,2,\cdots,6\end{cases}$$

用单纯形法得最优解

$$(x_1^*, x_2^*, \alpha^*)=(402.5, 158.75, 0.5)$$

即安排甲机械运行 402.5 工时，乙机械运行 158.75 工时，便可以获得最大利润，其数值为

$$f=7x_1^*+3x_2^*=3\,293.75\ (\text{元})$$

与普通线性规划情形相比较，利润提高 43.75(元)，这是由于甲机械运行工时比 400 工时的限制超出 2.5 工时(这是弹性指标允许的)，并且月耗费总和比 1 500(元)的限制超出 25 元(这也是弹性指标允许的). 在放松限制的情况下提高了利润. □

§9.5 多目标 Fuzzy 线性规划

在§9.2 中，已经提到过多目标最优化问题. 下面主要使用§9.4 中提出的方法讨论多目标线性规划问题和在 Fuzzy 约束下的多目标线性规划问题(multi-objective linear programming problem with fuzzy constrains).

9.5.1 多目标线性规划问题的 Fuzzy 最优解

多目标线性规划问题的一般形式是

$$\max \begin{cases} f_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n \\ f_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n \\ \vdots \\ f_l = c_{l1}x_1 + c_{l2}x_2 + \cdots + c_{ln}x_n \end{cases}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leqslant b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant b_m \\ x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0 \end{cases} \tag{9.5.1}$$

若记 $C=(c_{kj})_{r\times n}$，$A=(a_{ij})_{m\times n}$，$f=(f_1,f_2,\cdots,f_l)'$，$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$，$b=(b_1,b_2,\cdots,b_m)'$. 式(9.5.1)用矩阵形式可以写成

$$\max \quad f = Cx$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} Ax \leqslant b \\ x \geqslant \mathbf{0} \end{cases} \tag{9.5.2}$$

问题(9.5.1)(即问题(9.5.2))具有 l 个目标和 m 个约束条件，是多目标线性规划问题. 多目标线性规划问题有许多种解法，如权重法(即对每个单目标都赋予一定的权重，而构成一个单目标优化问题)，约束法(即将多个目标中的一个先作基本目标，其他目标转化为约束条件)等. 下面将使用定理 9.4.1，将问题(9.5.1)归结为类似问题(9.4.6)的单目标普通规划问题.

令 $X=\{x \mid x \geqslant \mathbf{0}, x \in \mathbf{R}^n\}$，$D=\{x \mid Ax \leqslant b, x \geqslant \mathbf{0}\}$，则 $D \subseteq X$，且若 $D \neq \varnothing$，则对于任意 $x \in D$ 都是问题(9.5.1)的可行解. 对于任意 k，选取常数 f_{0k} 和 $l_{0k} > 0$，构造 $M_k \in \mathscr{F}(X)$，且

$$M_k(x) = \begin{cases} 0, & \sum_{j=1}^{n} c_{kj}x_j < f_{0k} - l_{0k} \\ 1 - \dfrac{1}{l_{0k}}\left(f_{0k} - \sum_{j=1}^{n} c_{kj}x_j\right), & f_{0k} - l_{0k} \leqslant \sum_{j=1}^{n} c_{kj}x_j < f_{0k} \\ 1, & \sum_{j=1}^{n} c_{kj}x_j \geqslant f_{0k} \end{cases} \tag{9.5.3}$$

又令

$$M = M_1 \cap M_2 \cap \cdots \cap M_l \tag{9.5.4}$$

使用模型 7，并取 $\top = \wedge$，将问题(9.5.1)转换成如下规划问题

$$\max \quad M(x) \wedge \chi_D(x)$$

或写成

$$\max \quad M(x)$$
$$\text{s.t.} \quad x \in D$$

再使用定理 9.4.1,得如下单目标普通线性规划问题

$$\max \quad g=\alpha$$
$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} M(X) \geqslant \alpha \\ x \in D \end{cases}$$

即

$$\max \quad g=\alpha$$
$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} 1-\dfrac{1}{l_{0k}}\left(f_{0k}-\sum\limits_{j=1}^{n} c_{kj} x_j\right) \geqslant \alpha, \ k=1,2,\cdots,l \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i, \ i=1,2,\cdots,m \\ \alpha \leqslant 1 \\ \alpha \geqslant 0, \ x_j \geqslant 0, \ j=1,2,\cdots,n \end{cases}$$

稍加整理后得

$$\max \quad g=\alpha$$
$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} c_{kj} x_j - l_{0k}\alpha \geqslant f_{0k}-l_{0k}, \ k=1,2,\cdots,l \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i, \ i=1,2,\cdots,m \\ \alpha \leqslant 1 \\ \alpha \geqslant 0, \ x_j \geqslant 0, \ j=1,2,\cdots,n \end{cases} \tag{9.5.5}$$

设 $(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*, \alpha)'$ 是问题(9.5.5)的最优解,则 $x^*=(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)'$ 是在取定 $f_0=(f_{01}, f_{02}, \cdots, f_{0l})'$ 和 $l_0=(l_{01}, l_{02}, \cdots, l_{0l})'$ 后问题(9.5.1)的最优解,且 $f_k(x^*)$ $(k=1,2,\cdots,l)$ 是目标函数在取定 f_0 与 l_0 情况下的最大值. 仍如 §9.4 中所述,对确定的 k, f_{0k} 和 l_{0k} 可以参照问题

$$\max \quad f_k=\sum_{j=1}^{n} c_{kj} x_j$$
$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \leqslant b_i, & i=1,2,\cdots,m \\ x_j \geqslant 0, & j=1,2,\cdots,n \end{cases} \tag{9.5.6}$$

的最优解确定.

设 $x^{(k)}=(x_{k1},x_{k2},\cdots,x_{kn})$ 是问题(9.5.6)的最优解,记

$$f_{sk}=f_s(x^{(k)}),\quad s,k=1,2,\cdots,l$$

则对于任意 s,都有 $f_{sk}\leqslant f_{kk}$,记 $f_k^{(m)}=\min\limits_{1\leqslant s\leqslant l} f_{sk}$,则可以取 $f_{0k}\in[f_k^{(m)},f_{kk}]$,$0<l_{0k}\leqslant f_{kk}-f_k^{(m)}$. 一般地,$f_{0k}$ 越靠近 f_{kk},l_{0k} 越小,就越偏近于第 k 个目标,相当于加大了第 k 个目标的权重.

例 9.5.1 对于如下双目标线性规划问题

$$\max\begin{cases}f_1=x_1+2x_2\\ f_2=3x_1-x_2\end{cases}$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}3x_1+2x_2\leqslant 18\\ -x_1+4x_2\leqslant 8\\ x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}\tag{9.5.7}$$

先解

$$\max\quad f_1=x_1+2x_2$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}3x_1+2x_2\leqslant 18\\ -x_1+4x_2\leqslant 8\\ x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}\tag{9.5.8}$$

将其标准化,得

$$\max\quad f_1=x_1+2x_2$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}3x_1+2x_2+x_3\quad=18\\ -x_1+4x_2\quad+x_4=8\\ x_1,x_2,x_3,x_4\geqslant 0\end{cases}$$

用单纯形法得 $x^{(1)}=(x_1,x_2)'=(4,3)'$ 是问题(9.5.8)的最优解. 且

$$f_{11}=f_1(x^{(1)})=10,\ f_{12}=f_2(x^{(1)})=9\tag{9.5.9}$$

再解

$$\max\quad f_2=3x_1-x_2$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}3x_1+2x_2\leqslant 18\\ -x_1+4x_2\leqslant 8\\ x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}\tag{9.5.10}$$

将其标准化,得

$$\max \quad f_2 = 3x_1 - x_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 18 \\ -x_1 + 4x_2 + x_4 = 8 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0 \end{cases}$$

用单纯形法得 $x^{(2)} = (x_1, x_2)' = (6,0)'$ 是问题(9.5.10)的最优解. 且

$$f_{21} = f_1(x^{(2)}) = 6,\ f_{22} = f_2(x^{(2)}) = 18 \tag{9.5.11}$$

由式(9.5.9)与式(9.5.11),应取 $f_{01} \in [6,10]$, $f_{02} \in [9,18]$, 且

$$0 < l_{01} \leqslant 4, 0 < l_{02} \leqslant 9.$$

现取定 $f_{01} = 8, l_{01} = 1, f_{02} = 12, l_{02} = 2$, 由问题(9.5.5)得

$$\max \quad g = \alpha$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - \alpha \geqslant 7 \\ 3x_1 - x_2 - 2\alpha \geqslant 10 \\ 3x_1 + 2x_2 \leqslant 18 \\ -x_1 + 4x_2 \leqslant 8 \\ \alpha \leqslant 1 \\ x_1, x_2 \geqslant 0, \alpha \geqslant 0 \end{cases} \tag{9.5.12}$$

将其标准化,得

$$\max \quad g = \alpha$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - \alpha = 7 \\ 3x_1 - x_2 - x_4 - 2\alpha = 10 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_5 = 18 \\ -x_1 + 4x_2 + x_6 = 8 \\ x_7 + \alpha = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geqslant 0, \alpha \geqslant 0 \end{cases}$$

用单纯形法得 $(x_1, x_2, \alpha)' = \left(\frac{32}{7}, \frac{12}{7}, 1\right)'$ 是问题(9.5.12)的解. 从而

$$(x_1, x_2)' = \left(\frac{32}{7}, \frac{12}{7}\right)'$$

取定 $f_{01} = 8, l_{01} = 1, f_{02} = 12, l_{02} = 2$ 时问题(9.5.7)的最优解,且 f_1, f_2 所对应的最大值分别就是 f_{01} 与 f_{02}.

上述方法并不是十分完善的,关键是没有给出 $f_0 = (f_{01}, f_{02}, \cdots, f_{0l})'$ 和 $l_0 = (l_{01}, l_{02}, \cdots, l_{0l})'$ 的选择方法,当 f_0 和 l_0 选择不当时,将导致问题(9.5.5)无解,但这时并不能说明问题(9.5.1)无解. 将上述方法推广到 Fuzzy 约束条件

下多目标规划时，同样涉及 f_0 和 l_0 的选择问题. 现简要介绍如下.

9.5.2　Fuzzy 约束下的多目标线性规划问题

在 Fuzzy 约束下多目标线性规划的一般形式是

$$\max \quad f = cx$$
$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} Ax \leqslant b \\ x \geqslant \mathbf{0} \end{cases} \tag{9.5.13}$$

为了求得问题(9.5.13)的解仍需先取定 $f_0 = (f_{01}, f_{02}, \cdots, f_{0l})'$ 和 $l_0 = (l_{01}, l_{02}, \cdots, l_{0l})'$，再使用式(9.5.3)确定 $M_k \in \mathscr{F}(X)$(其中 $X = \{x \mid x \geqslant \mathbf{0}, x \in \mathbf{R}^n\}$)，使用式(9.5.4)确定 $M \in \mathscr{F}(X)$. 并需给定 $d = (d_1, d_2, \cdots, d_m)'$，使用式(9.4.3)确定 $D_i \in \mathscr{F}(X)$和式(9.4.7)确定 $D \in \mathscr{F}(X)$. 将问题(9.5.13)归结为

$$\max \quad M(x) \wedge D(x) \tag{9.5.14}$$

再利用定理 9.4.1 及式(9.4.9)和问题(9.5.5)，将问题(9.5.14)归结为如下单目标线性规划问题

$$\max \quad g = \alpha$$
$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} c_{kj} x_j - l_{0k}\alpha \geqslant f_{0k} - l_{0k}, \ k = 1, 2, \cdots, l \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + d_j \alpha \leqslant b_i + d_i, \ i = 1, 2, \cdots, m \\ \alpha \leqslant 1 \\ \alpha \geqslant 0, \ x_j \geqslant 0, \ j = 1, 2, \cdots, n \end{cases} \tag{9.5.15}$$

又设 $(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*, \alpha)'$ 是问题(9.5.15)的最优解，则定义 $x^* = (x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)'$ 是问题(9.5.13)在取定 f_0、l_0 和 d 后，以 α^* 的可能性获得的最优解，且

$$f_k^* = \sum_{j=1}^{n} c_{kj} x_j^*, k = 1, 2, \cdots, l \tag{9.5.16}$$

是对应的最优目标函数值.

§9.6　区间目标非线性规划

Ishibuchi 和 Tanaka (1990)研究了目标函数中含区间系数的线性规划问题.

$$\max Z(x)=Z(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}C_ix_i \qquad (9.6.1)$$

$$\text{s.t.}\ \ x\in X\subset \mathbf{R}^n$$

其中 X 是 x 的可行域，系数 $C_i=[\underline{c}_i,\overline{c}_i]\in I_{\mathbf{R}}$ $(i=1,2,\cdots,n)$. 问题(9.6.1)被简称为区间目标线性规划(linear programming with interval objective function)或 IOLP.

我们还可以讨论更一般的一类目标函数中含区间系数的非线性规划问题(Hu, Wang, 2006b).

$$\max Z(x)=Z(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{m}C_if_i(x) \qquad (9.6.2)$$

$$\text{s.t.}\ \ x\in X\subset \mathbf{R}^n$$

其中 $f_i(x)(i=1,2,\cdots,m)$ 是 $\mathbf{R}$ 上已知的 n 元函数. 问题(9.6.2)被简称为区间目标非线性规划或 IONLP. 显然问题(9.6.1)是问题(9.6.2)的特例.

对于 $x\in X$, $Z(x)$ 是一个区间，即 $Z(x)=[\underline{z}(x),\overline{z}(x)]=\langle m(Z)(x), w(Z)(x)\rangle$ (参见 § 2.5).

其中

$$\underline{z}(x)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i(x)f_i(x),\ \overline{z}(x)=\sum_{i=1}^{m}\beta_i(x)f_i(x),$$

$$\alpha_i(x)=\begin{cases}\underline{c}_i, & f_i(x)\geqslant 0\\ \overline{c}_i, & f_i(x)<0\end{cases},\ \beta_i(x)=\begin{cases}\overline{c}_i, & f_i(x)\geqslant 0\\ \underline{c}_i, & f_i(x)<0\end{cases}$$

$$m(Z)(x)=\sum_{i=1}^{m}\frac{\underline{c}_i+\overline{c}_i}{2}f_i(x),\ w(Z)(x)=\sum_{i=1}^{m}\frac{\overline{c}_i-\underline{c}_i}{2}\left|f_i(x)\right|.$$

由于对每一个可行解所对应的目标函数值是一个区间数，所以目标函数的"最优"解依赖于区间的序关系.

定义 9.6.1 (Hu, Wang, 2006b) $x\in X$ 是问题(9.6.2)的关于偏序关系 R 的解当且仅当不存在另外的 $x'\in X$ 使得

$$Z(x)RZ(x')\ \text{且}\ Z(x)\neq Z(x')$$

问题(9.6.2)关于偏序关系 R 的解集记为 $S(R)$. 若 $R=\leqslant_{LR}$, $\leqslant_{Lm}$, $\leqslant_{mw}$, $\preceq$ (参见 § 2.5)，则对应解集分别为 $S(\leqslant_{LR})$, $S(\leqslant_{Lm})$, $S(\leqslant_{mw})$, $S(\preceq)$.

由定理 2.5.7 (3)易得以下定理.

定理 9.6.1 (Hu, Wang, 2006b) 设 $0\leqslant t_0<t_1\leqslant 1$，则 $x\in S(\leqslant_{Lm}/_{t_0,t_1})$ 当且仅当 $x\in S(\leqslant_{LR}/_{t_0,t_1})$ 或 $x\in S(\leqslant_{mw}/_{t_0,t_1})$.

由定理 2.5.7 (2)易得以下定理.

定理 9.6.2 (Hu, Wang, 2006b) 设 $0\leqslant t_0<t_1\leqslant 1$，则 $x\in S(\leqslant_{Lm}/_{t_0,t_1})$ 当且仅当 $x\in S(\leqslant_{LR}/_{t_0,\frac{t_0+t_1}{2}})$.

由定理 2.5.8 易得以下定理.

定理 9.6.3 (Hu, Wang, 2006b) 设 $0\leqslant t_0<t_1\leqslant 1$，则

$$S(\preceq/_{t_0,t_1})\subseteq S(\leqslant_{LR}/_{t_0,t_1})\cap S(\leqslant_{mw}/_{t_0,t_1})\cap S(\leqslant_{Lm}/_{t_0,t_1})$$

特别地
$$S(\preceq)\subseteq S(\leqslant_{LR})\cap S(\leqslant_{mw})\cap S(\leqslant_{Lm}).$$

由上述定理以及定理 2.5.7 和定理 2.5.8 得到 IONLP 的各种解集的关系如图 9.6.1 所示.

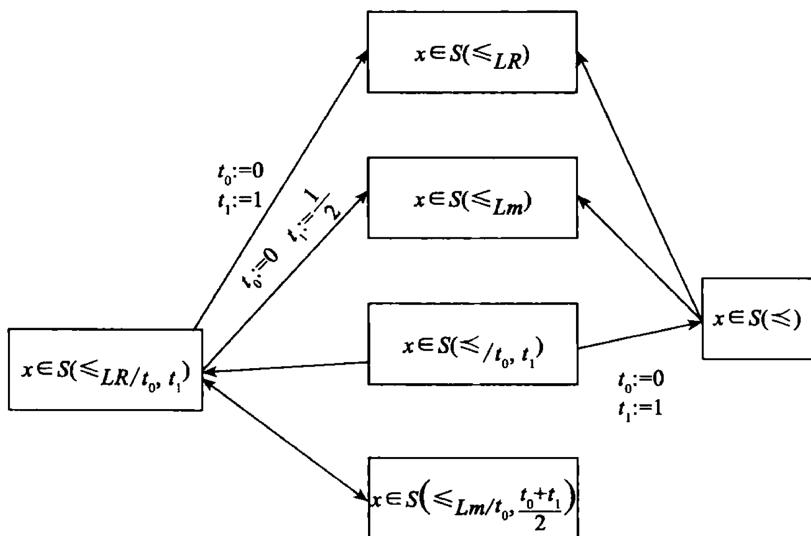


图 9.6.1 IONLP 的各种解集的关系图

定理 9.6.4 (Hu, Wang, 2006b) 设 $0\leqslant t_0<t_1\leqslant 1$，则为了确定 IONLP 问题 (9.6.2)的解集 $S(\preceq/_{t_0,t_1})$，只需求出下列两个非线性规划的解

$$\max Z(x)=\sum_{i=1}^{m}\left[\alpha_i(x)f_i(x)+\frac{t_0+t_1}{2}(\overline{c}_i-\underline{c}_i)\right]|f_i(x)| \quad (9.6.3)$$
$$\text{s.t. } x\in X\subset \mathbf{R}^n$$

$$\min\sum_{i=1}^{m}\frac{t_1-t_0}{2}(\overline{c}_i-\underline{c}_i)|f_i(x)| \quad (9.6.4)$$
$$\text{s.t. } x\in S_m/_{t_0,t_1}=\{y\,|\,y\text{ 是 (9.6.3) 的解}\}$$

其中
$$\alpha_i(x)=\begin{cases}\underline{c}_i, & f_i(x)\geqslant 0\\ \overline{c}_i, & f_i(x)<0\end{cases}$$

特别地，当 $t_0=0$ 和 $t_1=1$ 时，问题(9.6.3)和问题(9.6.4)为

$$\max Z(x)=\sum_{i=1}^{m}\frac{\underline{c}_i+\overline{c}_i}{2}f_i(x)$$
$$\text{s.t. } x\in X\in \mathbf{R}^n \tag{9.6.5}$$

$$\min\sum_{i=1}^{m}\frac{\overline{c}_i-\underline{c}_i}{2}|f_i(x)|$$
$$\text{s.t. } x\in S_m=\{x\mid x \text{ 是 (9.6.5) 的解}\} \tag{9.6.6}$$

证明 设 $x\in S(\leq/_{t_0,t_1})$. 对任意 $x'\in X$，因

$$\begin{aligned}Z(x)/_{t_0,t_1}&=[\underline{z}(x)+t_0(\overline{z}(x)-\underline{z}(x)),\underline{z}(x)+t_1(\overline{z}(x)-\underline{z}(x))]\\&=\left[\sum_{i=1}^{m}\alpha_i(x)f_i(x)+t_0\sum_{i=1}^{m}(\overline{c}_i-\underline{c}_i)|f_i(x)|,\right.\\&\qquad\left.\sum_{i=1}^{m}\alpha_i(x)f_i(x)+t_1\sum_{i=1}^{m}(\overline{c}_i-\underline{c}_i)|f_i(x)|\right]\\&=\left\langle\sum_{i=1}^{m}\alpha_i(x)f_i(x)+\frac{t_0+t_1}{2}\sum_{i=1}^{m}(\overline{c}_i-\underline{c}_i)|f_i(x)|,\right.\\&\qquad\left.\frac{t_1-t_0}{2}\sum_{i=1}^{m}(\overline{c}_i-\underline{c}_i)|f_i(x)|\right\rangle,\end{aligned}$$

我们得到

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{m}\alpha_i(x)f_i(x')+\frac{t_0+t_1}{2}\sum_{i=1}^{m}(\overline{c}_i-\underline{c}_i)|f_i(x')|\\&\qquad\leqslant\sum_{i=1}^{m}\alpha_i(x)f_i(x)+\frac{t_0+t_1}{2}\sum_{i=1}^{m}(\overline{c}_i-\underline{c}_i)|f_i(x)|\end{aligned}$$

并且如果

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{m}\alpha_i(x)f_i(x')+\frac{t_0+t_1}{2}\sum_{i=1}^{m}(\overline{c}_i-\underline{c}_i)|f_i(x')|\\&\qquad=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i(x)f_i(x)+\frac{t_0+t_1}{2}\sum_{i=1}^{m}(\overline{c}_i-\underline{c}_i)|f_i(x)|\end{aligned}$$

那么 $\dfrac{t_1-t_0}{2}\sum_{i=1}^{m}(\overline{c}_i-\underline{c}_i)|f_i(x')|\geqslant\dfrac{t_1-t_0}{2}\sum_{i=1}^{m}(\overline{c}_i-\underline{c}_i)|f_i(x)|$.

于是 x 满足问题(9.6.3)和问题(9.6.4).

上面的证明是可逆的. □

如果 $f_i(x)$ $(i=1,2,\cdots,m)$ 是非负的，则问题(9.6.3)可以写成

$$\max Z(x)=\sum_{i=1}^{m}\left[\underline{c_i}f_i(x)+\frac{t_0+t_1}{2}(\overline{c_i}-\underline{c_i})\,|f_i(x)|\right]$$

$$\text{s.t.}\ x\in X\subset \mathbf{R}^n$$

如果问题(9.6.1)和问题(9.6.2)的约束为 $X=\{x\,|\,g_k(x)\leqslant b_k,k=1,2,\cdots,l\}$ 并且 $f_i(x)$ $(i=1,2,\cdots,m)$ 是非负可微的和 $g_k(x)$ $(k=1,2,\cdots,l)$ 是可微的，则问题(9.6.3)的 Kuhn-Tucker 条件是

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\left[\underline{c_i}+\frac{t_0+t_1}{2}(\overline{c_i}-\underline{c_i})\right]\frac{\partial f_i}{\partial x_j}-\sum_{k=1}^{l}u_k\frac{\partial g_k}{\partial x_j}\leqslant 0,\ j=1,2,\cdots,n\\ \displaystyle x_j\left\{\sum_{i=1}^{m}\left[\underline{c_i}+\frac{t_0+t_1}{2}(\overline{c_i}-\underline{c_i})\right]\frac{\partial f_i}{\partial x_j}-\sum_{k=1}^{l}u_k\frac{\partial g_k}{\partial x_j}\right\}=0,\ j=1,2,\cdots,n\\ g_k(x)-b_k\leqslant 0,\ k=1,2,\cdots,l\\ u_k(g_k(x)-b_k)=0,\ k=1,2,\cdots,l\\ x_j\geqslant 0,\ j=1,2,\cdots,n\\ u_k\geqslant 0,\ k=1,2,\cdots,l\end{cases}$$

我们利用定理 9.6.4 解下面的两个例子，一个是 IOLP，另一个是 IONLP.

例 9.6.1 (Hu, Wang, 2006b) 考虑下面 IOLP 例子.

$$\begin{aligned}&\max\nolimits_{\preceq} Z(x)=[0,10]x_1+[5,25]x_2\\&\text{s.t.}\ x\in X=\{x=(x_1,x_2)\,|\,x_1+3x_2\leqslant 10,x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0\}\end{aligned}\tag{9.6.7}$$

首先解下列问题

$$\begin{aligned}&\max m(Z)(x)=5x_1+15x_2\\&\text{s.t.}\ x\in X=\{x=(x_1,x_2)\,|\,x_1+3x_2\leqslant 10,x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0\}\end{aligned}\tag{9.6.8}$$

易得问题(9.6.8)的解

$$S_m=\{x=(x_1,x_2)\,|\,x_1+3x_2=10,x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0\}$$

再解下列问题

$$\begin{aligned}&\min w(Z)(x)=5x_1+10x_2\\&\text{s.t.}\ x\in S_m\end{aligned}\tag{9.6.9}$$

得到问题(9.6.9)的唯一解 $x=\left(0,\frac{10}{3}\right)$. 因此由定理 9.6.4 得到 $x=\left(0,\frac{10}{3}\right)$ 是问题(9.6.7)的解并且目标值为 $Z\left(0,\frac{10}{3}\right)=\left[\frac{5}{3},\frac{250}{3}\right]$. 如果在问题(9.6.7)中 $\preceq$ 被变为 $\preceq/_{t_0,t_1}$，那么可以得到 $S(\preceq/_{t_0,t_1})=\left\{\left(0,\frac{10}{3}\right)\right\}$. □

例 9.6.2 (Hu, Wang, 2006b) 考虑下列 IONLP 例子.

$$\max_{\preceq/_{t_0,t_1}} Z(x)=[5,9]x_1^2+[5,15]x_1x_2+[4,10]x_2^2$$
$$\text{s.t. } x\in X=\{x=(x_1,x_2)\mid x_1^2+x_2^2\leqslant 1, x_1\geqslant 0, x_2\geqslant 0\} \quad (9.6.10)$$

首先解下列问题

$$\max m(Z)(x)=\left(5+\frac{t_0+t_1}{2}\times 4\right)x_1^2+\left(5+\frac{t_0+t_1}{2}\times 10\right)x_1x_2+\left(4+\frac{t_0+t_1}{2}\times 6\right)x_2^2$$
$$\text{s.t. } x\in X=\{x=(x_1,x_2)\mid x_1^2+x_2^2\leqslant 1, x_1\geqslant 0, x_2\geqslant 0\} \quad (9.6.11)$$

从问题(9.6.11)中的 Kuhn-Tucher 条件,容易获得

$$S_m/_{t_0,t_1}=\begin{cases}\{(1,0)\}, & 0<t_0+t_1<1\\ \{(0,1),(1,0)\}, & t_0+t_1=1\\ \{(0,1)\}, & 1<t_0+t_1<2\end{cases}$$

再解下列问题

$$\min w(Z)(x)=\frac{t_1-t_0}{2}\times 4x_1^2+\frac{t_1-t_0}{2}\times 10x_1x_2+\frac{t_1-t_0}{2}\times 6x_2^2$$
$$\text{s.t. } x\in S_m/_{t_0,t_1} \quad (9.6.12)$$

得到
$$x=\begin{cases}(1,0), & 0<t_0+t_1\leqslant 1\\ (0,1), & 1<t_0+t_1<2\end{cases}$$

因此,由定理 9.6.4 获得问题(9.6.10)的解

$$S(\preceq/_{t_0,t_1})=\begin{cases}\{(1,0)\}, & 0<t_0+t_1\leqslant 1\\ \{(0,1)\}, & 1<t_0+t_1<2\end{cases}$$

特别地, $S(\preceq)=S(\preceq/_{0,0.5})=\{(1,0)\}$ 和 $S(\preceq/_{0.5,0.75})=S(\preceq/_{0.5,1})=\{(1,0)\}$. 目标值分别为 $Z(1,0)=[5,9]$ 和 $Z(0,1)=[4,10]$. □

Chanas, Kuchta (1996) 给出了一个方法求解下面关于半序关系 $\leqslant_{LR}/_{t_0,t_1}$ 的 IOLP,并且由此获得基于半序关系 $\leqslant_{LR}$ 和 $\leqslant_{Lm}$ 的解.

$$\max Z(x)=Z(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}C_ix_i$$
$$\text{s.t. } x\in X=\{x\in\mathbf{R}^n\mid Ax=b, x\geqslant\mathbf{0}\} \quad (9.6.13)$$

定理 9.6.5 (Hu, Wang, 2006b) 设 $0\leqslant t_0<t_1\leqslant 1$, 则为了确定 IOLP 问题(9.6.13)关于半序关系 $\leqslant_{LR}/_{t_0,t_1}$ 的解,只需找出下列双目标线性规划的所

有 Pareto 最优解.

$$\begin{aligned}&\max\sum_{i=1}^{n}[\underline{c_i}+t_0(\overline{c}_i-\underline{c_i})]x_i\\&\max\sum_{i=1}^{n}[\underline{c_i}+t_1(\overline{c}_i-\underline{c_i})]x_i\\&\text{s.t. } x\in X=\{x\in\mathbf{R}^n\,|\,Ax=b,x\geqslant\mathbf{0}\}\end{aligned}\tag{9.6.14}$$

定理 9.6.6 (Hu, Wang, 2006b) 设 $0\leqslant t_0<t_1\leqslant 1$，则为了确定 IOLP 问题(9.6.13)关于序关系 $\leqslant_{LR}/_{t_0,t_1}$ 的解，只需求解下列单目标参数线性规划问题.

$$\begin{aligned}&\max\sum_{i=1}^{n}[\underline{c_i}+t(\overline{c}_i-\underline{c_i})]x_i\\&\text{s.t. } x\in X=\{x\in\mathbf{R}^n\,|\,Ax=b,x\geqslant\mathbf{0}\};\ t\in(t_0,t_1)\end{aligned}\tag{9.6.15}$$

证明 设 $0\leqslant t_0<t_1\leqslant 1$. 我们知道，为了确定问题(9.6.14)的所有 Pareto 最优解，只需找出下列单目标参数线性规划问题的所有最优解.

$$\begin{aligned}&\max\{\lambda\sum_{i=1}^{n}[\underline{c_i}+t_0(\overline{c}_i-\underline{c_i})]x_i+(1-\lambda)\sum_{i=1}^{n}[\underline{c_i}+t_1(\overline{c}_i-\underline{c_i})]x_i\}\\&\text{s.t. } x\in X,\lambda\in(0,1)\end{aligned}$$

又 $\forall\lambda,t_0,t_1\in\mathbf{R}$，下列等式成立.

$$\begin{aligned}&\lambda\sum_{i=1}^{n}[\underline{c_i}+t_0(\overline{c}_i-\underline{c_i})]x_i+(1-\lambda)\sum_{i=1}^{n}[\underline{c_i}+t_1(\overline{c}_i-\underline{c_i})]x_i\\&=\sum_{i=1}^{n}[\underline{c_i}+(t_1-\lambda(t_1-t_0))(\overline{c}_i-\underline{c_i})]x_i\end{aligned}$$

由于 λ 取(0, 1)内所有值当且仅当 $t=t_1-\lambda(t_1-t_0)$ 取 (t_0,t_1) 内所有值，从而定理成立. □

例 9.6.3 (Hu, Wang, 2006b)考虑下面的问题

$$\max Z(x)=[-20,50]x_1+[0,10]x_2\tag{9.6.16}$$

$$\text{s.t. } x\in X=\begin{cases}10x_1+60x_2\leqslant 1080\\10x_1+20x_2\leqslant 400\\10x_1+10x_2\leqslant 240\\30x_1+10x_2\leqslant 420\\40x_1+10x_2\leqslant 520\\x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

利用问题(9.6.15)得

$$\max\ (-20+70t)x_1+10t\cdot x_2,\ x\in X$$

对于 $t\in(0,1)$ 解上面的问题获得(以下关于 t 的近似计算保留两位小数):

当 $t\in(0,0.29]$ 时　　$x^1=(0,18)$

当 $t=0.3$ 时　　$x^2=(6,17)$

当 $t\in[0.3,0.33]$ 时　　$x^3=(8,16)$

当 $t\in[0.33,0.5)$ 时　　$x^4=(9,15)$

当 $t=0.5$ 时　　$x^4=(9,15)$, $x^5=(10,12)$

当 $t\in(0.5,0.66]$ 时　　$x^5=(10,12)$

当 $t\in[0.66,1)$ 时　　$x^6=(13,0)$.

由此得到 $S(\leqslant_{LR})=\{x^1,x^2,x^3,x^4,x^5,x^6\}$, $S(\leqslant_{Lm})=\{x^1,x^2,x^3,x^4\}$ 和 $S(\leqslant/_{0.5,1})=\{x^5,x^6\}$ 等.

并且对应的目标值分别为

$$Z(x^1)=[0,180]=<90,90>$$
$$Z(x^2)=[-120,470]=<175,295>$$
$$Z(x^3)=[-160,560]=<200,360>$$
$$Z(x^4)=[-180,600]=<210,390>$$
$$Z(x^5)=[-200,620]=<210,410>$$
$$Z(x^6)=[-260,650]=<195,455>.$$

□

例 9.6.4　(Hu, Wang, 2006b)考虑下面的问题

$$\max Z(x)=[15,17]x_1+[15,20]x_2+[10,30]x_3$$

$$\text{s.t. } x\in X'=\begin{cases}4.6x_1+7.6x_2+3.6x_3\leqslant 21\\5.8x_1+3.6x_2+7.8x_3\leqslant 31\\7.5x_1+6.5x_2+6.8x_3\leqslant 41\\x_i\geqslant 0,\ i=1,2,3.\end{cases}$$

与例 9.6.3 同理,利用定理 9.6.6 得到 $S(\leqslant_{LR})=S(\leqslant_{Lm})=\{x^a,x^b,x^c\}$. 其中

$$x^a=(0,\ 1.13,\ 3.45),\ x^b=(3.48,\ 0,\ 1.39),\ x^c=(4.57,\ 0,\ 0)$$

并且目标值分别为

$$Z(x^a)=[51.4,126.2]=<88.8,37.4>$$
$$Z(x^b)=[66.1,100.8]=<83.5,17.4>$$
$$Z(x^c)=[68.5,77.6]=<73.1,4.6>.$$

□

§9.7　含 Fuzzy 系数的线性规划

具有 Fuzzy 系数的线性规划模型称为可能性线性规划模型,Fuzzy 系数可

以出现在约束条件的系数中，也可以出现在目标函数的系数中.

9.7.1　约束条件系数为 Fuzzy 数的 Fuzzy 线性规划

约束条件系数为 Fuzzy 数的 Fuzzy 线性规划问题的数学模型为

$$\max \begin{cases} z_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n \\ z_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ z_l = c_{l1}x_1 + c_{l2}x_2 + \cdots + c_{ln}x_n \end{cases} \tag{9.7.1}$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} \tilde{a}_{11}x_1 + \tilde{a}_{12}x_2 + \cdots + \tilde{a}_{1n}x_n \leqslant \tilde{b}_1 \\ \tilde{a}_{21}x_1 + \tilde{a}_{22}x_2 + \cdots + \tilde{a}_{2n}x_n \leqslant \tilde{b}_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \tilde{a}_{m1}x_1 + \tilde{a}_{m2}x_2 + \cdots + \tilde{a}_{mn}x_n \leqslant \tilde{b}_m \\ x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0 \end{cases}$$

式中，$\tilde{a}_{ij}, \tilde{b}_i \in \widetilde{\mathbf{R}}$, $i=1,2,\cdots,m$, $j=1,2,\cdots,n$, $\widetilde{\mathbf{R}}$ 为 $\mathbf{R}$ 上的 Fuzzy 数集，参见 §2.6.

若记 $C=(c_{kj})_{r\times n}$, $\widetilde{A}=(\tilde{a}_{ij})_{m\times n}$, $z=(z_1,z_2,\cdots,z_l)'$, $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$, $\tilde{b}=(\tilde{b}_1,\tilde{b}_2,\cdots,\tilde{b}_m)'$. 则式(9.7.1)可以简记为

$$\max \quad z = Cx$$
$$\text{s. t.} \quad \begin{cases} \widetilde{A}x \leqslant \tilde{b} \\ x \geqslant \mathbf{0} \end{cases} \tag{9.7.2}$$

设 $\tilde{a}_{ij}=(a_{ij}, \underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij})_{LR} \in \widetilde{\mathbf{R}}_{LR}$, $\tilde{b}_i=(b_i, \underline{b}_i, \overline{b}_i)_{LR} \in \widetilde{\mathbf{R}}_{LR}$，则由 LR 型 Fuzzy 数的运算(参见 §2.6)，并注意到 $x_j \geqslant 0, j=1,2,\cdots,n$，于是 $\sum\limits_{j=1}^{n}\tilde{a}_{ij}$ 也是 LR 型 Fuzzy 数，且有

$$\sum_{j=1}^{n}\tilde{a}_{ij}x_j = \left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j, \sum_{j=1}^{n}\underline{a}_{ij}x_j, \sum_{j=1}^{n}\overline{a}_{ij}x_j\right)_{LR}$$

下面考虑 LR 型 Fuzzy 数的序关系.

设 $A=(a,\alpha,\beta), B=(b,\gamma,\delta) \in \widetilde{\mathbf{R}}_{LR}$，则定义

$$A \leqslant_T B \Leftrightarrow a \leqslant b, \alpha \geqslant \gamma, \beta \leqslant \delta$$

显然 $\leqslant_T$ 是 $\widetilde{\mathbf{R}}_{LR}$ 上的偏序关系. 如果考虑序关系 $\leqslant_T$，式(9.7.1)的约束条件可以表示为：等价的三个式子

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j \leqslant b_i, \quad \sum_{j=1}^{n}\underline{a}_{ij}x_j \geqslant \underline{b}_i, \quad \sum_{j=1}^{n}\overline{a}_{ij}x_j \leqslant \overline{b}_i$$

这样，约束条件系数为 LR 型 Fuzzy 数的 Fuzzy 线性规划问题(9.7.1)，可以转化为下述有 $3m$ 个约束条件的多目标普通线性规划问题

$$\max z_k = \sum_{j=1}^{n} c_{kj}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{kj} \leqslant b_i \\ \sum_{j=1}^{n} \underline{a}_{kj} \geqslant \underline{b}_i \\ \sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{kj} \leqslant \overline{b}_i \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, \cdots, x_n \geqslant 0 \end{cases}$$

式中，$k=1,2,\cdots,l$，$i=1,2,\cdots,m$.

例 9.7.1 货物甲每包重“6 公斤可能多一点”(用 $\tilde{6}=(6,0,1)_{LR}$ 表示)，价值 20 元;货物乙每包重“大约 2 公斤”(用 $\tilde{2}=(2,1,1)_{LR}$ 表示)，价值 10 元. 某人外出希望一次最多拿“21 公斤左右”(用 $\widetilde{21}=(21,1,5)_{LR}$)，并且希望拿的货物总价值最大.

设此人拿货物甲 x_1 包，货物乙 x_2 包. 则问题归结为解如下约束有 Fuzzy 系数的线性规划问题

$$\max z = 20x_1 + 10x_2$$

$$\text{s.t. } \tilde{6}x_1 + \tilde{2}x_2 \leqslant \widetilde{21},\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0$$

可以演变为解普通线性规划问题

$$\max z = 20x_1 + 10x_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 6x_1 + 2x_2 \leqslant 21 \\ x_2 \geqslant 1 \\ x_1 + x_2 \leqslant 5 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

最佳点为 $x_1^* = \frac{11}{4}$，$x_2^* = \frac{9}{4}$，最优值 $z^* = \frac{310}{4} = 77.5$.

如果允许将货物包拆开，则此人可以携带货物甲 $2\frac{3}{4}$ 包，货物乙 $2\frac{1}{4}$ 包，总价值达 77.5 元. 如果货物必须拿整包，则需限制 x_1，x_2 取整数，亦即用整数

规划方法求解. 结果应携带货物甲 2 包，货物乙 3 包(或货物甲 3 包，货物乙 1 包)，总价值 70 元. □

9.7.2 目标函数系数为 Fuzzy 数的 Fuzzy 线性规划

这类规划问题可以写成下面的一般形式

$$\max Z(x)=Z(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\tilde{c}_i x_i \qquad (9.7.3)$$
$$\text{s.t. } x\in X\subset \mathbf{R}^n$$

其中 X 是 x 的可行域，系数 $\tilde{c}_i\in\widetilde{\mathbf{R}}\ (i=1,2,\cdots,n)$. 问题(9.7.1)被简称为 Fuzzy 目标线性规划(linear programming with fuzzy objective function)或 FOLP.

我们还可以讨论更一般的一类目标函数中含 Fuzzy 系数的非线性规划问题.

$$\max Z(x)=Z(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{m}\tilde{c}_i f_i(x) \qquad (9.7.4)$$
$$\text{s.t. } x\in X\subset \mathbf{R}^n$$

其中 $f_i(x)(i=1,2,\cdots,m)$ 是 $\mathbf{R}$ 上已知的 n 元非负函数. 问题(9.7.2)被简称为 Fuzzy 目标非线性规划或 FONLP. 显然问题(9.7.3)是问题(9.7.4)的特例.

本节只讨论问题(9.7.4)的代表性方法.

假定 $\tilde{c}_i=(c_i,\alpha_i,\beta_i)_{LR}\in\widetilde{\mathbf{R}}_{LR}\ (i=1,2,\cdots,m)$，即 LR 型 Fuzzy 数，那么 $\sum_{i=1}^{m}\tilde{c}_i f_i(x)$ 也是 LR 型 Fuzzy 数，并且

$$\sum_{i=1}^{m}\tilde{c}_i f_i(x)=\Big(\sum_{i=1}^{m}c_i f_i(x),\sum_{i=1}^{m}\alpha_i f_i(x),\sum_{i=1}^{m}\beta_i f_i(x)\Big)_{LR}$$
$$\max_{x\in X}Z(x)=\max_{x\in X}\Big(\sum_{i=1}^{m}c_i f_i(x),\sum_{i=1}^{m}\alpha_i f_i(x),\sum_{i=1}^{m}\beta_i f_i(x)\Big)_{LR}$$

按序关系 $\leqslant_T$，问题(9.7.4)可以转换为具有 3 个目标函数的经典线性规划.

$$\max Z=\sum_{i=1}^{m}c_i f_i(x)$$
$$\overline{Z}=\sum_{i=1}^{m}\beta_i f_i(x)$$

$$\min \underline{Z} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(x)$$

$$\text{s.t. } x \in X \subset \mathbf{R}^n \tag{9.7.5}$$

然后利用经典多目标线性规划的方法求解.

这里定义的排序准则 $a \leqslant b, \alpha \geqslant \gamma, \beta \leqslant \delta$ 是一个保守的准则,故问题(9.7.5)是问题(9.7.4)的不良转换结果. 下面改进其序关系.

设 $A=(a,\alpha,\beta)_{LR}$, $B=(b,\gamma,\delta)_{LR} \in \widetilde{\mathbf{R}}_{LR}$, 则定义

$$A \leqslant_L B \Leftrightarrow a \leqslant b, \quad a-\alpha \leqslant b-\gamma, \quad a+\beta \leqslant b+\delta$$

显然 $\leqslant_L$ 也是 $\widetilde{\mathbf{R}}_{LR}$ 上的偏序关系,并且 $A \leqslant_T B \Rightarrow A \leqslant_L B$.

于是按该偏序关系问题(9.7.2)可以转换为

$$\max Z^L = \sum_{i=1}^{m} (c_i - \alpha_i) f_i(x)$$

$$Z = \sum_{i=1}^{m} c_i f_i(x) \tag{9.7.6}$$

$$Z^R = \sum_{i=1}^{m} (c_i + \beta_i) f_i(x)$$

$$\text{s.t. } x \in X \subset \mathbf{R}^n$$

然后利用经典多目标线性规划的方法求解.

例 9.7.2 (张曾科, 1997) 考虑下面的 Fuzzy 目标线性规划问题

$$\begin{aligned} \max Z &= \widetilde{20} x_1 + \widetilde{10} x_2 \\ \text{s.t. } & 6x_1 + 2x_2 \leqslant 21 \\ & x_1, x_2 \geqslant 0 \end{aligned} \tag{9.7.7}$$

其中 $\widetilde{20}=(20,3,4)_{LR}$, $\widetilde{10}=(10,2,1)_{LR}$, 在本例中 $L(x)=R(x)=\max\{0, 1-|x|\}$.

根据式(9.7.5),原问题可以被转换为以下非模糊的多目标线性规划问题.

$$\begin{aligned} \max Z &= 20x_1 + 10x_2 \\ \min \underline{Z} &= 3x_1 + 2x_2 \\ \max \overline{Z} &= 4x_1 + x_2 \\ \text{s.t. } & 6x_1 + 2x_2 \leqslant 21 \\ & x_1, x_2 \geqslant 0 \end{aligned} \tag{9.7.8}$$

采用多目标线性规划方法得

$$x_T^* = (0.488, 9.035), \quad Z_T^* = (100.11, 19.534, 10.987)_{LR} = \langle 80.576, 100.11, 111.097 \rangle.$$

现根据式(9.7.6),将原问题转换为下面的非模糊的多目标线性规划问题

$$\begin{aligned} \max Z^L &= 17x_1 + 8x_2 \\ Z &= 20x_1 + 10x_2 \\ Z^R &= 24x_1 + 11x_2 \\ \text{s.t. } & 6x_1 + 2x_2 \leqslant 21 \\ & x_1, x_2 \geqslant 0 \end{aligned} \tag{9.7.9}$$

采用多目标线性规划技术可以获得其最优解为

$$x_L^* = (0, 10.5), \quad Z_L^* = (105, 21, 10.5)_{LR} = \langle 84, 105, 115.5 \rangle.$$

Fuzzy 目标值 Z_T^*, Z_L^* 的大小比较如图 9.7.1 所示.

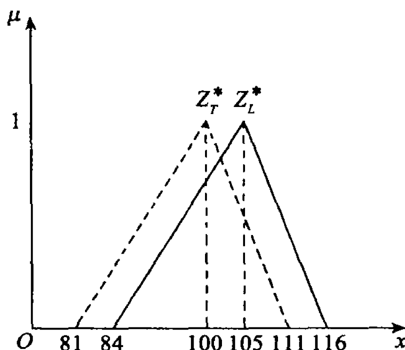


图 9.7.1 最优解的比较

图 9.7.1 清楚表明,$Z_T^* <_L Z_L^*$,即 $Z_T^* \leqslant_L Z_L^*$,$Z_T^* \neq Z_L^*$(显然 Z_T^* 与 Z_L^* 没有序关系 $\leqslant_T$),故模型(9.7.5)在例 9.7.2 中未能产生原问题的有效解,这显然是不能令人满意的. □

§ 9.8 Fuzzy 动态规划

有些问题的决策过程可以分为几个彼此关联的阶段,每个阶段都有若干方案可供选择,决策者的任务是在每个阶段选择一个合适的方案,使整个决策过程取得最好的结果,这样的决策过程称为动态规划. 下面主要讨论在上述决策过程中决策者在各个阶段选取方案时受到 Fuzzy 约束的情形,即 Fuzzy 动态规划

(fuzzy dynamic programming). 假设:

(1)在整个决策过程中,系统可以处于 l 种不同的状态,即有状态集

$$E=\{e_1,e_2,\cdots,e_l\} \tag{9.8.1}$$

(2)在整个决策过程中,系统需要接受外界输入(受控),以改变现有状态,达到预定的目标,从而有输入集

$$U=\{u_1,u_2,\cdots,u_m\} \tag{9.8.2}$$

(3)整个决策过程在 $[0,T]$ 时间内完成,现在其中插入 $n-1$ 个时刻 $0=t_0<t_1<\cdots<t_{n-1}<t_n=T$ 将 $[0,T]$ 分为 n 个时段 $(t_{k-1},t_k](k=1,2,\cdots,n)$. 并设在第 k 时段 $(t_{k-1},t_k]$, 系统输入 $u(t_k)\in U$.

(4)设系统在 $k-1$ 时段 $(t_{k-2},t_{k-1}]$ 末处于状态 $e(t_{k-1})$, 在第 k 时段 $(t_{k-1},t_k]$ 内接受输入 $u(t_k)$, 则第 k 时段末系统所处的状态 $e(t_k)$ 仅与 $e(t_{k-1})$ 和 $u(t_k)$ 有关,即

$$e(t_k)=f(e(t_{k-1}),u(t_k)),\ k=1,2,\cdots,n \tag{9.8.3}$$

并假设这样的状态转移还与系统处于的时段无关,而仅受一个转移矩阵 $S(u)$ 的支配,且

$$S(u)=\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \cdots & S_{1m} \\ S_{21} & S_{22} & \cdots & S_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ S_{l1} & S_{l2} & \cdots & S_{lm} \end{bmatrix} \tag{9.8.4}$$

其中 $S_{ij}\in E$, 且 S_{ij} 的意义是,若系统现处状态 $e_i\in E$, 现输入 $u_j\in U$, 则系统将转移至 S_{ij}, 即

$$S_{ij}=f(e_i,u_j)\ (i=1,2,\cdots,l;j=1,2,\cdots,m) \tag{9.8.5}$$

以下假设系统的初始状态为 $e(t_0)$, 要求达到的目的(即系统在 $t_n=T$ 时刻所处的状态)是 E 上的 Fuzzy 集 $B_n\in\mathscr{F}(E)$. 又设在时段 $(t_{k-1},t_k]$, 系统采用输入 u_j 时受到 U 上的 Fuzzy 约束 $C_k\in\mathscr{F}(U)$. 采用数学方法将 Fuzzy 动态规划陈述如下:

给定 $e(t_0)$, 记

$$U^*=\{u\,|\,u=(u(t_1),u(t_2),\cdots,u(t_n),e(t_n))\} \tag{9.8.6}$$

满足

$e(t_1)=f(e(t_0),u(t_1))$, $e(t_2)=f(e(t_1),u(t_2))$, $\cdots$, $e(t_n)=f(e(t_{n-1}),u(t_n))$

令 $D\in\mathscr{F}(U^*)$, 且若 $u=(u(t_1),u(t_2),\cdots,u(t_n),e(t_n))$, 则

$$D(u)=C_1(u(t_1))\wedge C_2(u(t_2))\wedge\cdots\wedge C_n(u(t_n))\wedge B_n(e(t_n))$$

寻找 $u^*\in U^*$, 使得

$$D(u^*) = \bigvee_{u \in U^*} D(u) \tag{9.8.7}$$

的问题称为 Fuzzy 动态规划，并称 $u^* = (u^*(t_1), u^*(t_2), \cdots, u^*(t_n), e^*(t_n))$ 为该 Fuzzy 动态规划问题的最优解.

下面给出求 Fuzzy 动态规划问题最优解的一种算法.

给定状态矩阵 $S(u)$，$B_n \in \mathscr{F}(E)$和 Fuzzy 约束 $C_k \in \mathscr{F}(U)$. 分别对 $k=n, n-1, \cdots, 1$，对每个 $e_i \in E$，解优化问题

$$\begin{aligned} \max \quad & C_k(u_j) \wedge B_k(f(e_i, u_j)) \\ \text{s.t.} \quad & u_j \in U \end{aligned} \tag{9.8.8}$$

设 $u \in U$ 是其解，则记这个 u 为 $u_k(i)$，又记

$$B_{k-1}(e_i) = C_k(u_k(i)) \wedge B_k(f(e_i, u_k(i))) = \mu_{k-1,i}$$

可得表 9.8.1.

表 9.8.1

$e(t_{k-1})$	e_1	e_2	$\cdots$	e_l
$B_{k-1}(e_i)$	$\mu_{k-1,1}$	$\mu_{k-1,2}$	$\cdots$	$\mu_{k-1,l}$
$u_k(i)$	$u_k(1)$	$u_k(2)$	$\cdots$	$u_k(l)$

现给定初始状态 $e(t_0) = e_{i_0}$，计算出在第一时段末达到 Fuzzy 目标 B_1 的最佳输入 $u_1(i_0)$，由此得

$$e(t_1) = f(e_{i_0}, u_1(i_0))$$

又设 $e(t_1) = e_{i_1}$，同理得到

$$e(t_2) = f(e_{i_1}, u_2(i_1)) \triangleq e_{i_2}$$

继续以上步骤直至 $k=n$，$e(t_n) = f(e_{i_{n-1}}, u_n(i_{n-1})) \triangleq e_{i_n}$

据此，即可得 $u^* \in U^*$，且

$$u^* = (u_1(i_0), u_2(i_1), \cdots, u_n(i_{n-1}), e(t_n)).$$

例 9.8.1　设有某系统，共可处于 4 种状态和 5 种输入形式，即

$$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}, \quad U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$$

共有 4 个时段，各时段输入所受 Fuzzy 约束如表 9.8.2 所示.

表 9.8.2

输　入	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
C_1	0.1	0.2	0.3	0.6	1
C_2	0.4	1	0.4	0.3	0.2
C_3	0.2	0.3	0.9	1	0.3
C_4	0.5	1	0.4	0.3	0.1

表中 C_i 行 u_j 列交叉处的数字表示 $C_i(u_j)$，又最终达到的目标 $B_4 \in \mathscr{F}(E)$，且

$$B_4 = \frac{0.2}{e_1} + \frac{0.5}{e_2} + \frac{0.8}{e_3} + \frac{1}{e_4}$$

状态转移矩阵为

$$S(u) = \begin{bmatrix} e_2 & e_3 & e_1 & e_4 & e_1 \\ e_4 & e_4 & e_3 & e_2 & e_1 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_3 \\ e_3 & e_2 & e_3 & e_4 & e_1 \end{bmatrix}$$

由上面所给的算法可得

$$\begin{aligned} B_3(e_1) &= \bigvee_{i=1}^{5} (C_4(u_i) \wedge B_4(f(e_1, u_i))) \\ &= (0.5 \wedge B_4(e_2)) \vee (1 \wedge B_4(e_3)) \vee (0.4 \wedge B_4(e_1)) \vee \\ &\quad (0.3 \wedge B_4(e_4)) \vee (0.1 \wedge B_4(e_1)) \\ &= (0.5 \wedge 0.5) \vee (1 \wedge 0.8) \vee (0.4 \wedge 0.2) \vee \\ &\quad (0.3 \wedge 1) \vee (0.1 \wedge 0.2) \\ &= 0.8 = C_4(u_2) \wedge B_4(f(e_1, u_2)) \end{aligned}$$

即 $B_3(e_1)=0.8$，且当第 3 时段末系统处于状态 e_1 时，第 4 时段内应输入 u_2. 类似地，$B_3(e_2)=1$，$B_3(e_3)=B_3(e_4)=0.5$ 及当第 3 时段末系统处于状态 e_2, e_3, e_4 时，对应地在第 4 时段内应取输入 u_2, u_2 及 u_1, u_2. 如此继续下去，全部结果列入表 9.8.3.

现取定 $e(t_0)$. 例如令 $e(t_0)=e_3$，则由表 9.8.3 查出第 1 时段应取输入 u_5；由 $S(u)$ 得 $e(t_1)=f(e_3, u_5)=e_3$，由表 9.8.3 查出 $u_2(3)=u_2$；由 $S(u)$ 得 $e(t_2)=f(e_3, u_2)=e_2$，由表 9.8.3 查出 $u_3(2)=u_4$；由 $S(u)$ 得 $e(t_3)=f(e_2, u_4)=e_2$，且 $u_4(2)=u_2$；最后由 $S(u)$ 得 $e(t_4)=f(e_2, u_2)=e_4$. 从而获得 $u \in U^*$，且

表 9.8.3

时 段	$e(t_n)$	e_1	e_2	e_3	e_4
4	$B_3(e_i)$	0.8	1	0.5	0.5
	$u_4(i)$	u_2	u_2	u_2	u_1, u_2
3	$B_2(e_i)$	0.8	1	0.5	0.5
	$u_3(i)$	u_3	u_4	u_3, u_4	u_3, u_4
2	$B_1(e_i)$	0.5	0.5	1	1
	$u_2(i)$	u_2	u_2	u_2	u_2
1	$B_0(e_i)$	0.6	0.5	1	0.6
	$u_1(i)$	u_4	u_4, u_5	u_5	u_4

$$u=(u_5, u_2, u_4, u_2, e_4)$$

是最优解 $D(u)=1 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 1=1$

最优转移过程是

$$e_3 \xrightarrow{u_5} e_3 \xrightarrow{u_2} e_2 \xrightarrow{u_4} e_2 \xrightarrow{u_2} e_4$$

若取 $e(t_0)=e_1$，得最优解为

$$u=(u_4, u_2, u_4, u_2, e_4)$$

$$D(u)=0.6 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 1=0.6$$

最优转移过程是

$$e_1 \xrightarrow{u_4} e_4 \xrightarrow{u_2} e_2 \xrightarrow{u_4} e_2 \xrightarrow{u_2} e_4.$$ □

§9.9 Fuzzy 关系不等式约束下的格化线性规划

根据§7.5 中有关 Fuzzy 关系不等式方程的结果，我们可以考虑在某种限制下的格化线性规划问题(Wang, Zhang, Sanchez, 1991). 本节所用的概念与符号参见§7.5.

定义 9.9.1 设 $R=(r_{ij}) \in [0,1]^{m\times n}$, $C'=(c_1, c_2, \cdots, c_n)'$, $X=(x_1, x_2, \cdots, x_n)' \in [0,1]^{n\times 1}$, $S=(s_i)$, $T=(t_i) \in [0,1]^{m\times 1}$，则

$$\begin{aligned} \max \quad & f=C \circ X \\ \text{s.t.} \quad & S \leqslant R \circ X \leqslant T \end{aligned} \tag{9.9.1}$$

称为在 Fuzzy 关系不等式约束下的格化线性规划(latticized linear programming with fuzzy relation inequalities constrains). 也可以考虑相反的情况

$$\begin{aligned} \min \quad & f = C \circ X \\ \text{s. t.} \quad & S \leqslant R \circ X \leqslant T \end{aligned} \tag{9.9.2}$$

定理 9.9.1 Fuzzy 关系不等式约束下的格化线性规划(9.9.1)的解就是 Fuzzy 关系方程 $S \leqslant R \circ X \leqslant T$ 的最大解 $\overline{X} = R' \alpha S = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \cdots, \overline{x}_n)'$.

证明 只需注意 $X \leqslant Y \Rightarrow C \circ X \leqslant C \circ Y$. □

$S \leqslant R \circ X \leqslant T$ 的特征矩阵仍用 $D = (d_{ij})_{m \times n}$ 表示，并且

$$d_{ij} = 1 \Leftrightarrow r_{ij} \geqslant s_i \geqslant \overline{x}_j, \forall i \in \{1,2,\cdots,m\}, j \in \{1,2,\cdots,n\}.$$

于是可以得到 D 的 Q 路径集 $Q(D)$ 与保守路径集 $Q_c(D)$，$\forall q = (q(1), q(2), \cdots, q(m)) \in Q(D)$，得到 $S \leqslant R \circ X \leqslant T$ 的一个拟极小解 $X_q = (x_1^{(q)}, x_2^{(q)}, \cdots, x_n^{(q)})'$，且 $x_j^{(q)} = \bigvee_{j=1}^{m} \{s_i \mid d_{iq(i)} = 1\}$，$j = 1,2,\cdots,n$. 于是很容易得到以下定理.

定理 9.9.2 $\min f = \wedge \{f(X_q) \mid q \in Q_c(D)\}$，Fuzzy 关系方程 $S \leqslant R \circ X \leqslant T$ 中对应目标最小值的极小解 X_q 就是 Fuzzy 关系不等式约束下的线性规划(9.9.2)的解.

是否可能有非极小解是(9.9.2)的解呢？下面的讨论回答了这个问题.

对于形如(9.9.2)的线性规划问题，不失一般性，可以假设

$$c_1 \leqslant c_2 \leqslant \cdots \leqslant c_n$$

令 $h(i,j) = s_i \wedge c_j$，$i = 1,2,\cdots,m$；$j = 1,2,\cdots,n$.

引理 9.9.1 设 q 为 D 的一条路径，记

$$f(q) = f(X_q) = C \circ X_q$$

则

$$f(q) = \bigvee_{j=1}^{n} (\vee \{s_i \wedge c_j \mid q(i) = j\}).$$

证明 $f(q) = \bigvee_{j=1}^{n} (c_j \wedge x_j^{(q)}) = \bigvee_{j=1}^{n} (c_j \wedge (\vee \{s_i \mid q(i) = j\}))$

$$= \bigvee_{j=1}^{n} (\vee \{s_i \wedge c_j \mid q(i) = j\}).$$ □

引理 9.9.2 $\forall p, q \in Q(D)$，有

$$(\forall i)(p(i) \leqslant q(i)) \Rightarrow f(p) \leqslant f(q)$$

根据上述两个引理立即得到下面的定理.

定理 9.9.3 给定 $Q(D)$ 中的一条路径 q，令

$$q(i) = \min_j \{j \mid d_{ij} = 1\}$$

则解 X_q 就是线性规划问题(9.9.2)的解.

例 9.9.1 考虑在 Fuzzy 关系不等式约束下的线性规划问题

$$\max f = C \circ X = (0.1 \wedge x_1) \vee (0.4 \wedge x_2) \vee (0.6 \wedge x_3) \vee (0.8 \wedge x_4)$$

s. t.

$$\begin{bmatrix}0.9\\0.7\\0.6\\0.3\\0.2\end{bmatrix} \leqslant \begin{bmatrix}0.8 & 0.9 & 0 & 1\\1 & 0.7 & 0.9 & 0.5\\0.5 & 0.6 & 0.6 & 0.7\\0.3 & 0.2 & 0.2 & 0.3\\0.3 & 0.4 & 0.1 & 0\end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix} \leqslant \begin{bmatrix}0.9\\0.8\\0.7\\0.3\\0.4\end{bmatrix}$$

该方程的最大解为

$$\overline{X} = (0.8, 1, 0.8, 0.9)'$$

则目标的最大值为 $f(\overline{X}) = E \circ \overline{X} = 0.8.$

若考虑目标

$$\min f = C \circ X = (0.1 \wedge x_1) \vee (0.4 \wedge x_2) \vee (0.6 \wedge x_3) \vee (0.8 \wedge x_4)$$

特征矩阵为

$$D = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 1\\1 & 1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1 & 1\\1 & 0 & 0 & 1\\1 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

这时由例 7.5.2 得 6 条保守路径对应的不等式方程的极小解为

$$\underline{X}_1 = \begin{bmatrix}0.3\\0.9\\0\\0\end{bmatrix}, \underline{X}_2 = \begin{bmatrix}0\\0.9\\0\\0.3\end{bmatrix}, \underline{X}_3 = \begin{bmatrix}0.7\\0\\0\\0.9\end{bmatrix}, \underline{X}_4 = \begin{bmatrix}0\\0.7\\0\\0.9\end{bmatrix}, \underline{X}_5 = \begin{bmatrix}0.2\\0\\0.7\\0.9\end{bmatrix}, \underline{X}_6 = \begin{bmatrix}0\\0.2\\0.7\\0.9\end{bmatrix}$$

则对应目标函数的值分别为 0.4,0.4,0.8,0.8,0.8,0.8,于是由定理 9.9.3 知目标的最小值为 0.4.

由定理 9.9.3 得到的路径 $q=(2,1,2,1,1) \in Q(D)$ 不是保守路径,即 $q \bar{\in} Q_c(D)$,对应的拟极小解 $(0.7,0.9,0,0)'$ 也是线性规划问题(9.9.2)的解. □

最优化问题一直是模糊理论领域应用最为广泛的内容之一. 自从 Bellman 与 Zadeh(1970)对这一研究做出了开创性的工作以来,国内外许多学者在相关的理论研究及应用中取得了丰富的成果.

这一领域的研究主要集中在一般意义下的理论研究(Rao, Sundaraju, et al, 1992;Wang and Wang, 1997),Fuzzy 线性规划(Mahdavi-Amiri, Nasseri, 2007; Sakawa, Sawada et al., 1995; Sakawa, Kato, 1997; Soyster, 1979; Wang and Wang, 1997;Zimmermann, 1978),多目标 Fuzzy 规划(El-Hadykassem, 1998; Hulsurkar, Biswal, et al., 1997; Li and Lai, 2000; Wang and

Wang, 1997;李荣浚, 2002),Fuzzy 动态规划(Abo-Sinna, 2004; Kacprzyk, Esogbue, 1996; Iwamoto, 2001),区间目标线性规划(Chanas and Kuchta, 1996a,b; Das, Goswami et al. , 1999; Hu and Wang, 2006a,b; Ishibuchi and Tanaka,1990; Oliveira, Antunes, 2007; Wu, 2009),Fuzzy 目标线性规划(Baky, 2009; Buckley, 1988, 1989; Chanas and Kuchta, 1996b; Jiménez, Bilbao, 2009; Li, Lee, 1990; Liang, 2006; Luhandjula, 1986, 1987a,b; Maeda, 2001; Maleki, Tata, et al. , 2000; Ramik, Rimanek, 1985; Rommelfanger, Hanscheck et al. , 1989; Tanaka, Asai, 1984; Tanaka, Ishibuchi, et, al. , 1984),带 Fuzzy 关系方程约束的优化问题(Fang, Li, 1999; Guu, Wu, 2010; Lin, Wu, et al. , 2009; Loetamonphong, Fang, 2001; Loetamonphong, Fang, et al. , 2002; Lu, Fang, 2001; Wang, 1995; Wu, Guu, 2005; Wu, Guu, et al. , 2008)以及 Fuzzy 规划理论的应用(Lee, Wen, 1997;Nakahara, 1998; Slowinski, 1986; Zimmermann, 1978, 2001)等.

第 10 章　Fuzzy 语言与 Fuzzy 逻辑

逻辑学是研究人们思维形式和思维规律的科学. 数理逻辑是数学的基础学科,初始时只是用数学方法去研究形式逻辑中的某些问题,20 世纪以来发展为使用公理方法构造出命题演算和谓词演算系统,并在开关电路设计,特别是电子计算机的发展中得到了广泛的应用而成为计算机科学与自动控制理论的基础. 因为数学中的命题都只有“真”、“假”之分,不存在任何中间状态,这使二值逻辑理论构成经典数学的支柱. 由于思维本身具有模糊性,因此在研究复杂的大系统(如航天系统、生态系统、人文系统、社会经济系统等)的过程中,有必要将二值逻辑推广为多值逻辑、Fuzzy 逻辑. 本章首先介绍了 Fuzzy 变量与语言变量的概念,然后讨论了 Fuzzy 语言的算子与文法,Fuzzy 命题、Fuzzy 逻辑公式及其化简. 最后讨论真值取 Fuzzy 值的语言值逻辑等.

§ 10.1　Fuzzy 变量

定义 10.1.1　(Zadeh, 1973a) 一个 Fuzzy 变量(fuzzy variable)由一个三元组

$$(X,U,R(X)) \tag{10.1.1}$$

表示. 其中:

(1) X 是变量名;

(2) U 是论域;

(3) $R(X)$ 是 U 上的一个 Fuzzy 集,也可以记为$[X]$, $R(X)(u)$ 表示 u 的由 X 赋予的 Fuzzy 约束.

例 10.1.1　(Zadeh, 1973a) 考虑 Fuzzy 变量 X 为“预算”,论域 $U=[0,\infty]$ 并且 R(预算)定义如下(如图 10.1.1 所示)

$$R\,(\text{预算})=\int_0^{1000} 1/u+\int_{1000}^{+\infty}\left[1+\left(\frac{u-1000}{200}\right)^2\right]^{-1}\Big/u$$

R(预算)(1100)=0.80. □

定义 10.1.2　(Zadeh, 1973a) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 分别是 $U_1,U_2,\cdots,U_n$ 的

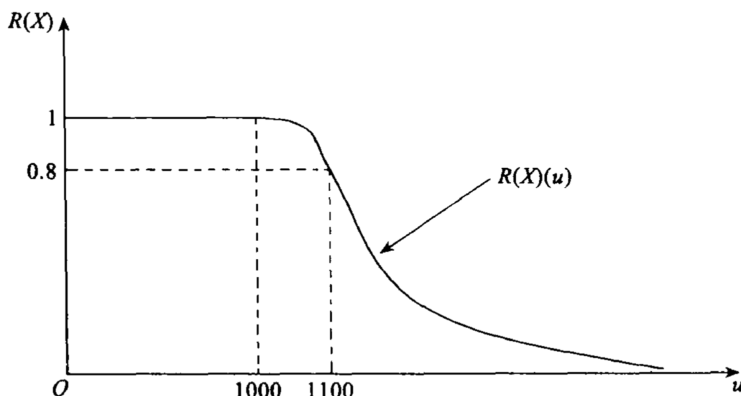


图 10.1.1 R(预算)

Fuzzy 变量,则 $X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是 $U=U_1\times U_2\times\cdots\times U_n$ 的一个 n 元(复合)Fuzzy 变量(*n*-ary composite fuzzy variable), $R(X)\triangleq R(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是 U 上的 n 元 Fuzzy 关系.

例 10.1.2 (Zadeh, 1973a) 设 $U_1=U_2=(-\infty,+\infty)$, $X_1\triangleq$"水平接近", $X_2\triangleq$"垂直接近",并且

$$R(X)\triangleq\int_{U_1\times U_2}(1+u_1^2+u_2^2)^{-1}/(u_1,u_2)$$

如

$$R(2,1)=\frac{1}{6}\approx 0.16.$$

□

为了讨论边缘与条件约束,我们先引入记号 p.

设

$$p\triangleq(i_1,i_2,\cdots,i_k)$$

是指标序列 $(1,2,\cdots,n)$ 的有序子序列. 如, $n=8$, $p=(1,3,5,6)$.

p 的有序补记为

$$p^c=(j_1,j_2,\cdots,j_m)$$

其中 $\{j_1,j_2,\cdots,j_m\}=\{1,2,\cdots,n\}\backslash\{i_1,i_2,\cdots,i_k\}$, $j_1<j_2<\cdots,<j_m$. 如,对于 $p=(1,3,5,6)$, $p^c=(2,4,7,8)$.

如果 n 元变量 $u=(u_1,u_2,\cdots,u_n)$, 则记

$$u_{(p)}\triangleq(u_{i_1},u_{i_2},\cdots,u_{i_k})$$

$$u_{(p^c)}\triangleq(u_{j_1},u_{j_2},\cdots,u_{j_m})$$

定义 10.1.3　设 $R(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是 $U_1\times U_2\times\cdots\times U_n$ 上的一个 n 元约束，那么 $R(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 在 $U_{i_1}\times U_{i_2}\times\cdots\times U_{i_k}$ 上的投影 $R(X_{i_1},X_{i_2},\cdots,X_{i_k})$ 称为由 $R(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 导出的边缘约束(marginal restriction)，其中

$$R(X_{(p)})(u_{(p)})=\bigvee_{u_{(p^c)}} R(X)(u) \qquad (10.1.2)$$

例 10.1.3　对于例 10.1.2 中定义的二元 Fuzzy 变量，我们有

$$R_1\triangleq R(X_1),\ R_2=R(X_2)$$

并且

$$R_1(u_1)=\bigvee_{u_2}(1+u_1^2+u_2^2)^{-1}=(1+u_1^2)^{-1}$$

$$R_2=R_1. \qquad \square$$

定义 10.1.4　设 $R(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是 $U_1\times U_2\times\cdots\times U_n$ 上的一个 n 元约束，那么

$$R(X_{j_1},X_{j_2},\cdots,X_{j_m}\,|\,u_{i_1},u_{i_2},\cdots,u_{i_k}) \text{ 或 } R(X_{(p^c)}\,|\,u_{(p)})$$

称为 $R(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 在 $u_{(p)}$ 上的条件约束(conditional restriction)，其中

$$R(X_{j_1},X_{j_2},\cdots,X_{j_m}\,|\,u_{i_1},u_{i_2},\cdots,u_{i_k})(u_{j_1},u_{j_2},\cdots,u_{j_m})$$
$$=R(X_1,X_2,\cdots,X_n)(u_1,u_2,\cdots,u_n) \qquad (10.1.3)$$

或

$$R(X_{(p^c)}\,|\,u_{(p)})(u_{(p^c)})=R(X)(u). \qquad (10.1.4)$$

例 10.1.4　设 $U_1=U_2=U_3=\{0,1,2\}$，$R(X_1,X_2,X_3)$ 是一个 $U_1\times U_2\times U_3$ 上的三元 Fuzzy 关系，并且

$$R(X_1,X_2,X_3)=\frac{0.8}{(0,0,0)}+\frac{0.6}{(0,0,1)}+\frac{0.2}{(0,1,0)}+\frac{1}{(1,0,2)}+$$
$$\frac{0.7}{(1,1,0)}+\frac{0.4}{(0,1,1)}+\frac{0.9}{(1,2,0)}+\frac{0.4}{(2,1,1)}+\frac{0.8}{(1,1,2)}$$

则

$$R(X_1,X_2\,|\,u_3=0)=\frac{0.8}{(0,0)}+\frac{0.2}{(0,1)}+\frac{0.7}{(1,1)}+\frac{0.9}{(1,2)}$$

$$R(X_1,X_2\,|\,u_3=1)=\frac{0.6}{(0,0)}+\frac{0.4}{(0,1)}+\frac{0.4}{(2,1)}$$

$$R(X_1,X_2\,|\,u_3=2)=\frac{1}{(1,0)}+\frac{0.8}{(1,1)}$$

$$R(X_1\,|\,u_2=0,u_3=0)=\frac{0.8}{0}$$

$$R(X_1\,|\,u_2=1,u_3=1)=\frac{0.4}{0}+\frac{0.4}{2}. \qquad \square$$

由定义 10.1.3 与定义 10.1.4 直接可得以下定理：

定理 10.1.1　设 $R(X_{(p^c)})$ 是由 $R(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 导出的一边缘约束，$R(X_{(p^c)}\,|\,u_{(p)})$ 是 $R(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 在 $u_{(p)}$ 上的条件约束，则

$$R(X_{(p^c)}) = \bigcup_{u_{(p)}} R(X_{(p^c)} \mid u_{(p)}) \tag{10.1.5}$$

定义 10.1.5 一个 n 元约束 $R(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是可分的(separable)，如果

$$R(X_1, X_2, \cdots, X_n) = R(X_1) \times R(X_2) \times \cdots \times R(X_n) \tag{10.1.6}$$

即

$$R(X_1, X_2, \cdots, X_n)(u_1, u_2, \cdots, u_n) = \bigwedge_{i=1}^{n} R(X_i)(u_i)$$

$$\forall (u_1, u_2, \cdots, u_n) \in U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n \tag{10.1.7}$$

例 10.1.5 下面的一个二元约束的 Fuzzy 关系矩阵可以表示成两个 Fuzzy 向量的复合，这说明该二元约束是可分的.

$$\begin{bmatrix} 0.3 & 0.8 & 0.8 & 0.1 \\ 0.3 & 0.8 & 1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.6 & 0.6 & 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 1 \\ 0.2 \\ 0.6 \end{bmatrix} \circ [0.3 \quad 0.8 \quad 1 \quad 0.1]. \qquad \square$$

由定义直接得到下面的结论.

定理 10.1.2 如果 $R(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是可分的，则由其导出的任何边缘约束也是可分的.

定理 10.1.3 可分约束 $R(X_1) \times R(X_2) \times \cdots \times R(X_n)$ 是具有边缘约束 $R(X_1), R(X_2), \cdots, R(X_n)$ 的最大约束.

定义 10.1.6 如果 $R(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是可分的，则称 Fuzzy 变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是非交互的(noninteractive).

§10.2 语言变量

Fuzzy 逻辑与近似推理的基本工具之一是语言变量的概念，这一概念被 Zadeh称为高阶变量(variable of higher order)而不是 Fuzzy 变量.

定义 10.2.1 (Zadeh, 1973a) 一个语言变量(linguistic variable)由一个五元组

$$(x, U, W(x), G, M) \tag{10.2.1}$$

表示. 其中：

(1) x 是变量名；

(2) U 为论域；

(3) $W(x)$ (简记为 W)是 x 的术语集合，即 U 上 x 的 Fuzzy 集名称的词或术语的集合，$X \in W(x)$ 也称为 x 的语言值(linguistic value)，X 是一个 Fuzzy 变量；

(4) G 是一个语法规则(syntactic rule)，用于产生 x 的语言值；

(5) M 是一个语义规则(semantic rule)

$$M: W \to \mathscr{F}(X),\ X \mapsto M(X) \triangleq [X] \tag{10.2.2}$$

例 10.2.1 (Zadeh, 1973a) 考虑语言变量 x 为“年龄”, $U=[0,100]$.

$W(x)=\{$很老,老,不太老,比较年轻,相当年轻,很年轻,年少, $\cdots\}$

$X \in W(x)$, 那么 $M(X)$ 是 U 上的一个 Fuzzy 集,如

$$M(\text{老})=[\text{老}]$$

其中

$$[\text{老}](u)=\begin{cases}0, & u \in [0,50] \\ \left(1+\left(\dfrac{u-50}{5}\right)^{-2}\right)^{-1}, & u \in (50,100].\end{cases}$$ □

例 10.2.2 (Baldwin, 1979) 考虑语言变量 x 为“真值”, $U=[0,1]$

$W(x)=\{$真,不真,很真,不很真, $\cdots$, 假,不假,很假, $\cdots$, 不很真也不很假, $\cdots\}$

Baldwin(1979)定义的一些语言值如图 10.2.1 所示.

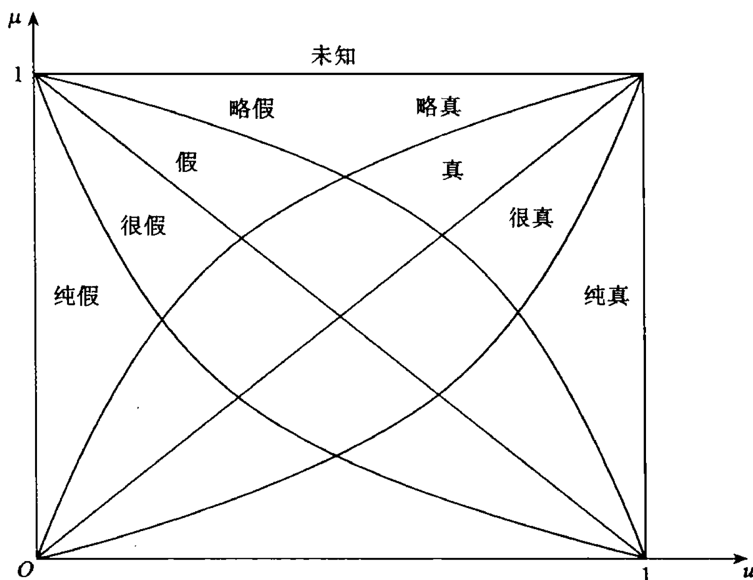


图 10.2.1　语言变量“真值”

其中

$$[\text{很真}](u)=([\text{真}](u))^2,\ u \in [0,1]$$

$$[\text{略真}](u)=([\text{真}](u))^{\frac{1}{2}},\ u \in [0,1]$$

$$[\text{纯真}](u)=\begin{cases}1, & u=1 \\ 0, & 0 \leqslant u < 1\end{cases}$$

等等. Zadeh(1973a)建议"真"的隶属函数为

$$[\text{真}](u)=\begin{cases}0, & 0\leqslant u<a\\ 2\left(\dfrac{u-a}{1-a}\right)^2, & a\leqslant u<\dfrac{1+a}{2}\\ 1-2\left(\dfrac{u-1}{1-a}\right)^2, & \dfrac{1+a}{2}\leqslant u\leqslant 1\end{cases}$$

其中 $u=\dfrac{1+a}{2}$ 称为交叉点，$a\in[0,1]$ 是一个参数，a 表示了关于 u 的最小值的主观判断."假"的隶属函数为

$$[\text{假}](u)=[\text{真}](1-u),\ 0\leqslant u\leqslant 1$$

图 10.2.2 示意了"真"和"假".

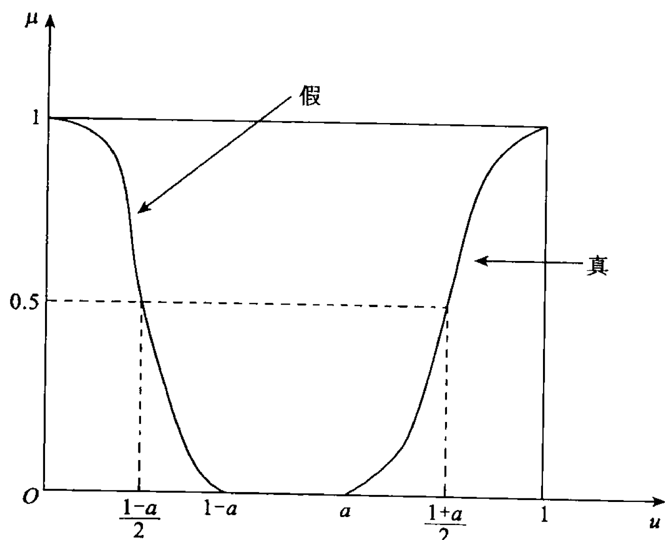


图 10.2.2 "真"和"假"示意图

例 10.2.3 考虑语言变量 x 为"数目"，论域 $U=\{1,2,\cdots,10\}$

$W(x)=\{$少许，几个，许多$\}$

$$[\text{少许}]=\frac{0.4}{1}+\frac{0.8}{2}+\frac{1}{3}+\frac{0.4}{4}$$

$$[\text{几个}]=\frac{0.5}{3}+\frac{0.8}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{0.8}{7}+\frac{0.5}{8}$$

$$[\text{许多}]=\frac{0.4}{6}+\frac{0.6}{7}+\frac{0.8}{8}+\frac{0.9}{9}+\frac{1}{10}.$$

□

类似地可以定义复合语言变量.

定义 10.2.2　如果一个语言变量 $(x,U,W(x),G,M)$ 中,变量名为 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 并且论域为 $U=U_1\times U_2\times\cdots\times U_n$,则称其为一个 n 元(复合)语言变量(n-ary composite linguistic variable),$M(X)$ $(X\in W(x))$ 是 U 上的 n 元 Fuzzy 关系.

例 10.2.4　考虑复合语言变量 (x,y),论域为

$$U\times V=\{1,2,3,4\}\times\{1,2,3,4\}$$

$$W=\{\text{近似相等},\text{或多或少相等}\}$$

$$[\text{近似相等}]=\begin{bmatrix}1 & 0.6 & 0.4 & 0.2\\ 0.6 & 1 & 0.6 & 0.4\\ 0.4 & 0.6 & 1 & 0.6\\ 0.2 & 0.4 & 0.6 & 1\end{bmatrix}$$

$$[\text{或多或少相等}]=\begin{bmatrix}1 & 0.8 & 0.6 & 0.4\\ 0.8 & 1 & 0.8 & 0.6\\ 0.6 & 0.8 & 1 & 0.8\\ 0.4 & 0.6 & 0.8 & 1\end{bmatrix}.$$ □

§10.3　Fuzzy 词与 Fuzzy 算子

10.3.1　语义

1. 单词

单词是表达概念的最小单位. 如天、地、人、动物、跑、黑、白、美、丑、快、慢等. 设某些单词的集合为 W, X 表示论域. 作为语言,总是用一定的字(单词)去代表一定的义,这种对应关系称为语义. 于是语义建立了 W 与 X 的联系,这个联系可以用 W 到 X 的映射 M 表示

$$M:W\to\mathscr{F}(X),\ a\mapsto M(a)=[a] \tag{10.3.1}$$

这实际上是把每个单词与其外延对应起来. [*]是单词“ * ”的外延.

例 10.3.1　设年龄论域 $X=[1,100]$, 词集合为 $W=\{\text{青年},\text{中年},\text{老年}\}$, 那么 W 中单词的词义给出如下

$$[\text{青年}](x)=\begin{cases}1, & x\leqslant 25\\ \left[1+\left(\dfrac{x-25}{5}\right)^2\right]^{-1}, & x>25\end{cases}$$

$$
[\text{中年}](x)=\begin{cases}0, & 1\leqslant x\leqslant 35\\ \left[1+\left(\dfrac{x-45}{4}\right)^{4}\right]^{-1}, & 35<x\leqslant 45\\ \left[1+\left(\dfrac{x-45}{4}\right)^{2}\right]^{-1}, & 45<x\end{cases}
$$

$$
[\text{老年}](x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 50\\ \left[1+\left(\dfrac{x-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1}, & x>50\end{cases}
$$

□

例 10.3.2 设 $X=\mathbf{N}$, 则“几个”的词义为

$$
[\text{几个}]=\frac{0.4}{3}+\frac{0.8}{4}+\frac{1}{5}+\frac{0.8}{6}+\frac{0.4}{7}+\frac{0.2}{8}.
$$

□

2. 词组

单词通过“或”($\cup$),“且”($\cap$)联结起来,或者在单词前面加“非”(^{c}),变成词.

例如

[白马]=[马且白]=[马] ∩ [白]

[亚非拉]=[亚或非或拉]=[亚] ∪ [非] ∪ [拉]

[非金属]=[金属]^c.

10.3.2 Fuzzy 语言算子

1. 语气算子

自然语言中,有些词如“很”、“稍许”、“极”、“略”、“非常”、“比较”、“特别”等,把这些词缀在一个单词前面(如“很老”、“比较老”、“极老”等)便调整了该词词义的肯定程度,把原来的单词变为一个新词. 因此,上面那些词可以分别看做一种算子,称为语气算子. 严格定义如下:

定义 10.3.1 设 X 为论域,对 $\lambda\in\mathbf{R}^+$, 定义映射:

$$
H^{(\lambda)}:\mathscr{F}(X)\to\mathscr{F}(X)
$$

$$
A\mapsto H^{(\lambda)}(A),\ H^{(\lambda)}(A)(x)\triangleq(A(x))^{\lambda} \tag{10.3.2}
$$

称 $H^{(\lambda)}$ 为语气算子(mood operator);当 $\lambda>1$ 时, $H^{(\lambda)}$ 称为集中化算子;当 $\lambda<1$ 时, $H^{(\lambda)}$ 称为弱化算子.

下面是一些常用的语气算子:

[很]$=H^{(2)}$, [极]$=H^{(4)}$, [相当]$=H^{(1.25)}$, [比较]$=H^{(0.75)}$, [有点]$=H^{(0.5)}$ (=[略]), [稍微有点]$=H^{(0.25)}$.

例 10.3.3 设 $O=$[老人],其隶属函数为

$$O(x)=\begin{cases}0, & 0<x\leqslant 50\\ \left(1+\left(\dfrac{x-50}{5}\right)^{-2}\right)^{-1}, & 50<x\leqslant 100\\ 1, & x>100\end{cases}$$

则[很老的人]=很(老人)= $H^{(2)}(O)$,同理,[极老的人]= $H^{(4)}(O)$,[有点老的人]= $H^{(0.5)}(O)$,[稍微有点老的人]= $H^{(0.25)}(O)$,且

$$H^{(2)}(O)(x)=\begin{cases}0, & 0<x\leqslant 50\\ \left(1+\left(\dfrac{x-50}{5}\right)^{-2}\right)^{-2}, & 50<x\leqslant 100\\ 1, & x>100\end{cases}$$

$$H^{(4)}(O)(x)=\begin{cases}0, & 0<x\leqslant 50\\ \left(1+\left(\dfrac{x-50}{5}\right)^{-2}\right)^{-4}, & 50<x\leqslant 100\\ 1, & x>100\end{cases}$$

$$H^{(0.5)}(O)(x)=\begin{cases}0, & 0<x\leqslant 50\\ \left(1+\left(\dfrac{x-50}{5}\right)^{-2}\right)^{-0.5}, & 50<x\leqslant 100\\ 1, & x>100\end{cases}$$

$$H^{(0.25)}(O)(x)=\begin{cases}0, & 0<x\leqslant 50\\ \left(1+\left(\dfrac{x-50}{5}\right)^{-2}\right)^{-0.25}, & 50<x\leqslant 100.\\ 1, & x>100\end{cases}$$ □

语气算子具有下列性质:

定理 10.3.1 设 $A,B\in\mathscr{F}(X)$, $\lambda,\mu\in\mathbf{R}^+$, 则:

(1) $H^{(\mu)}(H^{(\lambda)}(A))=H^{(\lambda)}(H^{(\mu)}(A))=H^{(\lambda\mu)}(A)$;

(2) $(H^{(\lambda)}(A))_\alpha=A_{\alpha^{1/\lambda}}$, $(H^{(\lambda)}(A))_{\bar{\alpha}}=A_{\overline{\alpha^{1/\lambda}}}$, $\lambda>0$, $\alpha\in[0,1]$;

(3) $H^{(\lambda)}(A\cup B)=H^{(\lambda)}(A)\cup H^{(\lambda)}(B)$,

$H^{(\lambda)}(A\cap B)=H^{(\lambda)}(A)\cap H^{(\lambda)}(B)$;

(4) $H^{(\lambda)}(\alpha A)=\alpha^\lambda H^{(\lambda)}(A)$, $\alpha\in(0,1]$;

(5) $A\subseteq B\Rightarrow H^{(\lambda)}(A)\subseteq H^{(\lambda)}(B)$.

证明 (2) $x\in(A^\lambda)_\alpha\Leftrightarrow(A^\lambda)(x)\geqslant\alpha\Leftrightarrow(A(x))^\lambda\geqslant\alpha\Leftrightarrow A(x)\geqslant\alpha^{1/\lambda}$

(4) $H^{(\lambda)}(\alpha A)(x)=(\alpha\wedge A(x))^\lambda=\alpha^\lambda\wedge(A(x))^\lambda=\alpha^\lambda H^{(\lambda)}(A)$. □

注:(1) 语气算子只对模糊概念起作用,对确切(清晰)概念是不起作用的.事实上, $\forall A\in\mathscr{P}(X)$,因 $A(x)\in\{0,1\}$,故 $\forall x\in X$

$$H^{(\lambda)}(A)(x)=(A(x))^\lambda=A(x)\tag{10.3.3}$$

(2) 由定理 10.3.1(4)知 $H^{(\lambda)}$ ($\lambda \neq 1$)不是 X 上的 Fuzzy 线性变换(见定义 6.2.1).

2. Fuzzy 化算子

诸如"大概"、"好像"、"近似于"等词也是一个算子,若把它们放在一个词的前面,当该词的词义是确切的时候,可以将其模糊化,当该词的词义是模糊的时候,亦可以使其词义更加模糊. 严格定义如下:

定义 10.3.2 给定 Fuzzy 关系 $R \in \mathscr{F}(X \times X)$, 由 R 诱导的 Fuzzy 变换 $F^{(R)}: \mathscr{F}(X) \to \mathscr{F}(X)$, $A \mapsto F^{(R)}(A)$, 满足条件

$$F^{(R)}(A) = R \circ A, \text{即 } \forall x \in X, F^{(R)}(A)(x) = (R \circ A)(x) = \bigvee_{y \in X} (R(x,y) \wedge A(y)) \tag{10.3.4}$$

则称 $F^{(R)}$ 为 Fuzzy 化算子(fuzzification operator).

一般情况下,这里所用的 Fuzzy 关系 R, 通常是 X 上的 Fuzzy 相似关系;特别地当 $X = \mathbf{R}$ 时,可以取

$$\forall x,y \in \mathbf{R},\ R(x,y) = \begin{cases} e^{-(x-y)^2}, & |x-y| < \delta \\ 0, & |x-y| \geqslant \delta \end{cases} \tag{10.3.5}$$

这里 δ 是适当选定的正实数,将这个 R 的 Fuzzy 化算子 $F^{(R)}$ 简记为 F.

例 10.3.4 "3"是一个词,3 的集合是个普通集:

$$\forall x \in \mathbf{R},\ 3(x) = \begin{cases} 1, & x = 3 \\ 0, & x \neq 3 \end{cases}$$

那么"大约 3"$= F(3)$ 便是 Fuzzy 集

$$\forall x \in \mathbf{R},\ F(3)(x) = \begin{cases} e^{-(x-3)^2}, & |x-3| < \delta \\ 0, & |x-3| \geqslant \delta \end{cases}$$

大约 3 是 3 的 Fuzzy 化结果,如图 10.3.1 所示.

定理 10.3.2 设 $A,B \in \mathscr{F}(X)$, $R,S \in \mathscr{F}(X \times X)$, 则:

(1) Fuzzy 化算子 $F^{(R)}$ 是 X 上的 Fuzzy 线性变换,即

$F^{(R)}(A \cup B) = F^{(R)}(A) \cup F^{(R)}(B)$, $F^{(R)}(\alpha A) = \alpha F^{(R)}(A)$, $\alpha \in [0,1]$;

(2) $F^{(R)}(A \cap B) = F^{(R)}(A) \cap F^{(R)}(B)$;

(3) $(F^{(R)}(A))_{\underline{\alpha}} = F^{(R_{\underline{\alpha}})}(A_{\underline{\alpha}})$, $\alpha \in [0,1]$;

(4) 若 X 为有限集,则 $(F^{(R)}(A))_{\alpha} = F^{(R_{\alpha})}(A_{\alpha})$;

(5) $F^{(R)}(F^{(S)}(A)) = F^{(R \circ S)}(A)$;

(6) $A \subseteq B \Rightarrow F^{(R)}(A) \subseteq F^{(R)}(B)$;

(7) $R \subseteq S \Rightarrow F^{(R)}(A) \subseteq F^{(S)}(A)$.

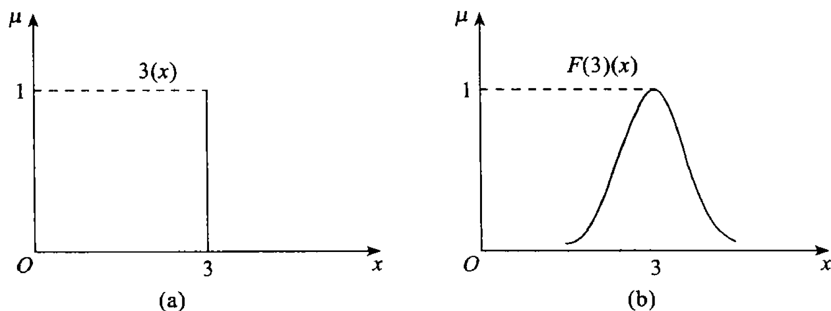


图 10.3.1

证明 (1)、(2)由定理 6.2.2 直接得到.

(3)类似定理 3.2.4(1)的证明，有

$$(F^{(R)}(A))_{\bar{\alpha}}=(R\circ A)_{\bar{\alpha}}=R_{\bar{\alpha}}\circ A_{\bar{\alpha}}=F^{(R_{\bar{\alpha}})}(A_{\bar{\alpha}}).$$

(4)类似定理 3.2.4(2)的证明，同理可证.

(5)、(6)、(7)由定义 10.3.2 直接得到. □

3. 判断化算子

诸如"偏向"、"倾向"、"多半是"等词也可以视为一个算子，可以对模糊的词给出一种粗糙的判断，称为判断化算子. 严格定义如下：

定义 10.3.3 对于 $a\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$，定义映射

$$P^{(a)}:\mathscr{F}(X)\rightarrow\mathscr{F}(X)$$

$$A\mapsto P^{(a)}(A),P^{(a)}(A)(x)=d^{(a)}(A(x))\qquad(10.3.6)$$

则称 $P^{(a)}$ 为判断化算子(judgement operator). 其中 $d^{(a)}$ 是定义在[0, 1]上的实函数

$$\forall x\in X,d^{(a)}(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant a\\ \frac{1}{2}, & a<x\leqslant 1-a\\ 1, & x>1-a\end{cases}\qquad(10.3.7)$$

图 10.3.2 给出了 $d^{(a)}$ 的示意图. 特别地，称 $P^{(0.5)}$ 为"偏向".

例 10.3.5 设 $X=\mathbf{R}$，Fuzzy 集 $A=$[年轻人]，且

$$\forall x\in X,A(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 25\\ \left(1+\left(\frac{x-25}{5}\right)^2\right)^{-1}, & x>25\end{cases}$$

注意到 $A(30)=\frac{1}{2}$，于是若记 $B=$[偏向年轻人]，则 $\forall x\in X$，有

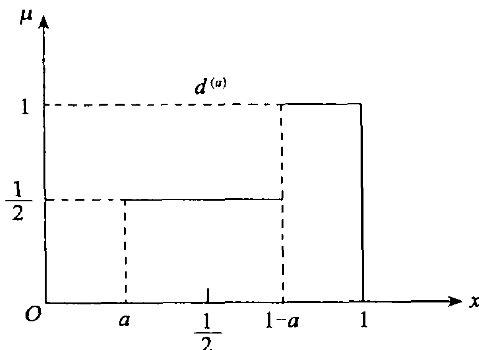


图 10.3.2

$$B(x)=P^{(0.5)}(A)(x)=\begin{cases}0, & A(x)\leqslant 0.5\\ 1, & A(x)>0.5\end{cases}=\begin{cases}0, & x\geqslant 30\\ 1, & x<30\end{cases}$$

这样，不到 30 岁则“偏向年轻”.

定理 10.3.3 设 $A,B\in\mathscr{F}(X)$，则：

(1) $P^{(a)}(A\cup B)=P^{(a)}(A)\cup P^{(a)}(B)$, $P^{(a)}(A\cap B)=P^{(a)}(A)\cap P^{(a)}(B)$;

(2) $\forall x\in X, x\neq a, x\neq 1-a\Rightarrow P^{(a)}(A^c)(x)=(P^{(a)}(A))^c(x)$.

证明 (1) 只需证明：$\forall x,y\in[0,1], d^{(a)}(x\vee y)=d^{(a)}(x)\vee d^{(a)}(y)$. 事实上，只需对 x,y 分下列情形直接验证.

① $x\leqslant a, y\leqslant a$;　② $x\leqslant a, y>a$;

③ $a<x\leqslant 1-a, y\leqslant a$;　④ $a<x\leqslant 1-a, a<y\leqslant 1-a$;

⑤ $a<x\leqslant 1-a, y>1-a$;　⑥ $x>1-a, y\leqslant 1-a$;

⑦ $x>1-a, y>1-a$.

同理可证　$\forall x,y\in[0,1], d^{(a)}(x\wedge y)=d^{(a)}(x)\wedge d^{(a)}(y)$

(2) $$\forall x\in X, d^{(a)}(1-x)=1-\begin{cases}0, & x<a\\ \frac{1}{2}, & a\leqslant x<1-a,\\ 1, & x\geqslant 1-a\end{cases}$$

于是当 $x\neq a, x\neq 1-a$ 时

$$d^{(a)}(1-x)=1-d^{(a)}(x).$$ □

4. 清晰度增强算子

定义 10.3.4 (Zadeh, 1972)设 X 为论域，对 $\lambda\geqslant 1$，定义映射

$$I^{(\lambda)}:\mathscr{F}(X)\to\mathscr{F}(X)$$

$$A \mapsto I^{(\lambda)}(A), I^{(\lambda)}(A)(x) \triangleq \begin{cases} 2^{\lambda-1}(A(x))^{\lambda}, & A(x) \in [0,0.5] \\ 1-2^{\lambda-1}(1-A(x))^{\lambda}, & A(x) \in (0.5,1] \end{cases} \quad (10.3.8)$$

称 $I^{(\lambda)}$ 为清晰度增强算子(contrast intensification operator).

例 10.3.6 在语言变量“真值”中,论域 $X=[0,1]$, $[\text{真}](x)=x, x\in[0,1]$, 取 $\lambda=2$, 则

$$I^{(2)}([\text{真}])(x)=\begin{cases} 2x^2, & x\in[0,0.5] \\ 1-2(1-x)^2, & x\in(0.5,1] \end{cases}$$

图 10.3.3 给出了 $I^{(2)}$ 示意图.

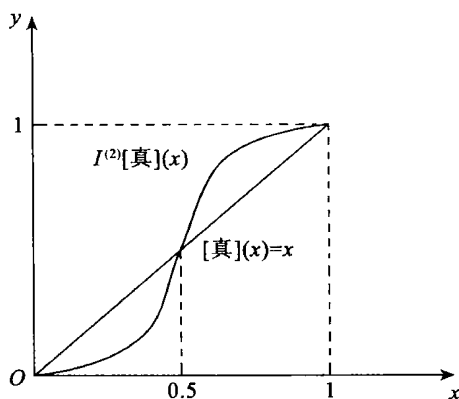


图 10.3.3

定理 10.3.4 $$I^{(\lambda)}(A^c)=(I^{(\lambda)}(A))^c \quad (10.3.9)$$

证明

$$\forall x\in X, I^{(\lambda)}(A^c)(x)=\begin{cases} 2^{\lambda-1}(A^c(x))^{\lambda}, & A^c(x)\in[0,0.5] \\ 1-2^{\lambda-1}(1-A^c(x))^{\lambda}, & A^c(x)\in(0.5,1] \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 2^{\lambda-1}(1-A(x))^{\lambda}, & A(x)\in[0.5,1] \\ 1-2^{\lambda-1}(A(x))^{\lambda}, & A(x)\in[0,0.5) \end{cases}$$

$$=(1-I^{(\lambda)}(A))(x)=(I^{(\lambda)}(A))^c(x).$$ □

10.3.3 语言值

自然语言中,有一类词的词义是表示数量的,如“大”、“小”、“多”、“少”、“轻”、“重”、“长”、“短”等以及由它们按上述方法扩大的词汇,如“很大”、“不大”、“非常小”、“有点长”、“不长也不短”等都称为语言值.

例 10.3.7 设 $X=\{1,2,\cdots,10\}$，在 X 上定义 Fuzzy 集

$$A=[大]=\frac{0.2}{4}+\frac{0.4}{5}+\frac{0.6}{6}+\frac{0.8}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10},$$

$$B=[小]=\frac{1}{1}+\frac{0.8}{2}+\frac{0.6}{3}+\frac{0.4}{4}+\frac{0.2}{5}.$$ □

语言值的运算有如下方法.

1. Fuzzy 集逻辑运算

例 10.3.8 A,B 是例 10.3.7 中的两个 Fuzzy 集，则

$$[不大]=A^c=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{0.8}{4}+\frac{0.6}{5}+\frac{0.4}{6}+\frac{0.2}{7}$$

$$[不小]=B^c=\frac{0.2}{2}+\frac{0.4}{3}+\frac{0.6}{4}+\frac{0.8}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}$$

$$[不大也不小]=A^c\cap B^c=\frac{0.2}{2}+\frac{0.4}{3}+\frac{0.6}{4}+\frac{0.6}{5}+\frac{0.4}{6}+\frac{0.2}{7}.$$

2. Fuzzy 算子运算

例 10.3.9 若 A,B 是例 10.3.7 中的两个 Fuzzy 集，则

$$[很大]=H^{(2)}(A)=\frac{0.2^2}{4}+\frac{0.4^2}{5}+\frac{0.6^2}{6}+\frac{0.8^2}{7}+\frac{1^2}{8}+\frac{1^2}{9}+\frac{1^2}{10}$$

$$=\frac{0.04}{4}+\frac{0.16}{5}+\frac{0.36}{6}+\frac{0.64}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}$$

$$[有点小]=H^{(0.5)}(B)=\frac{1^{0.5}}{1}+\frac{0.8^{0.5}}{2}+\frac{0.6^{0.5}}{3}+\frac{0.4^{0.5}}{4}+\frac{0.2^{0.5}}{5}$$

$$=\frac{1}{1}+\frac{0.89}{2}+\frac{0.77}{3}+\frac{0.63}{4}+\frac{0.45}{5}$$

而由

$$(P^{(0.5)}(A))(x)=d^{(0.5)}(A(x))=\begin{cases}0, & A(x)\leqslant\frac{1}{2}\\ 1, & A(x)>\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$[偏大]=P^{(0.5)}(A)=\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}$$

$$[偏小]=P^{(0.5)}(B)=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$$

$$[偏不大]=P^{(0.5)}(A^c)=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=(P^{(0.5)}(A))^c$$

$$[偏不小]=P^{(0.5)}(B^c)=\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}=(P^{(0.5)}(B))^c$$

$$[偏不大不小]=P^{(0.5)}(A^c\cap B^c)=\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=P^{(0.5)}(A^c)\cap P^{(0.5)}(B^c).$$ □

下面给出的是 Fuzzy 算子与 Fuzzy 集运算的某些综合运算，进一步说明定理 10.3.1、定理 10.3.2 与定理 10.3.3 的意义.

例 10.3.10　若 A,B 是例 10.3.7 中的两个 Fuzzy 集，则

$$[不很大]=(H^{(2)}(A))^c=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{0.96}{4}+\frac{0.84}{5}+\frac{0.64}{6}+\frac{0.36}{7}$$

$$[很不大]=H^{(2)}(A^c)=\frac{1^2}{1}+\frac{1^2}{2}+\frac{1}{3}+\frac{0.8^2}{4}+\frac{0.6^2}{5}+\frac{0.4^2}{6}+\frac{0.2^2}{7}$$

$$=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{0.64}{4}+\frac{0.36}{5}+\frac{0.16}{6}+\frac{0.04}{7}$$

这说明
$$H^{(2)}(A^c)\neq(H^{(2)}(A))^c$$

$$[有点不大不小]=H^{(0.5)}(A^c\cap B^c)=\frac{0.2^{0.5}}{2}+\frac{0.4^{0.5}}{3}+\frac{0.6^{0.5}}{4}+\frac{0.6^{0.5}}{5}+\frac{0.4^{0.5}}{6}+\frac{0.2^{0.5}}{7}$$

$$=\frac{0.45}{2}+\frac{0.63}{3}+\frac{0.77}{4}+\frac{0.77}{5}+\frac{0.63}{6}+\frac{0.45}{7}$$

$$=H^{(0.5)}(A^c)\cap H^{(0.5)}(B^c)$$

$$=[有点不大也有点不小]$$

$$[好像不大]=F^{(R)}(A^c)=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{0.8}{4}+\frac{0.6}{5}+\frac{0.4}{6}+\frac{e^{-1}}{7}+\frac{0.2}{8}$$

这里取

$$R(x,y)=\begin{cases}e^{-(x-y)^2}, & |x-y|<2\\ 0, & |x-y|\geqslant 2\end{cases}$$

另外，
$$(F^{(R)}(A))^c=\left(\frac{0.2}{3}+\frac{e^{-1}}{4}+\frac{0.4}{5}+\frac{0.6}{6}+\frac{0.8}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}\right)^c$$

$$=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{0.8}{3}+\frac{1-e^{-1}}{4}+\frac{0.6}{5}+\frac{0.4}{6}+\frac{0.2}{7}$$

这说明
$$F^{(R)}(A^c)\neq(F^{(R)}(A))^c.$$
□

3. 四则运算

由于上述这种表示数量的语言值实质上就是 **R** 上的 Fuzzy 集，所以根据扩张原理，它们之间可以进行四则运算. 设 A,B 是两个语言值，则按扩张原理有如下四则运算公式

$$(A*B)(z)=\bigvee_{x+y=z}(A(x)\wedge B(y))\qquad(10.3.10)$$

其中 $*\in\{+,-,\times,\div\}$. 参见 §2.4 与 §2.6.

例 10.3.11　设 $X=\mathbf{Z}$ 为整数集，且

$$\forall x \in X,\ 2(x)=\begin{cases}1, & x=2\\ 0, & x\neq 2\end{cases},\ 3(x)=\begin{cases}1, & x=3\\ 0, & x\neq 3\end{cases}$$

取 X 上的 Fuzzy 相似关系 $R(x,y)=\begin{cases}1-\dfrac{|x-y|}{\delta}, & |x-y|<\delta\\ 0, & |x-y|\geqslant\delta\end{cases}$，$\forall x,y\in X$.

则"大约 2"$=F^{(R)}(2)$，"大约 3"$=F^{(R)}(3)$，并且

$$F^{(R)}(2)(x)=\begin{cases}1-\dfrac{|x-2|}{\delta}, & |x-2|<\delta\\ 0, & |x-2|\geqslant\delta\end{cases},$$

$$F^{(R)}(3)(x)=\begin{cases}1-\dfrac{|x-3|}{\delta}, & |x-3|<\delta\\ 0, & |x-3|\geqslant\delta\end{cases}$$

取定 $\delta=2$，则

$$F^{(R)}(2)=\frac{0.5}{1}+\frac{1}{2}+\frac{0.5}{3},\quad F^{(R)}(3)=\frac{0.5}{2}+\frac{1}{3}+\frac{0.5}{4}$$

于是得到

$$\text{“大约 2”}+\text{“大约 3”}=F^{(R)}(2)+F^{(R)}(3)=\frac{0.5}{3}+\frac{0.5}{4}+\frac{1}{5}+\frac{0.5}{6}+\frac{0.5}{7}.$$

□

§ 10.4 Fuzzy 语言的文法

从语句结构上看，一个句子是由一些词排成(可重复排列)的有穷序列. 设词的集合为 W，而 W 中的排列全体记为 W^*.

定义 10.4.1 一个普通文法(formal grammars)，是指四元组

$$G=(V_T,V_N,S,P) \tag{10.4.1}$$

其中：V_T 是终极符号的集合；V_N 是过渡符号的集合；S 是起始符号；P 是规则集. 并且要求

$$V_T\cap V_N=\varnothing \tag{10.4.2}$$

$$P\subseteq\{(\alpha\to\beta)\mid \alpha,\beta\in V_T\cup V_N\} \tag{10.4.3}$$

Lee，Zadeh (1969)和 Mizumoto et al. (1973) 引入了 Fuzzy 语言的文法，该文法是普通语言文法的推广.

定义 10.4.2 一个 Fuzzy 文法(fuzzy grammars)是五元组

$$FG=(V_T,V_N,S,P,f) \tag{10.4.4}$$

其中：V_T 是终极符号的集合；V_N 是过渡符号的集合；S 是起始符号；P 是规则

集；f 是映射 $f: P \to [0,1]$.

如果 $(\alpha \to \beta) \in P$，$f(\alpha \to \beta) \triangleq \rho \in [0,1]$，或写为

$$\alpha \xrightarrow{\rho} \beta$$

这是一个 Fuzzy 文法，是 W^* 的 Fuzzy 子集，记为 G.

设 $x \in W^*$，那么一定存在 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}$，使得

$$S \xrightarrow{\rho_1} \alpha_1 \xrightarrow{\rho_2} \alpha_2 \xrightarrow{\rho_3} \cdots \xrightarrow{\rho_{n-1}} \alpha_{n-1} \xrightarrow{\rho_n} x$$

称 $(S, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}, x)$ 为一条导出链，x 为导出句(或终止串)，并且定义

$$G(x) \triangleq \bigvee_i (\rho_1^{(i)} \wedge \rho_2^{(i)} \wedge \cdots \wedge \rho_{i_n}^{(i)}) \tag{10.4.5}$$

其中 $\rho_1^{(i)} \wedge \rho_2^{(i)} \wedge \cdots \wedge \rho_{i_n}^{(i)}$ 为第 i 条导出链的强度.

例 10.4.1 在 $FG = (V_T, V_N, S, P, f)$ 中，$V_T = \{a, b\}$，$V_N = \{A, B\}$，P 给出如下

$$S \xrightarrow{0.6} AB \quad A \xrightarrow{0.3} a \quad B \xrightarrow{0.5} a$$

$$S \xrightarrow{0.8} A \quad A \xrightarrow{0.4} B \quad B \xrightarrow{0.6} b$$

$$S \xrightarrow{0.8} B \quad AB \xrightarrow{0.6} BA$$

则由

$$S \xrightarrow{0.8} A \xrightarrow{0.3} a$$

$$S \xrightarrow{0.8} B \xrightarrow{0.5} a$$

$$S \xrightarrow{0.8} A \xrightarrow{0.4} B \xrightarrow{0.4} a$$

得到 $G(a) = (0.8 \wedge 0.3) \vee (0.8 \wedge 0.5) \vee (0.8 \wedge 0.4 \wedge 0.4) = 0.5$

又

$$S \xrightarrow{0.6} AB \xrightarrow{0.3} aB \xrightarrow{0.6} ab$$

$$S \xrightarrow{0.6} AB \xrightarrow{0.4} BB \xrightarrow{0.5} aB \xrightarrow{0.6} ab$$

$$S \xrightarrow{0.6} AB \xrightarrow{0.6} BA \xrightarrow{0.5} BB \xrightarrow{0.3} aB \xrightarrow{0.6} ab$$

$$G(ab) = 0.3 \vee 0.4 \vee 0.3 = 0.4.$$

□

显然，要计算 Fuzzy 集 G，工作量比较大，下面通过代数方法可以简化以上的计算. 先引入记号：

(1)如果 $\alpha \xrightarrow{\rho} \beta$，则记 $\alpha = \rho\beta$；

(2)如果 $\alpha \xrightarrow{\rho_1} \beta_1$，$\alpha \xrightarrow{\rho_2} \beta_2$，$\cdots$，$\alpha \xrightarrow{\rho_k} \beta_k$，则记

$$\alpha = \rho_1\beta_1 + \rho_2\beta_2 + \cdots + \rho_k\beta_k \tag{10.4.6}$$

这里"+"表示"$\vee$"；

(3)如果 $\alpha \xrightarrow{\rho_1} \beta_1$，$\beta_1 \xrightarrow{\rho_2} \beta_2$，则可以导出下式

$$\alpha = \rho_1\beta_1 = \rho_1(\rho_2\beta_2) = (\rho_1 \wedge \rho_2)\beta_2 \tag{10.4.7}$$

并且规定：

(1) $\rho(\rho_1\beta_1 + \rho_2\beta_2) = \rho(\rho_1\beta_1) + \rho(\rho_2\beta_2)$；

(2) $\rho_1\beta + \rho_2\beta = (\rho_1 \vee \rho_2)\beta$.

例 10.4.2 将例 10.4.1 中的生成式用代数式表达，则有

$$S = 0.6AB + 0.8A + 0.8B \tag{10.4.8}$$

$$A = 0.3a + 0.4B \tag{10.4.9}$$

$$B = 0.5a + 0.6b \tag{10.4.10}$$

$$AB = 0.6BA \tag{10.4.11}$$

将式(10.4.10)代入式(10.4.9)，得

$$\begin{aligned} A &= 0.3a + 0.4(0.5a + 0.6b) \\ &= 0.3a + (0.4 \wedge 0.5)a + (0.4 \wedge 0.6)b = 0.4a + 0.4b \end{aligned}$$

将 A 和 B 代入式(10.4.11)，得

$$\begin{aligned} AB &= 0.6BA = 0.6(0.5a + 0.6b)(0.4a + 0.4b) \\ &= 0.6(0.4aa + 0.4ab + 0.4ba + 0.4bb) = 0.4aa + 0.4ab + 0.4ba + 0.4bb \end{aligned}$$

将 A 、B 和 AB 代入式(10.4.8)，得

$$\begin{aligned} S &= 0.6(0.4aa + 0.4ab + 0.4ba + 0.4bb) + 0.8(0.4a + 0.4b) + 0.8(0.5a + 0.6b) \\ &= 0.4aa + 0.4ab + 0.4ba + 0.4ba + 0.5a + 0.6b \end{aligned}$$

即

$$G = \frac{0.4}{aa} + \frac{0.4}{ab} + \frac{0.4}{ba} + \frac{0.4}{bb} + \frac{0.5}{a} + \frac{0.6}{b}$$

这就是按所给文法产生的导出句所构成的 Fuzzy 集. 若 G 是由所有规则产生的，则 G 包含所有导出句. □

§ 10.5 Fuzzy 命题与 Fuzzy 逻辑公式

在二值逻辑中，将能判断其真假的陈述句，称之为命题，常用大写字母 A，B，…，P，Q 等表示，如 P：“李明是大学生”，就是一个命题.

设 $\mathscr{U}_p$ 为一些命题的集合，映射

$$T: \mathscr{U}_p \to \{0,1\}$$

$$P \mapsto T(P) = \begin{cases} 1, & P \text{ 为真} \\ 0, & P \text{ 为假} \end{cases} \tag{10.5.1}$$

称 $T(P)$ 为命题 P 的真值.

一个语句，如果不能再进一步分解成更简单的语句，且也是一个命题，则称

该命题为原子命题. 若干个原子命题通过命题联结词联结起来而构成的新命题,称为复合命题. 常用的命题联结词(亦称命题运算)有以下五种:

(1)合取 $\wedge$: $\mathscr{U}_p \to \mathscr{U}_p$, $(P,Q) \mapsto P \wedge Q$, 其真值表达式为

$$T(P \wedge G) \triangleq T(P) \wedge T(Q) \tag{10.5.2}$$

(2)析取 $\vee$: $\mathscr{U}_p \to \mathscr{U}_p$, $(P,Q) \mapsto P \vee Q$, 其真值表达式为

$$T(P \vee G) \triangleq T(P) \vee T(Q) \tag{10.5.3}$$

(3)否定 $\neg$: $\mathscr{U}_p \to \mathscr{U}_p$, $P \mapsto \neg P$, 其真值表达式为

$$T(\neg P) \triangleq 1 - T(P) \tag{10.5.4}$$

(4)蕴涵 $\to$: $\mathscr{U}_p \to \mathscr{U}_p$, $(P,Q) \mapsto P \to Q$, 其真值表达式为

$$T(P \to G) \triangleq T(\neg P) \vee T(Q) \tag{10.5.5}$$

(5)等价 $\leftrightarrow$: $\mathscr{U}_p \to \mathscr{U}_p (P,Q) \mapsto P \leftrightarrow Q$, 其真值表达式为

$$T(P \leftrightarrow G) = T(P \to Q) \wedge T(Q \to P) \tag{10.5.6}$$

其真值表如表 10.5.1 和表 10.5.2 所示.

表 10.5.1

P	$\neg P$
1	0
0	1

表 10.5.2

P	Q	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$P \to Q$	$P \leftrightarrow Q$
1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0
0	0	0	0	1	1

一个命题可以看成是以{0, 1}为其变域的变元,称之为命题变元. 由命题变元、命题联结词、圆括号按下列法则所组成的字符串,称之为命题公式,简称为公式.

(1)0、1 是命题公式;

(2)命题变元是命题公式;

(3)如果 P 是命题公式,则 $\neg P$ 是命题公式;

(4)如果 P 和 Q 是命题公式,则 $P\wedge Q, P\vee Q, P\rightarrow Q, P\leftrightarrow Q$ 是命题公式;

(5)有限次使用上述法则所得的结果是命题公式.

在一个命题公式中,5 个命题联结词的运算次序规定为: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$.

公式中所有命题变元的一组确定的取值,称为公式的一组真值指派. 一个公式,若对该公式所含的命题变元的任何一组指派,公式的取值恒为 1,则称这样的公式为永真公式. 反之,若对该公式所含的命题变元的任何一组指派,公式的取值恒为 0,则称这样的公式为永假公式.

我们考虑这样一条陈述句:"张三是年轻人",因为"年轻人"是个模糊概念,故该陈述句无确切的真假可言,然而这个陈述句又的确包含着真假的含义. 如"李四是高个子"、"苹果是红的"、"今天的天气很热"等也具有同样的特性. 下面我们讨论这类陈述句.

定义 10.5.1 若陈述句中含有模糊概念,则称其为 Fuzzy 命题(fuzzy proposition). 用大写字母 $A, B, C, \cdots, P, Q, \cdots$ 表示.

设 $\mathscr{F}_p$ 为一些 Fuzzy 命题组成的集合并且有映射

$$T: \mathscr{F}_p \rightarrow L, A \mapsto T(A) \in L$$

则称 $T(A)$ 为 Fuzzy 命题 A 的真值(truth value),其中 L 为下列 4 种集合之一:

(1) $L=[0,1]$, 这是 Fuzzy 命题真值的数值表示法;

(2) $L=I_{[0,1]}$, 这是真值的区间值表示法(Kenevan, Neapolitan, 1992);

(3) $L=\mathscr{F}(X)$(或 $\widetilde{\mathbf{R}}$、$\widetilde{[0,1]}$),这是真值的 Fuzzy 集(Fuzzy 数、Fuzzy 值)表示法;

(4) $L=W(x)$, x 为"真值"语言变量(见例 10.2.2),这是语言真值表示法,$W(x)$是 Fuzzy 值表示法的特例.

我们主要讨论数值与语言真值表示法. 首先讨论真值用数值表示的 Fuzzy 命题.

例如,若 Fuzzy 命题 A 是"2 是小整数",则 $T(A)=0.8$; 若 A 是"5 是小整数",则

$$T(A)=0.2.$$

在 $\mathscr{F}_p$ 中规定逻辑运算 $\vee$(析取)、$\wedge$(合取)、$\neg$(非)

$$T(P\vee Q)=T(P)\vee T(Q) \tag{10.5.7}$$

$$T(P\wedge Q)=T(P)\wedge T(Q) \tag{10.5.8}$$

$$T(\neg P)=1-T(P) \tag{10.5.9}$$

下面给出 Fuzzy 命题公式的递归定义:

(1)Fuzzy 命题 P 是 Fuzzy 命题公式;

(2)若 P 是 Fuzzy 命题公式，则 $\neg P$ 也是 Fuzzy 命题公式；

(3)若 P 和 Q 是 Fuzzy 命题公式，则 $P \vee Q$, $P \wedge Q$ 也是 Fuzzy 命题公式；

(4)有限次使用上述(1)，(2)，(3)求得的公式是 Fuzzy 命题公式.

一个 Fuzzy 命题可以表示成 $F(P_1, P_2, \cdots, P_n)$，其中 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 为 Fuzzy 命题，称其为 $\mathscr{F}_p$ 的 Fuzzy 命题变元，令 $x_k = T(A_k)$，那么命题变元 A_k 与变元相对应. 于是，$\mathscr{F}_p$ 可以对应其真值

$$T(F(A_1, A_2, \cdots, A_n)) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \tag{10.5.10}$$

$$f: [0,1]^n \to [0,1], (x_1, x_2, \cdots, x_n) \mapsto f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

称 f 为真值的 Fuzzy 表达式，也称为 Fuzzy 逻辑公式或 Fuzzy 逻辑函数. 下面是其严格的递归定义：

定义 10.5.2　设 $F_n \subset \mathscr{F}([0,1]^n) = \{f \mid f: [0,1]^n \to [0,1]\}$，并且满足：

(1) $0, 1, x_1, x_2, \cdots, x_n \in F_n$；这里 x_i 表示函数 $f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_i$，$x_i$ 对应 Fuzzy 命题变元 A_i，即 $T(A_i) = x_i$；0，1 分别对应恒假、恒真命题，它们分别是函数 $f_F(x_1, x_2, \cdots, x_n) \equiv 0$，$f_T(x_1, x_2, \cdots, x_n) \equiv 1$；

(2)若 $f \in F_n$，则 $\overline{f} = 1 - f \in F_n$，其中

$$\overline{f}(x_1, x_2, \cdots, x_n) \equiv 1 - f(x_1, x_2, \cdots, x_n);$$

(3)若 $f, g \in F_n$，则 $f \vee g$，$f \wedge g \in F_n$，其中

$$(f \vee g)(x_1, x_2, \cdots, x_n) \equiv f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \vee g(x_1, x_2, \cdots, x_n),$$

$$(f \wedge g)(x_1, x_2, \cdots, x_n) \equiv f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \wedge g(x_1, x_2, \cdots, x_n);$$

(4)若 $F' \subset F([0,1]^n)$ 也满足(1)、(2)、(3)，则 $F_n \subseteq F'$.

这时称 $f \in F_n$ 为 n 元真值 Fuzzy 表达式或 n 元 Fuzzy 逻辑公式(简称 Fuzzy 公式)或 n 元 Fuzzy 逻辑函数.

记 $\overline{x} = 1 - x$，$(x, \overline{x})$ 称为对称变量对. 若 $f = g$，则称 f 与 g 等价.

定义 10.5.3　设 $f \in F_n$，$\alpha \in [0,1]$，且 $\forall (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in [0,1]^n$，$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \geqslant \alpha$，则称 f 为 α-恒真公式，特别地 $\frac{1}{2}$-恒真公式为 Fuzzy 恒真公式；若 $\forall (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in [0,1]^n$，$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \leqslant \frac{1}{2}$，则称 f 为 Fuzzy 恒假公式.

定义 10.5.4　称变元 x 和 $\overline{x}$ 为字；而字的析取式

$$C = L_1 \vee L_2 \vee \cdots \vee L_p \tag{10.5.11}$$

称为子句；字的合取式

$$\Phi = L_1 \wedge L_2 \wedge \cdots \wedge L_p \tag{10.5.12}$$

称为字组. 其中 $L_i \in \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \overline{x}_1, \overline{x}_2, \cdots, \overline{x}_n\}$，$i = 1, 2, \cdots, p$.

定理 10.5.1 (1) 子句 C 为 Fuzzy 恒真公式当且仅当 C 中包含对称变量对 $(x_k,\overline{x}_k)$；

(2)字组 Φ 为 Fuzzy 恒假公式当且仅当 Φ 中包含对称变量对 $(x_k,\overline{x}_k)$.

证明 只证(1),(2)的证明是类似的. 事实上,任给一个子句 $C=L_1 \vee L_2 \vee \cdots \vee L_p$, 该子句是 Fuzzy 恒真公式. 如果该子句不含任何对称变量对,令

$$x_k=\begin{cases}1, & \overline{x}_k\text{在 } C \text{ 中出现}(x_k\text{不在 } C \text{ 中出现}) \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

于是对这组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, 有

$$C(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0<\frac{1}{2}$$

这与 C 是 Fuzzy 恒真公式矛盾.

反之,设子句 $C=L_1 \vee L_2 \vee \cdots \vee L_p$ 中含有对称变量对 $(x_k,\overline{x}_k)$, 则 $\forall(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, 有

$$C(x_1,x_2,\cdots,x_n)\geqslant x_k \vee \overline{x}_k \geqslant \frac{1}{2}$$

因此, C 是 Fuzzy 恒真公式. □

定义 10.5.5 若 Fuzzy 逻辑函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 能表示成字组 $\Phi_j(j=1,2,\cdots,m)$ 的析取式,即

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\Phi_1 \vee \Phi_2 \vee \cdots \vee \Phi_m \tag{10.5.13}$$

则称式(10.5.13)为 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的析取范式.

若 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 表示成子句 $C_j(j=1,2,\cdots,m)$ 的合取式,即

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_m \tag{10.5.14}$$

则称式(10.5.14)为 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的合取范式.

定理 10.5.2 设 $f\in F_n$, 即 f 是一个 n 元 Fuzzy 逻辑公式且 $f\neq 0,1$, 则 f 的析取范式和合取范式都存在.

证明 只证 f 析取范式的存在性,合取范式的存在性证明是类似的.

令 $$\overline{F}_n \triangleq \{f\in F_n\backslash\{0,1\} \mid f\text{ 的析取范式存在}\}$$

显然 $\overline{F}_n\cup\{0,1\}\subseteq F_n$. 为证 $F_n\subseteq\overline{F}_n\cup\{0,1\}$, 首先证明 $\overline{F}_n\cup\{0,1\}$ 满足定义 10.5.2 的(1)、(2)、(3).

(1)因 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 本身是析取范式,所以

$$\{0,1,x_1,x_2,\cdots,x_n\}\subseteq\overline{F}_n\cup\{0,1\}.$$

(2)设 $f\in\overline{F}_n\cup\{0,1\}$. 若 $f=0$, 则 $\overline{f}=1$; 若 $f=1$, 则 $\overline{f}=0$; 若 $f\in\overline{F}_n$, 则存在析取范式(按 $\overline{F}_n$ 的定义)

$$f=\bigvee_{i=1}^{m}\left(\bigwedge_{j=1}^{l_i} p_{ij}\right),\ p_{ij}\in\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\overline{x}_1,\overline{x}_2,\cdots,\overline{x}_n\}$$

从而

$$\overline{f}=\bigwedge_{i=1}^{m}\left(\bigvee_{j=1}^{l_i} p_{ij}\right),\ p_{ij}\in\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\overline{x}_1,\overline{x}_2,\cdots,\overline{x}_n\}$$

由 $\vee$ 与 $\wedge$ 的分配律与结合律可以将 $\overline{f}$ 化为析取范式，这样 $\overline{f}\in\overline{F}_n$. 从而

$$f\in\overline{F}_n\cup\{0,1\}\Rightarrow\overline{f}\in\overline{F}_n\cup\{0,1\}.$$

(3)设 $f,g\in\overline{F}_n\cup\{0,1\}$，下证 $f\vee g$, $f\wedge g\in\overline{F}_n\cup\{0,1\}$. 分几种情形：

情形 1：f,g 中有一个为 0，不妨设 $f=0$，那么

$$f\wedge g=0,\quad f\vee g=g\in\overline{F}_n\cup\{0,1\}.$$

情形 2：f,g 中有一个为 1，不妨设 $f=1$，那么

$$f\vee g=1,\quad f\wedge g=g\in\overline{F}_n\cup\{0,1\}.$$

情形 3：f 与 g 均不为 0,1，即 $f,g\in\overline{F}_n$，则存在析取范式

$$f=\bigvee_{i=1}^{m}\left(\bigwedge_{j=1}^{l_i} p_{ij}\right),\ p_{ij}\in\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\overline{x}_1,\overline{x}_2,\cdots,\overline{x}_n\}$$

$$g=\bigvee_{i=1}^{s}\left(\bigwedge_{j=1}^{k_i} q_{ij}\right),\ q_{ij}\in\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\overline{x}_1,\overline{x}_2,\cdots,\overline{x}_n\}$$

取 $x_1=x_2=\cdots=x_n=0.5$，则易知 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=g(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0.5$，从而 $f\vee g,f\wedge g\,\overline{\in}\,\{0,1\}$，同样由 $\vee$ 与 $\wedge$ 的分配律与结合律可以将 $f\vee g$，$f\wedge g$ 写成析取式，因此 $f\vee g$，$f\wedge g\in\overline{F}_n$. 这就是说

$$f,g\in\overline{F}_n\cup\{0,1\}\Rightarrow f\vee g,f\wedge g\in\overline{F}_n\cup\{0,1\}$$

故 $\overline{F}_n\cup\{0,1\}$ 满足定义 10.5.2 的(1)、(2)、(3)，再由定义 10.5.2 的(4)得

$$F_n\subseteq\overline{F}_n\cup\{0,1\}.$$

最后得到 $\overline{F}_n\cup\{0,1\}=F_n$，即 $\overline{F}_n=F_n\backslash\{0,1\}$. □

定理 10.5.3 (1)析取范式 $f=\Phi_1\vee\Phi_2\vee\cdots\vee\Phi_m$ 是 Fuzzy 恒假公式当且仅当所有字组 Φ_j 是 Fuzzy 恒假公式；

(2)合取范式 $f=C_1\wedge C_2\wedge\cdots\wedge C_m$ 是 Fuzzy 恒真公式当且仅当所有子句 C_j 是 Fuzzy 恒真公式.

证明 只证(1)，(2)的证明是类似的. 事实上

f 是 *Fuzzy* 恒假逻辑公式 $\Leftrightarrow(\forall(x_1,x_2,\cdots,x_n))\left(f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\leqslant\frac{1}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow(\forall(x_1,x_2,\cdots,x_n))\left(\bigvee_{i=1}^{m}\Phi_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)\leqslant\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow(\forall(x_1,x_2,\cdots,x_n))(\forall i)\left(\Phi_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)\leqslant\frac{1}{2}\right)$$

$\Leftrightarrow (\forall i)\Phi_i$ 是 Fuzzy 恒假逻辑公式. □

定理 10.5.4 若 f 是一个 n 元 Fuzzy 逻辑公式,则:

(1) f 是 Fuzzy 恒假逻辑公式,当且仅当其限制在二值逻辑中(即限制变元 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\{0,1\}^n$)时 f 是永假式;

(2) f 是 Fuzzy 恒真逻辑公式,当且仅当其限制在二值逻辑中时 f 是永真式.

证明 只证(1),(2)的证明是类似的.

设 f 是 Fuzzy 恒假逻辑公式,于是 $\forall(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in[0,1]^n$, 有 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\leqslant\frac{1}{2}$. 限制变元 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\{0,1\}^n$, 则 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\{0,1\}$, 故 $\forall(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\{0,1\}^n$, $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$, 即 f 是永假公式.

反之,设 f 在二值逻辑中是永假公式,将 f 写成析取范式的形式 $f=\Phi_1\vee\Phi_2\vee\cdots\vee\Phi_m$, 则有

$$\forall(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\{0,1\}^n,\ f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\bigvee_{i=1}^{m}\Phi_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$$

从而 $\forall i\in\{1,2,\cdots,m\}$, $\Phi_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$, 故 Φ_i 在二值逻辑中是永假公式. 下证 $\forall i\in\{1,2,\cdots,m\}$, Φ_i 中至少含有一个对称变量对 $(x_k,\bar{x}_k)$. 若不然,令

$$x_k=\begin{cases}0, & \bar{x}_k \text{ 在 } \Phi_i \text{ 中出现}\\ 1, & \text{其他}\end{cases}$$

于是 $\Phi_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)=1$, 这与 Φ_i 是永假矛盾. 故 $\forall i\in\{1,2,\cdots,m\}$, Φ_i 中至少含有一个变量对 $(x_k,\bar{x}_k)$, 从而由定理 10.5.1, Φ_i $(i=1,2,\cdots,m)$是Fuzzy 恒假公式. □

§ 10.6 Fuzzy 逻辑公式的化简

定义 10.6.1 设 f,g 为 n 元 Fuzzy 公式,而且

$$\forall(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in[0,1]^n,\ f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\leqslant g(x_1,x_2,\cdots,x_n)\tag{10.6.1}$$

则称 f 是 g 的 Fuzzy 蕴涵项,或称 f Fuzzy 蕴涵 g (fuzzy implication),记为 $f\xrightarrow{F}g$; 否则称 f 不 Fuzzy 蕴涵 g, 记为 $f\not\xrightarrow{F}g$; 又若 $f\xrightarrow{F}g$, 且 $f\neq g$, 则称 f 是 g 的真 Fuzzy 蕴涵项.

下面的一些性质由定义容易证明:

性质 10.6.1 $x\xrightarrow{F}x\vee y$, $x\wedge y\xrightarrow{F}x$.

性质 10.6.2　设 $f \xrightarrow{F} g$，若 f 是 α -恒真的，则 g 也是 α -恒真的.

性质 10.6.3　Fuzzy 蕴涵关系 $\xrightarrow{F}$ 是 F_n 的偏序关系，即有：

自反性：$f \xrightarrow{F} f$；

反对称性：$f \xrightarrow{F} g$ 且 $g \xrightarrow{F} f \Rightarrow f = g$；

传递性：$f \xrightarrow{F} g$ 且 $g \xrightarrow{F} h \Rightarrow f \xrightarrow{F} h$.

由性质 10.6.3 进一步得到：

性质 10.6.4　吸收律：$f \xrightarrow{F} g \Leftrightarrow f \vee g = g \Leftrightarrow f \wedge g = f$.

性质 10.6.5　$f_1 \xrightarrow{F} g_1$ 且

$$f_2 \xrightarrow{F} g_2 \Rightarrow f_1 \vee f_2 \xrightarrow{F} g_1 \vee g_2,\ f_1 \wedge f_2 \xrightarrow{F} g_1 \wedge g_2.$$

定理 10.6.1　设 $\Phi^{(1)} = \bigwedge_{i=1}^{m} x_i^{(1)}$，$\Phi^{(2)} = \bigwedge_{j=1}^{l} x_j^{(2)}$ 是两个字组，其中 $x_i^{(1)}$，$x_j^{(2)} \in \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n\}$，则有：

(1) $\Phi^{(2)} \xrightarrow{F} \Phi^{(1)} \Leftrightarrow \Phi^{(1)}$ 中字 $x_i^{(1)}$ 在 $\Phi^{(2)}$ 中一定出现；

(2) $\Phi^{(2)} \xrightarrow{F} \Phi^{(1)}$ 是真 Fuzzy 蕴涵 $\Leftrightarrow \Phi^{(1)}$ 中字 $x_i^{(1)}$ 在 $\Phi^{(2)}$ 中一定出现且 $\Phi^{(2)}$ 中至少有一个字 $x_{j_0}^{(2)}$ 在 $\Phi^{(1)}$ 中不出现.

证明　(1) $\Rightarrow$：设 $\Phi^{(2)} \xrightarrow{F} \Phi^{(1)}$. 假如 $\Phi^{(1)}$ 中存在字 $x_{i_0}^{(1)}$，$x_{i_0}^{(1)}$ 在 $\Phi^{(2)}$ 中不出现. 令

$$x_k = \begin{cases} 0, & x_k \text{ 是 } x_{i_0}^{(1)} \\ \dfrac{1}{2}, & \text{其他} \end{cases} \tag{10.6.2}$$

对于这组 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，有

$$\Phi^{(1)}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0,\ \Phi^{(2)}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \frac{1}{2}$$

这与 $\Phi^{(2)} \xrightarrow{F} \Phi^{(1)}$（即 $\Phi^{(2)} \leqslant \Phi^{(1)}$）矛盾，因此 $\Phi^{(1)}$ 中字 $x_i^{(1)}$ 在 $\Phi^{(2)}$ 中一定出现.

$\Leftarrow$：设 $\Phi^{(1)}$ 中字 $x_i^{(1)}$ 在 $\Phi^{(2)}$ 中一定出现，显然 $\forall (x_1, x_2, \cdots, x_n)$，有

$$\Phi^{(2)}(x_1, x_2, \cdots, x_n) \leqslant \Phi^{(1)}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

即 $\Phi^{(2)} \xrightarrow{F} \Phi^{(1)}$.

(2) $\Rightarrow$：设 $\Phi^{(2)} \xrightarrow{F} \Phi^{(1)}$ 是真 Fuzzy 蕴涵. 倘若 $\Phi^{(2)}$ 中的字在 $\Phi^{(1)}$ 中都出

现,那么由(1)知 $\Phi^{(1)} \xrightarrow{F} \Phi^{(2)}$,这与 $\Phi^{(2)}$ 真 Fuzzy 蕴涵 $\Phi^{(1)}$ 矛盾. 说明只要 $\Phi^{(2)} \xrightarrow{F} \Phi^{(1)}$ 是真 Fuzzy 蕴涵,则 $\Phi^{(1)}$ 中字在 $\Phi^{(2)}$ 中一定出现且 $\Phi^{(2)}$ 中至少有一个字 $x_{j_0}^{(2)}$ 在 $\Phi^{(1)}$ 中不出现.

$\Leftarrow$: 设 $\Phi^{(1)}$ 中字在 $\Phi^{(2)}$ 中一定出现且 $\Phi^{(2)}$ 中至少有一个字 $x_{j_0}^{(2)}$ 在 $\Phi^{(1)}$ 中不出现,则由前一条件 $\Phi^{(2)} \xrightarrow{F} \Phi^{(1)}$,注意后一条件且按式(10.6.2)取值,有

$$\Phi^{(2)}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 < \frac{1}{2} = \Phi^{(1)}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

因此 $\Phi^{(2)}$ 真 Fuzzy 蕴涵 $\Phi^{(1)}$. □

定义 10.6.2 若 f, g 是 Fuzzy 公式,且 $f \overset{F}{\not\longrightarrow} g$, $g \overset{F}{\not\longrightarrow} f$,则称 f, g 是互素的.

定理 10.6.2 设 f, g 为 Fuzzy 公式,下列条件等价:

(1) f 与 g 互素;

(2) $f \xrightarrow{F} f \vee g$ 和 $g \xrightarrow{F} f \vee g$ 都是真 Fuzzy 蕴涵;

(3) $f \wedge g \xrightarrow{F} f$ 和 $f \wedge g \xrightarrow{F} g$ 都是真 Fuzzy 蕴涵.

证明 只证(1) $\Leftrightarrow$ (2),其余的证明是类似的. 事实上,

$$f \xrightarrow{F} f \vee g \text{ 和 } g \xrightarrow{F} f \vee g \text{ 都是真 Fuzzy 蕴涵} \Leftrightarrow f \neq f \vee g \text{ 且 } g \neq f \vee g$$

$$\Leftrightarrow g \overset{F}{\not\longrightarrow} f \text{ 且 } f \overset{F}{\not\longrightarrow} g \Leftrightarrow f \text{ 与 } g \text{ 互素}.$$ □

定义 10.6.3 (1)若 Φ 是一个字组且含有对称变量对,则称 Φ 是偶字组,否则称 Φ 为单字组;又称每一变量或其补至少出现一次的偶字组为满标偶字组;单字组与满标偶字组统称为基本字组.

(2) 若 C 是一个子句且含有对称变量对,则称 C 为偶子句,否则称 C 为单子句;又称每一变量或其补至少出现一次的偶子句为满标偶子句;单子句与满标偶子句统称为基本子句.

由下式可知,每一个偶字组均可以表示成满标偶字组的析取,每一个偶子句均可以表示成满标偶子句的析取.

$$x \wedge \bar{x} \leqslant \frac{1}{2} \leqslant x \vee \bar{x} \Rightarrow x \wedge \bar{x} = (x \wedge \bar{x} \wedge y) \vee (x \wedge \bar{x} \wedge \bar{y})$$

$$x \wedge \bar{x} \leqslant \frac{1}{2} \leqslant x \vee \bar{x} \Rightarrow x \vee \bar{x} = (x \vee \bar{x} \vee y) \wedge (x \vee \bar{x} \vee \bar{y}).$$

定义 10.6.4 (1) n 元 Fuzzy 公式的析取范式 $f = \Phi_1 \vee \Phi_2 \vee \cdots \vee \Phi_m$ 称为主析取范式,如果 f 所含的字组 Φ_j 都是基本字组,并且 Φ_i, Φ_j $(i \neq j)$ 互素;

(2) n 元 Fuzzy 公式的合取范式 $f=C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_l$ 称为主合取范式，如果 f 所含的字组 C_j 都是基本子句，并且 C_i, C_j $(i \neq j)$ 互素.

例 10.6.1　下列三元 Fuzzy 公式为一个主析取范式

$$f=(x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x}_3) \vee (x_1 \wedge \overline{x}_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \overline{x}_2). \qquad \square$$

定理 10.6.3　设 Φ 是由 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n, \overline{x}_1, \overline{x}_n, \cdots, \overline{x}_n\}$ 中的字所组成的字组，则存在 Φ 的析取范式 $\Phi=\Phi_1 \vee \Phi_2 \vee \cdots \vee \Phi_m$，并且 Φ_i $(i=1,2,\cdots,m)$ 是基本字组.

证明　若 Φ 是基本字组，则此时定理成立. 设 Φ 不是基本字组，则 Φ 必是偶字组，且不妨设 Φ 含有对称变量对 $(x_k, \overline{x}_k)$，而不含变量 $x_{k_1}, x_{k_2}, \cdots, x_{k_l}$ $(l \geqslant 1)$ 及其补. 当 $l=1$ 时，令

$$\Phi=(x_k \wedge \overline{x}_k) \wedge \Phi' \tag{10.6.3}$$

其中 Φ' 只缺少 $x_k, \overline{x}_k, x_{k_1}, \overline{x}_{k_1}$. 由于

$$x_k \wedge \overline{x}_k=(x_k \wedge \overline{x}_k) \wedge (x_{k_1} \vee \overline{x}_{k_1})=(x_k \wedge \overline{x}_k \wedge x_{k_1}) \vee (x_k \wedge \overline{x}_k \wedge \overline{x}_{k_1})$$

则易验证 $\Phi=\Phi_1 \vee \Phi_2$，其中

$$\Phi_1=x_k \wedge \overline{x}_k \wedge x_{k_1} \wedge \Phi', \quad \Phi_2=x_k \wedge \overline{x}_k \wedge \overline{x}_{k_1} \wedge \Phi'$$

故 Φ_1, Φ_2 是满标偶字组，从而是基本字组，此时定理为真. 若 $l=2$，则在式(10.6.3)中 Φ' 缺少 x_k, x_{k_1}, x_{k_2} 及其补，这时利用分配律与结合律可得

$$\begin{aligned} x_k \wedge \overline{x}_k=&(x_k \wedge \overline{x}_k \wedge x_{k_1} \wedge x_{k_2}) \vee (x_k \wedge \overline{x}_k \wedge x_{k_1} \wedge \overline{x}_{k_2}) \\ &\vee (x_k \wedge \overline{x}_k \wedge \overline{x}_{k_1} \wedge x_{k_2}) \vee (x_k \wedge \overline{x}_k \wedge \overline{x}_{k_1} \wedge \overline{x}_{k_2}) \end{aligned}$$

同样利用式(10.6.3)可以将 Φ 写成基本字组的析取范式. 依此类推可以证得定理成立. □

定理 10.6.4　任何不为 0 或 1 的 n 元 Fuzzy 公式均可以唯一地表示成主析取范式.

证明　设 f 为不为 0 或 1 的 n 元 Fuzzy 公式，由定理 10.5.2，f 存在析取范式，再利用定理 10.6.3，f 可以表示为

$$f=\Phi_1 \vee \Phi_2 \vee \cdots \vee \Phi_m$$

其中 Φ_i $(i=1,2,\cdots,m)$ 是基本字组，在 $\{\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_m\}$ 中删去那些蕴涵其他字组的字组，而相互蕴涵的字组保留一个，最终得到两两互素的基本字组的析取范式，即得 f 的主析取范式.

下面证明唯一性. 若不然，设 $f=\bigvee_{i=1}^{m} \Phi_i=\bigvee_{j=1}^{l} \Phi'_j$ $(m \geqslant 1, l \geqslant 1)$ 为 f 的两个主析取范式，则对任意 Φ_i 有下列两种可能：

(1) Φ_i 为单字组，即 Φ_i 中不含任何对称变量对 $(x_k, \overline{x}_k)$. 令

$$x_k=\begin{cases} 1, & x_k \text{ 在 } \Phi_i \text{ 中出现}(\overline{x}_k \text{不在 } \Phi_i \text{ 中出现}) \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

因此对于这组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 有

$$1=\Phi_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)\leqslant\bigvee_{j=1}^{l}\Phi'_j(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

$$\Rightarrow(\exists j_0\in\{1,2,\cdots,l\}),(\Phi'_{j_0}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=1)$$

$\Rightarrow\Phi'_{j_0}$ 中不含在 Φ_i 中不出现的字

$\Rightarrow\Phi_i\xrightarrow{F}\Phi'_{j_0}$ (由定理 10.6.1).

(2) Φ_i 含每一变量且至少含有一对对称变量 $(x_k,\overline{x}_k)$. 令

$$x_k=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & x_k\text{ 和 }\overline{x}_k\text{在 }\Phi_i\text{ 中出现}\\ 1, & \overline{x}_k\text{不在 }\Phi_i\text{ 中出现(}x_k\text{在 }\Phi_i\text{ 中出现)}\\ 0, & x_k\text{不在 }\Phi_i\text{ 中出现(}\overline{x}_k\text{在 }\Phi_i\text{ 中出现)}\end{cases}$$

这时 Φ_i 中出现的字均取值 $\frac{1}{2}$ 或 1,在 Φ_i 中不出现的字均取值 0. 于是,我们有

$$\frac{1}{2}=\Phi_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)\leqslant\bigvee_{j=1}^{l}\Phi'_j(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

$$\Rightarrow(\exists j_0\in\{1,2,\cdots,l\})\left(\Phi'_{j_0}(x_1,x_2,\cdots,x_n)\geqslant\frac{1}{2}\right)$$

$\Rightarrow\Phi'_{j_0}$ 中不含在 Φ_i 中不出现的字

$\Rightarrow\Phi_i\xrightarrow{F}\Phi'_{j_0}$ (由定理 10.6.1).

综合(1)、(2)两种情形可知,对任意 Φ_i,一定存在 Φ'_{j_0} $(j_0\in\{1,2,\cdots,l\})$,使 $\Phi_i\xrightarrow{F}\Phi'_{j_0}$. 对于这个基本字组 Φ'_{j_0},按上面同样道理,也一定存在 Φ_{i_0} $(i_0\in\{1,2,\cdots,m\})$使得 $\Phi'_{j_0}\xrightarrow{F}\Phi_{i_0}$,故

$$\Phi_i\xrightarrow{F}\Phi'_{j_0}\xrightarrow{F}\Phi_{i_0}$$

因 Φ_i 两两互素,只能有 $\Phi_i=\Phi_{i_0}$,于是 $\Phi'_{j_0}=\Phi_i$. 这意味着每一个 Φ_i 必然是 Φ'_j 中之一,同样每一个 Φ'_j 也必然是 Φ_i 中之一,因此两个主析取范式含有完全相同的字组,即主析取范式是唯一的. □

定理 10.6.5 任何不为 0 或 1 的 n 元 Fuzzy 公式的主合取范式存在且唯一.

证明 类似于定理 10.6.3 和定理 10.6.4 的证明可证. 从略. □

例 10.6.2 考虑三元 Fuzzy 公式

$$f=x_2\wedge((x_1\wedge x_3)\vee(x_1\wedge\overline{x}_2)\vee\overline{x}_3)$$

则

$$\begin{aligned}f&=(x_1\wedge x_2\wedge x_3)\vee(x_1\wedge x_2\wedge\overline{x}_2\wedge(x_3\vee\overline{x}_3))\vee(x_2\wedge\overline{x}_3)\\&=(x_1\wedge x_2\wedge x_3)\vee(x_1\wedge x_2\wedge\overline{x}_2\wedge x_3)\end{aligned}$$

$\vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3) \vee (x_2 \wedge \bar{x}_3)$

$= (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_2 \wedge \bar{x}_3)$

即为 f 的主析取范式. □

定理 10.6.6 若 Fuzzy 公式 $\bar{f}$ 的主析取范式为

$$\bar{f} = \bigvee_{i=1}^{m} \left(\bigwedge_{j=1}^{l_i} x_{ij} \right) \tag{10.6.4}$$

则 f 的主合取范式为

$$f = \bigwedge_{i=1}^{m} \left(\bigvee_{j=1}^{l_i} \bar{x}_{ij} \right) \tag{10.6.5}$$

例 10.6.3 考虑三元 Fuzzy 公式

$$f = x_1 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$$

则

$$\bar{f} = x_1 \wedge \bar{x}_1 \wedge x_2 = x_1 \wedge \bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge (x_3 \vee \bar{x}_3)$$
$$= (x_1 \wedge \bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3)$$

为 $\bar{f}$ 的主析取范式，由定理 10.6.6 知

$$f = (x_1 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)$$

为 f 的主合取范式. □

由例 10.6.3 可见，主析取范式和主合取范式并非 Fuzzy 公式的最简形式. 下面针对析取范式讨论最简单形式，对合取范式可以对偶地讨论，从略.

定义 10.6.5 设 f 是 Fuzzy 公式，而字组 Φ 是 f 的 Fuzzy 蕴涵项，且 Φ 中去掉任何一个字就不是 f 的 Fuzzy 蕴涵项，则称 Φ 为 f 的 Fuzzy 素蕴涵项 (fuzzy prime implication)，简记为 FPI.

例 10.6.4 设三元 Fuzzy 公式 $f = (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3)$. 易验证，$x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$ 与 $x_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3$ 均是 f 的 Fuzzy 素蕴涵项. 但在二值逻辑中，有

$$f = (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3) = x_1 \wedge x_2 \wedge (x_3 \vee \bar{x}_3) = x_1 \wedge x_2$$

此时 $x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$ 与 $x_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3$ 均不是 f 的 Fuzzy 素蕴涵项. □

定义 10.6.6 设 f 是析取范式，而且满足下列条件：

(1) f 没有含有比其字组数目更少的等价 Fuzzy 公式；

(2) f 没有包含相同字组数且字的总数更少的等价 Fuzzy 公式.

则称 f 是最简单析取范式.

定理 10.6.7 设 $f = \Phi_1 \vee \Phi_2 \vee \cdots \vee \Phi_m$ 是最简单析取范式，则 Φ_i ($i = 1, 2, \cdots, m$)是 f 的 FPI.

证明 设 $f = \Phi_1 \vee \Phi_2 \vee \cdots \vee \Phi_m$ 是最简单析取范式，而 Φ_i ($i = 1, 2, \cdots, m$)是字组. 若存在 $i_0 \in \{1, 2, \cdots, m\}$，使得 Φ_{i_0} 不是 f 的 FPI，从而在 Φ_{i_0} 中存

在字 β，使 Φ_{i_0} 中去掉 β 所得的字组 Φ' 仍为 f 的 Fuzzy 蕴涵项。这样 $\Phi_{i_0} \leqslant \Phi' \leqslant f$，进而

$$f = \Phi_1 \vee \Phi_2 \vee \cdots \vee \Phi_m = \Phi_1 \vee \cdots \vee \Phi_{i_0-1} \vee \Phi' \vee \Phi_{i_0+1} \vee \cdots \vee \Phi_m$$

显然上式与 f 是最简析取范式矛盾. 定理得证. □

定义 10.6.7 设 Φ_1，Φ_2 是字组，ϕ 是 Φ_1 的单字，而 $\bar{\phi}$ 是 Φ_2 的单字. 令

$$\Phi_1 = \phi \wedge \Phi', \Phi_2 = \bar{\phi} \wedge \Phi''$$

$$FC_\phi = \begin{cases} \{\Phi' \wedge \Phi''\}, & \Phi' \wedge \Phi'' \text{ 是偶字组} \\ \{\Phi' \wedge \Phi'' \wedge x \wedge \bar{x} \mid x \neq \phi, x \neq \bar{\phi}\}, & \Phi' \wedge \Phi'' \text{ 是单字组} \\ \varnothing, & \Phi_1, \Phi_2 \text{ 中无对称单字} \end{cases} \tag{10.6.6}$$

则称 $FC(\Phi_1, \Phi_2) = \bigcup_{\phi} FC_\phi$ 为 Φ_1，Φ_2 的 Fuzzy 交感.

例 10.6.5 考虑下列三元 Fuzzy 公式 Φ_1，Φ_2

(1) $\Phi_1 = x_1 \wedge \bar{x}_1$，$\Phi_2 = x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$；

(2) $\Phi_1 = x_1 \wedge x_2$，$\Phi_2 = x_1 \wedge \bar{x}_2$；

(3) $\Phi_1 = x_1 \wedge \bar{x}_2$，$\Phi_2 = \bar{x}_1 \wedge x_2$.

对于(1)，由于 Φ_1，Φ_2 中不存在互补的单字，从而 $FC(\Phi_1, \Phi_2) = \varnothing$.

对于(2)，x_2 与 $\bar{x}_2$ 分别是 Φ_1，Φ_2 中的单字，x_1 是单字组，所以

$$FC(\Phi_1, \Phi_2) = \{x_1 \wedge x_3 \wedge \bar{x}_3, x_1 \wedge \bar{x}_1\}$$

对于(3)，$x_1, \bar{x}_2$ 与 $\bar{x}_1, x_2$ 分别是 Φ_1，Φ_2 中的单字，从而

$$FC(\Phi_1, \Phi_2) = \{x_1 \wedge \bar{x}_1, x_2 \wedge \bar{x}_2\}.$$ □

定理 10.6.8 若 $\Phi \in FC(\Phi_1, \Phi_2)$，则 $\Phi \xrightarrow{F} \Phi_1 \vee \Phi_2$.

证明 设 ϕ，$\bar{\phi}$ 分别是字组 Φ_1，Φ_2 中互补的单字，且 $\Phi_1 = \phi \wedge \Phi'$，$\Phi_2 = \bar{\phi} \wedge \Phi''$. 由于 Φ 是偶字组，则由 FC_ϕ 的定义容易得到

$$\Phi \xrightarrow{F} \Phi' \wedge \Phi'' \wedge (\phi \vee \bar{\phi}) = (\Phi' \wedge \Phi'' \wedge \phi) \vee (\Phi' \wedge \Phi'' \wedge \bar{\phi})$$

而 $\Phi' \wedge \Phi'' \wedge \phi \xrightarrow{F} \Phi_1$，$\Phi' \wedge \Phi'' \wedge \bar{\phi} \xrightarrow{F} \Phi_2$，故有

$$(\Phi' \wedge \Phi'' \wedge \phi) \vee (\Phi' \wedge \Phi'' \wedge \bar{\phi}) \xrightarrow{F} \Phi_1 \vee \Phi_2$$

从而 $\Phi \xrightarrow{F} \Phi_1 \vee \Phi_2$. □

定理 10.6.9 设 $f = \Phi_1 \vee \Phi_2 \vee \cdots \vee \Phi_m$ 是析取范式，Φ 为字组，则有：

(1)若 Φ 为单字组，且 Φ 是 f 的 FPI，则存在 $i_0 \in \{1, 2, \cdots, m\}$，使 $\Phi = \Phi_{i_0}$；

(2)若 Φ 是满标偶字组，且 $\Phi \xrightarrow{F} f$，则存在 $k \in \{1, 2, \cdots, m\}$，使 $\Phi \xrightarrow{F} \Phi_k$.

证明 (1)设 Φ 为单字组,令

$$x_k=\begin{cases}1, & x_k \text{ 在 } \Phi \text{ 中出现}(\bar{x}_k \text{ 不在 } \Phi \text{ 中出现})\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

对于这组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,有

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\bigvee_{i=1}^{m}\Phi_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)\geqslant\Phi(x_1,x_2,\cdots,x_n)=1$$

则存在 $i_0\in\{1,2,\cdots,m\}$,使 $\Phi_{i_0}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=1$,从而 Φ_{i_0} 中的字含于 Φ 中,即 $\Phi\xrightarrow{F}\Phi_{i_0}$,从而 $\Phi\xrightarrow{F}f$. 又 Φ 是 f 的 FPI,则由 FPI 的定义知,$\Phi=\Phi_{i_0}$.

(2)设 Φ 是满标偶字组,且 $\Phi\xrightarrow{F}f$. 若 $\forall i\in\{1,2,\cdots,m\}$,$\Phi$ 不 Fuzzy 蕴涵 Φ_i,则 Φ_i 中的字不全出现在 Φ 中,从而存在 Φ_i 中的字 β,使得 $\bar{\beta}$ 在 Φ 中出现,β 在 Φ 中不出现. 取

$$x_k=\begin{cases}\frac{1}{2}, & x_k \text{ 和 } \bar{x}_k \text{ 在 } \Phi \text{ 中出现}\\ 1, & x_k \text{在 } \Phi \text{ 中出现并且 } \bar{x}_k \text{不在 } \Phi \text{ 中出现}\\ 0, & \bar{x}_k \text{ 在 } \Phi \text{ 中出现并且 } x_k \text{ 不在 } \Phi \text{ 中出现}\end{cases}$$

则对这组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,$\forall i\in\{1,2,\cdots,m\}$,

$$\Phi_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0,\ \Phi(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{1}{2}$$

从而 $$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0<\Phi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

这与 $\Phi\xrightarrow{F}f$ 矛盾. (2)为真. □

定理 10.6.10 设 $f=\Phi_1\vee\Phi_2\vee\cdots\vee\Phi_m$ 是析取范式,且 $\Phi_i\neq\Phi_j(i\neq j)$,则 $\Phi_1,\Phi_2,\cdots,\Phi_m$ 是 f 的全体 FPI 的充分必要条件是:

(1) $\forall i,j\in\{1,2,\cdots,m\}$,$i\neq j$,则 $\Phi_i\overset{F}{\not\longrightarrow}\Phi_j$,从而 Φ_i,Φ_j 互素;

(2)任取 $i,j\in\{1,2,\cdots,m\}$,则或者 $FC(\Phi_i,\Phi_j)=\varnothing$,或者存在 $k\in\{1,2,\cdots,m\}$,使 $\forall\Phi\in FC(\Phi_i,\Phi_j)$,$\Phi\xrightarrow{F}\Phi_k$.

证明 充分性 设(1),(2)成立,但 $\Phi_1,\Phi_2,\cdots,\Phi_m$ 不是 f 的全体 FPI,则至少有下列情形之一为真:

情形 I,存在 f 的 FPI 的字组 $\Phi\notin\{\Phi_1,\Phi_2,\cdots,\Phi_m\}$;

情形 II,存在 $i_0\in\{1,2,\cdots,m\}$,使 Φ_{i_0} 不是 f 的 FPI.

若情形 I 为真,则考虑到 Φ 是 f 的 FPI,并由定理 10.6.9 易知,Φ 不是单字组,也不是满标偶字组,记

$$\Phi^*=\Phi\wedge\beta_1\wedge\beta_2\wedge\cdots\wedge\beta_s$$

其中 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 是 Φ 中未出现的字且使得 Φ^* 是满足下列条件的字数最多的偶字组：$\forall i\in\{1,2,\cdots,m\}$，$\Phi^* \overset{F}{\not\longrightarrow} \Phi_i$. 而由定理 10.6.9，$\Phi^*$ 仍不是满标偶字组，故存在 $k\in\{1,2,\cdots,m\}$，使 $x_k,\bar{x}_k$ 均不在 Φ^* 中. 因 Φ^* 是不蕴涵任何 Φ_i $(i\in\{1,2,\cdots,m\})$ 的字数最大的偶字组，故存在 $i_1\in\{1,2,\cdots,m\}$，使字组 $\Phi^*\wedge x_k \overset{F}{\longrightarrow} \Phi_{i_1}$. 同理存在 $i_2\in\{1,2,\cdots,m\}$，使字组 $\Phi^*\wedge \bar{x}_k \overset{F}{\longrightarrow} \Phi_{i_2}$. 而由 Φ^* 的定义，x_k 必出现在 Φ_{i_1} 中，而 $\bar{x}_k$ 必出现在 Φ_{i_2} 中. 这样由于 $\bar{x}_k$ 不出现在 $\Phi^*\wedge x_k$ 中，x_k 不出现在 $\Phi^*\wedge\bar{x}_k$ 中，故有

$$\bar{x}_k \text{ 不在 } \Phi_{i_1} \text{ 中，且 } \Phi^*\wedge x_k \overset{F}{\longrightarrow} \Phi_{i_1} = x_k\wedge \Phi'_{i_1}$$

$$x_k \text{ 不在 } \Phi_{i_2} \text{ 中，且 } \Phi^*\wedge \bar{x}_k \overset{F}{\longrightarrow} \Phi_{i_2} = \bar{x}_k\wedge \Phi'_{i_2}$$

因此

$$\Phi^* \overset{F}{\longrightarrow} \Phi'_{i_1},\ \Phi^* \overset{F}{\longrightarrow} \Phi'_{i_2} \Rightarrow \Phi^* \overset{F}{\longrightarrow} \Phi'_{i_1}\wedge\Phi'_{i_2} \tag{10.6.7}$$

若 $\Phi'_{i_1}\wedge\Phi'_{i_2}$ 是偶字组，则 $\Phi'_{i_1}\wedge\Phi'_{i_2}\in FC(\Phi_{i_1},\Phi_{i_2})$. 但 Φ^* 不蕴涵任何 Φ_i $(i\in\{1,2,\cdots,m\})$，从而 $\Phi'_{i_1}\wedge\Phi'_{i_2}$ 也不蕴涵 Φ_i $(i\in\{1,2,\cdots,m\})$，这与条件(2)矛盾.

若 $\Phi'_{i_1}\wedge\Phi'_{i_2}$ 为单字组，但 Φ^* 是偶字组，设 Φ^* 含对称变量 $(x_j,\bar{x}_j)$ $(j\neq k)$，则由(10.6.7)得

$$\Phi^* \overset{F}{\longrightarrow} \Phi'_{i_1}\wedge\Phi'_{i_2}\wedge x_j\wedge\bar{x}_j\in FC(\Phi_{i_1},\Phi_{i_2})$$

而 Φ^* 不蕴涵任何 Φ_i，从而 $\Phi'_{i_1}\wedge\Phi'_{i_2}\wedge x_j\wedge\bar{x}_j$ 也不蕴涵 Φ_i，这与(2)矛盾. 这样情形 I 是不成立的. 所以 f 的全体 FPI 均在 $\Phi_1,\Phi_2,\cdots,\Phi_m$ 中出现.

若情形 II 为真，则 Φ_{i_0} 必蕴涵 f 的某 FPI，这样存在 $i_3\in\{1,2,\cdots,m\}$，$i_3\neq i_0$，使 $\Phi_{i_0} \overset{F}{\longrightarrow} \Phi_{i_3}$，这与条件(1)矛盾. 所以情形 II 不成立. 从而充分性得证.

必要性 设 $\Phi_1,\Phi_2,\cdots,\Phi_m$ 是 f 的全体 FPI，则由条件显见(1)成立. 若 $FC(\Phi_i,\Phi_j)\neq\varnothing$，则由定理 10.6.8，$\forall\Phi\in FC(\Phi_i,\Phi_j)$，有

$$\Phi \overset{F}{\longrightarrow} \Phi_i\vee\Phi_j \overset{F}{\longrightarrow} f$$

则容易验证，存在 $k\in\{1,2,\cdots,m\}$，使 Φ_k 的字均在 Φ 中出现，即 $\Phi \overset{F}{\longrightarrow} \Phi_k$，故(2)为真. □

由定理 10.6.10，可以得到求一个 Fuzzy 公式 f 的全体 FPI 的算法：

(1)将 f 展开成析取范式；

(2)删除含其他字组的字组；

(3)求任意两个字组 Φ_i,Φ_j 的 Fuzzy 交感 $FC(\Phi_i,\Phi_j)$：当 $FC(\Phi_i,\Phi_j)=\varnothing$ 或含于其他字组时，则转(4)，否则添加上相应的 $FC(\Phi_i,\Phi_j)$ 再转(2)；

(4)所得结果即为 f 的所有 FPI 之和.

例 10.6.6 考虑四元 Fuzzy 公式

$$f=x_1 \wedge \overline{x}_1 \wedge x_2 \wedge (\overline{x}_3 \vee \overline{x}_4 \vee ((x_3 \vee \overline{x}_3) \wedge x_4))$$

将 f 展开为析取范式

$$f=(x_1 \wedge \overline{x}_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x}_3) \vee (x_1 \wedge \overline{x}_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x}_4) \vee (x_1 \wedge \overline{x}_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge x_4) \vee (x_1 \wedge \overline{x}_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x}_3 \wedge x_4)$$

由于 $x_1 \wedge \overline{x}_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x}_3 \wedge x_4 \xrightarrow{F} x_1 \wedge \overline{x}_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x}_3$，所以

$$f=(x_1 \wedge \overline{x}_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x}_3) \vee (x_1 \wedge \overline{x}_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x}_4) \vee (x_1 \wedge \overline{x}_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge x_4)$$

记 $\Phi_1 = x_1 \wedge \overline{x}_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x}_3$，$\Phi_2 = x_1 \wedge \overline{x}_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x}_4$，$\Phi_3 = x_1 \wedge \overline{x}_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge x_4$

则 $$FC(\Phi_1,\Phi_2)=\varnothing,\ FC(\Phi_1,\Phi_3)=\{x_1 \wedge \overline{x}_1 \wedge x_2 \wedge x_4\} \triangleq \{\Phi_4\}$$

$$FC(\Phi_2,\Phi_3)=\{x_1 \wedge \overline{x}_1 \wedge x_2 \wedge x_3\} \triangleq \{\Phi_5\}$$

易见 $\Phi_3 \xrightarrow{F} \Phi_4$，故 $f=\Phi_1 \vee \Phi_2 \vee \Phi_4 \vee \Phi_5$，即

$$\begin{aligned} f&=(x_1 \wedge \overline{x}_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x}_3) \vee (x_1 \wedge \overline{x}_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x}_4) \vee \\ &\quad (x_1 \wedge \overline{x}_1 \wedge x_2 \wedge x_4) \vee (x_1 \wedge \overline{x}_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \\ &=x_1 \wedge \overline{x}_1 \wedge x_2. \end{aligned}$$
□

由例 10.6.6 可见，Fuzzy 公式 f 的最简析取范式中并不包含 f 的所有 FPI，也就是说，求出了所有的 FPI 并不等于求出了最简析取范式.

定理 10.6.11 设 f 是主析取范式，则 f 中的任何单字组都是 f 的 FPI；反之，f 的 FPI 中的单字组必出现在 f 的主析取范式中.

证明 设 $f=\Phi_1 \vee \Phi_2 \vee \cdots \vee \Phi_m$ 是主析取范式，而 $\Phi_i\ (1 \leqslant i \leqslant m)$ 是单字组，且 Φ_i 不是 FPI. 则存在单字组 Φ 满足 Φ 含字数比 Φ_i 少，且 $\Phi_i \xrightarrow{F} \Phi \xrightarrow{F} f$，从而

$$f=\Phi_1 \vee \cdots \vee \Phi_{i_0-1} \vee \Phi \vee \Phi_{i_0+1} \vee \cdots \vee \Phi_m$$

这与主析取范式的唯一性矛盾. 故 Φ_i 是 f 的 FPI.

另一方面，设 Φ_i 是 f 的 FPI 中的单字组，则由定理 10.6.9 易知 Φ_i 必出现在 f 的主析取范式中. □

由定理 10.6.10 与定理 10.6.11，可以得到求一个 Fuzzy 公式 f 最简析取范式的算法：

(1)求至少有一个是偶字组的 Fuzzy 交感，并记由此求得的 FPI 为 Φ'_1，

$\Phi'_2, \cdots, \Phi'_m$;

(2)求 f 的主析取范式,并设单字组为 $\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_p$, 满标偶字组为 Φ_1^*, $\Phi_2^*, \cdots, \Phi_q^*$;

(3)从 $\Phi'_1, \Phi'_2, \cdots, \Phi'_m$ 中找出子族 $\Phi''_1, \Phi''_2, \cdots, \Phi''_s$ 使之为蕴涵 Φ_1^*, $\Phi_2^*, \cdots, \Phi_q^*$ 的最小组合;

(4) $f = \Phi_1 \vee \Phi_2 \vee \cdots \vee \Phi_p \vee \Phi''_1 \vee \Phi''_2 \vee \cdots \vee \Phi''_s$ 即为 f 的最简析取范式.

例 10.6.7 考虑三元 Fuzzy 公式

$f = (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x}_3) \vee (x_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge x_3 \wedge \overline{x}_3)$

f 是主析取范式,记 $f = \Phi_1 \vee \Phi_2 \vee \Phi_3 \vee \Phi_4$, 则 Φ_1, Φ_2, Φ_3 是单字组,而 Φ_4 是满标偶字组,且

$$FC(\Phi_1, \Phi_4) = \{x_1 \wedge x_3 \wedge \overline{x}_3\}$$
$$FC(\Phi_2, \Phi_4) = \{\overline{x}_2 \wedge x_3 \wedge \overline{x}_3\}$$
$$FC(\Phi_3, \Phi_4) = \{x_1 \wedge x_3 \wedge \overline{x}_3\}$$

注意到 $\Phi_4 \xrightarrow{F} x_1 \wedge x_3 \wedge \overline{x}_3$, $\Phi_4 \xrightarrow{F} \overline{x}_2 \wedge x_3 \wedge \overline{x}_3$, 则 f 的最简析取范式有 2 个:

$f = (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x}_3) \vee (x_1 \wedge x_3 \wedge \overline{x}_3)$

$f = (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x}_3) \vee (\overline{x}_2 \wedge x_3 \wedge \overline{x}_3)$.

□

由例 10.6.7 可知,一个 Fuzzy 公式的最简析取范式是不唯一的.

§10.7 语言值逻辑

由定义 2.8.5 知,[0, 1]上的 Fuzzy 数称为 Fuzzy 值,并且 $\widetilde{[0,1]}$ 表示Fuzzy 值的全体. 设 $A \in \widetilde{[0,1]}$, 则 A 的 α-截集是一闭区间,记为 $A_\alpha = [\underline{A_\alpha}, \overline{A_\alpha}]$, $\alpha \in [0,1]$.

根据扩张原理,我们在 $\widetilde{[0,1]}$ 中规定逻辑运算

$$A \vee B = \bigcup_{\alpha \in (0,1]} \alpha(A_\alpha \vee B_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in (0,1]} \alpha[\underline{A_\alpha} \vee \underline{B_\alpha}, \overline{A_\alpha} \vee \overline{B_\alpha}] \quad (10.7.1)$$

$$A \wedge B = \bigcup_{\alpha \in (0,1]} \alpha(A_\alpha \wedge B_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in (0,1]} \alpha[\underline{A_\alpha} \wedge \underline{B_\alpha}, \overline{A_\alpha} \wedge \overline{B_\alpha}] \quad (10.7.2)$$

$$\neg A = \bigcup_{\alpha \in (0,1]} \alpha(\neg A_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in (0,1]} \alpha[1 - \overline{A_\alpha}, 1 - \underline{A_\alpha}] \quad (10.7.3)$$

$$\bigvee_{t\in T} A^{(t)} = \bigcup_{\alpha\in(0,1]} \alpha\left(\bigvee_{t\in T} A_\alpha^{(t)}\right) = \bigcup_{\alpha\in(0,1]} \alpha\left[\underline{\bigvee_{t\in T} A_\alpha^{(t)}},\ \bigvee_{t\in T} \overline{A_\alpha^{(t)}}\right] \quad (10.7.4)$$

$$\bigwedge_{t\in T} A^{(t)} = \bigcup_{\alpha\in(0,1]} \alpha\left(\bigwedge_{t\in T} A_\alpha^{(t)}\right) = \bigcup_{\alpha\in(0,1]} \alpha\left[\underline{\bigwedge_{t\in T} A_\alpha^{(t)}},\ \bigwedge_{t\in T} \overline{A_\alpha^{(t)}}\right] \quad (10.7.5)$$

这里 $A,B,A^{(t)}(t\in T)\in\widetilde{[0,1]}$.

定义 10.7.1 映射 $T:\mathscr{F}_p\to\widetilde{[0,1]}, P\mapsto T(P)\in\widetilde{[0,1]}$. 称 $T(P)$ 为 Fuzzy 命题 P 的语言真值.

下面是几种常用的语言真值(参见例 10.2.2):

(1)纯真,记为 T_c,其隶属函数为

$$T_c(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x<1\\ 1, & x=1\end{cases};$$

(2)纯假,记为 F_c,其隶属函数为

$$F_c(x)=\begin{cases}1, & x=0\\ 0, & 0<x\leqslant 1\end{cases};$$

(3)真,记为 T_r,其隶属函数为

$$T_r(x)=x;$$

(4)假,记为 F_a,且 $F_a=T_r^c$,即 $F_a(x)=1-x$;

(5)很真,记为 T_r^2,且 $T_r^2=H^{(2)}(T_r)$,即 $T_r^2(x)=x^2$;

(6)很假,记为 F_a^2,且 $F_a^2=H^{(2)}(F_a)$,即 $F_a^2(x)=(1-x)^2$;

(7)极真(或很很真),记为 T_r^4,且 $T_r^4=H^{(4)}(T_r)$,即 $T_r^4(x)=x^4$;

(8)极假(或很很假),记为 F_a^4,且 $F_a^4=H^{(4)}(F_a)$,即 $F_a^4(x)=(1-x)^4$;

(9)略真(或有点真),记为 $\sqrt{T_r}$,且 $\sqrt{T_r}=H^{(0.5)}(t)$,即 $\sqrt{T_r}(x)=\sqrt{x}$;

(10)略假(或有点假),记为 $\sqrt{F_a}$,且 $\sqrt{F_a}=H^{(0.5)}(f)$,即 $\sqrt{F_a}(x)=\sqrt{1-x}$;

(11)未知,记为 U_n,且 $U_n(x)\equiv 1$.

“未知”意味着该命题不知真假,这样的命题称为“哑命题”.

定义 10.7.2 设 A 是一个语言真值,如果 A 的核 $\ker A=\{1\}$,则称 A 为偏真型;如果 $\ker A=\{0\}$,则称 A 为偏假型.

显然语言真值 $T_c,T_r,T_r^2,T_r^4,\sqrt{T_r}$ 都是偏真型;语言真值 F_c,F_a,F_a^2,F_a^4,$\sqrt{F_a}$ 都是偏假型.

定义 10.7.3 (1)设 A,B 是偏真型语言真值,称 A 真于 B,如果 $A\geqslant B$(即 $A\vee B=A$);

(2)设 A,B 是偏假型语言真值,称 A 假于 B,如果 $A\leqslant B$(即 $A\wedge B=B$).

显然 $T_c\geqslant T_r^4\geqslant T_r^2\geqslant T_r\geqslant\sqrt{T_r}$,即“纯真”真于“极真”,“极真”真于“很

真”,“很真”真于“真”,“真”真于“略真”. 同理 $F_c \leqslant F_a \leqslant F_a^2 \leqslant F_a^4 \leqslant \sqrt{F_a}$,即“纯假”假于“极假”,“极假”假于“很假”,“很假”假于“假”,“假”假于“略假”.

下面给出模型(MP)与(MT):

(1)(MP):如果已知

$$T(P)=A=\bigcup_{\alpha\in(0,1]}\alpha[\underline{A}_\alpha,\overline{A}_\alpha] \tag{10.7.6}$$

$$T(P\to Q)=C=\bigcup_{\alpha\in(0,1]}\alpha[\underline{C}_\alpha,1] \tag{10.7.7}$$

则 $T(Q)=B=\bigcup_{\alpha\in(0,1]}\alpha[\underline{B}_\alpha,\overline{B}_\alpha]$,其中

$$[\underline{B}_\alpha,\overline{B}_\alpha]=[(\underline{A}_\alpha+\underline{C}_\alpha-1)\vee 0,1] \tag{10.7.8}$$

(2)(MT):如果已知

$$T(Q)=B=\bigcup_{\alpha\in(0,1]}\alpha[\underline{B}_\alpha,\overline{B}_\alpha] \tag{10.7.9}$$

$$T(P\to Q)=C=\bigcup_{\alpha\in(0,1]}\alpha[\underline{C}_\alpha,1] \tag{10.7.10}$$

则 $T(P)=A=\bigcup_{\alpha\in(0,1]}\alpha[\underline{A}_\alpha,\overline{A}_\alpha]$,其中

$$[\underline{A}_\alpha,\overline{A}_\alpha]=[0,(\underline{B}_\alpha-\underline{C}_\alpha+1)\wedge 1] \tag{10.7.11}$$

(MP)具有下列性质:

性质 10.7.1 如果 A 是偏真型,($\overline{A}_\alpha=1$, $\underline{A}_1=1$),C 是偏真型,($\overline{C}_\alpha=1$, $\underline{C}_1=1$),则 $\overline{B}_\alpha=1$ 且 $\underline{B}_1=\underline{A}_1+\underline{C}_1-1=1$,从而 B 是偏真型. 此外,当 A 越真($\underline{A}_\alpha$ 越大)且 C 越真($\underline{C}_\alpha$)时,B 也越真($\underline{B}_\alpha$).

性质 10.7.2 如果 $A=T_c$(纯真),($\overline{A}_\alpha=1$, $\underline{A}_1=1$),则 $\underline{B}_\alpha=1+\underline{C}_\alpha-1=1=\underline{C}_\alpha$,于是 $B=C$;如果 C 也是纯真,那么 B 也纯真. 这就是二值逻辑的(MP).

性质 10.7.3 如果 A 是偏假型,$\underline{A}_\alpha=0$,则 $\underline{B}_\alpha=0$,于是 $[\underline{B}_\alpha,\overline{B}_\alpha]=[0,1]$,$\forall\alpha\in[0,1]$,故 $B=U_n$(未知).

同理,(MT)具有下列性质:

性质 10.7.4 如果 B 是偏假型,C 是偏真型,则 A 是偏假型。B 越假且 C 越真,则 A 越假.

性质 10.7.5 如果 $B=F_c$(纯假),$\overline{B}_\alpha=0$,则 $A_\alpha=[0,1-\underline{C}_\alpha]$,即 $A=C^c$;如果 C 也是纯真,那么 A 纯假. 这就是二值逻辑的(MT).

性质 10.7.6 如果 B 是偏真型,则 $A=U_n$(未知).

Zadeh(1973a)给出了 Fuzzy 变量与语言变量的概念,并对 Fuzzy 语言算子进行了研究. 这为 Fuzzy 语言的研究奠定了基础. Lee 与 Zadeh (1969)将普通

语言的文法进行推广，引入了 Fuzzy 语言的文法，随后许多学者对 Fuzzy 文法进行了研究(Asveld, 2005; Castro, Delgado, et al., 2001; Gerla, 1991; Guo, 2009; Wang, 2000; Yu, 2001; Mizumoto, Toyoda, et al. 1973; Wang, Li, 2009). 除了本章介绍的数值与语言值 Fuzzy 逻辑外，还有其他推广形式，如区间值 Fuzzy 逻辑(Cornelis, Kerre, 2006; Entemann, 2000; Gasse, Cornelis, et al., 2009; Kenevan, Neapolitan, 1992; Martínez, Castillo, et al., 2009; Méndez, Hernandez, 2009; Wu, Tan, 2006)，格值 Fuzzy 逻辑(Gehrke, Walker, et al., 2003; Gorjanac-Ranitović, Tepavčević, 2007; Ma, Li, et al., 2007; Qiu, 2006; Xing, Qiu, 2009a,b; Xing, Qiu, et al., 2009)以及将 Fuzzy 算子 ∨, ∧ 推广为一般的 t-余模与 t-模(Adillon, García-Cerdaña, et al., 2007; Esteva, Godo, et al., 2009; Gehrke, Walker, et al., 2003; Turksen, 1984)等. 关于 Fuzzy 逻辑的探讨可以查阅相关文献(Ross, 1995; Shastri, 1994). Fuzzy 逻辑是 Fuzzy 集合理论的一个重要部分，可以直接应用于 Fuzzy 控制，专家系统，预测与决策等领域中.

第 11 章 Fuzzy 推理与 Fuzzy 控制

在二值逻辑中，用精确的数学方法描述推理过程，推理的前提条件和结论都是精确的. 然而现实世界中存在大量的 Fuzzy 现象，需要人们根据 Fuzzy 前提做出合乎逻辑的结论，这就是 Fuzzy 推理. 本章介绍 Fuzzy 判断句与 Fuzzy 推理句，似然推理，Fuzzy 条件语句与多重条件语句. Zadeh(1973a)提出了语言控制方法，即 Fuzzy 语言控制，Bellman 与 Zadeh(1970)提出了最优控制方法，即 Fuzzy最优控制. 本章主要介绍 Fuzzy 语言控制，至于 Fuzzy 最优控制的理论可以参阅相关文献(Baldwin, 1981).

§11.1 Fuzzy 判断句及其逻辑演算

设：X 为语言对象的集合；W 为表示概念的词(单词或词组)的集合.

定义 11.1.1 称形如"x 是 a"的陈述句为判断句，记为 (a). 这里 $x \in X$，$a \in W$. 称

$$A = \{x \in X \mid (a) \text{ 对于 } x \text{ 为真}\} \tag{11.1.1}$$

为判断句 (a) 的真域. 若 $A = X$，则称判断句 (a) 永真；若 $A = \varnothing$，则称判断句 (a) 永假.

定义 11.1.2 在判断句 (a) 中，若 a 所表示的概念是清晰的，则称 (a) 是一个普通判断句. 若 a 所表示的概念是模糊的，则称 (a) 是一个 Fuzzy 判断句(fuzzy judgment sentence).

例 11.1.1 设 a ="老年人"，则"是老年人"为一 Fuzzy 判断句. 如果 x = "张三"，则"张三是老年人"就是一个 Fuzzy 命题. 因为"老年人"是个模糊概念，故不能用真、假二值来判定这个命题的真假，这个概念应当是[0,1]中的某个数，记为 $T(a\text{ (张三)})$，称为 Fuzzy 判断句 (a) 的真域. □

定义 11.1.3 若 (a) 是一个 Fuzzy 判断句，则任取 $x \in X$，"x 是 a"即为一 Fuzzy 命题，记为 $(a)(x)$，记真值为 $T((a)(x)) \in [0,1]$. 定义 Fuzzy 集 $A \in \mathscr{F}(X)$，使得

$$\forall x \in X, A(x) = T((a)(x)) \tag{11.1.2}$$

则称 A 为 Fuzzy 判断句 (a) 的真域.

Fuzzy 判断句同 Fuzzy 命题一样,可以通过逻辑演算组成新的判断句.

例 11.1.2 设 (a)"x 是 a",(b)"x 是 b",则

$(a) \vee (b)$:"x 是 a"或"x 是 b"

$(a) \wedge (b)$:"x 是 a"且"x 是 b"

$\neg(a)$:"x 不是 a"

若 (a), (b) 均为清晰的判断句,它们的真域分别为 A,B, 则

$$(a) \vee (b) \text{ 的真域} = \{ x \in X \mid \text{“} x \text{ 是 } a \text{”真或“} x \text{ 是 } b \text{”真} \} = \{ x \in X \mid x \in A \text{ 或 } x \in B \} = A \cup B.$$

同理可得,$(a) \wedge (b)$ 的真域为 $A \cap B$, $\neg(a)$ 的真域为 A^c. □

仿照上例可以得到一般结论:

定理 11.1.1 设 Fuzzy 判断句 (a), (b) 的真域分别为 $A,B \in \mathscr{F}(X)$,则 $(a) \vee (b)$ 的真域为 $A \cup B$; $(a) \wedge (b)$ 的真域为 $A \cap B$; $\neg(a)$ 的真域为 A^c.

证明 $\forall x \in X$, 由定义容易验证

$$\begin{aligned} T(((a) \vee (b))(x)) &= T((a)(x) \vee (b)(x)) \\ &= T((a)(x)) \vee T((b)(x)) \\ &= A(x) \vee B(x) = (A \cup B)(x) \end{aligned}$$

故 $(a) \vee (b)$ 的真域是 $A \cup B$. 对 $(a) \wedge (b)$ 与 $\neg(a)$ 同理可证. □

§11.2 Fuzzy 推理句

定义 11.2.1 称形如"若 x 是 a,则 x 是 b"的陈述句为推理句,记做 $(a) \to (b)$. 如果 a,b 所表示的概念都是清晰的,则称 $(a) \to (b)$ 为普通推理句. 如果 a,b 所表示的概念是模糊的,则称 $(a) \to (b)$ 为 Fuzzy 推理句(fuzzy inference sentence).

如果赋予变元 x 一个特定对象 x_0,那么"若 x_0 是 a,则 x_0 是 b"就是一个 Fuzzy 命题,记为 $[(a) \to (b)](x_0)$. 设 $(a) \to (b)$ 对 x 的真值为 $T([(a) \to (b)](x)) \in [0,1]$. 定义 Fuzzy 集 $S \in \mathscr{F}(X)$如下

$$\forall x \in X, S(x) = T([(a) \to (b)](x)) \tag{11.2.1}$$

则称 S 为 $(a) \to (b)$ 的真域.

设 (a), (b) 为普通判断句,其真域分别为 A,B, 则

$$(a) \to (b) \Leftrightarrow (a) \wedge (b) \text{ 或 } \neg(a) \tag{11.2.2}$$

若设 (a), (b), $(a) \to (b)$ 的真域分别为 A,B,S, 则

$$S = (A \cap B) \cup A^c = A^c \cup B \tag{11.2.3}$$

若 $(a)\to(b)$ 永真，即 $S=X$，则称该推理句为定理. 对于定理推理有下列规则：

(1) $(a)\to(b)$ 是定理 $\Leftrightarrow A\subseteq B$；

(2) $(a)\to(b)$ 是定理，$(b)\to(c)$ 是定理 $\Rightarrow(a)\to(c)$ 是定理，即

$$A\subseteq B, B\subseteq C\Rightarrow A\subseteq C;$$

(3) $(a)\to(b)$ 是定理，(a) 对 x 真 $\Rightarrow(b)$ 对 x 真，即

$$A\subseteq B, x\in A\Rightarrow x\in B;$$

(4) $(a)\to(b)$ 是定理，(b) 对 x 假 $\Rightarrow(a)$ 对 x 假，即

$$A\subseteq B, x\,\overline{\in}\,B\Rightarrow x\,\overline{\in}\,A.$$

由于在模糊情形，$A^c\cup B$ 与 $A^c\cup(A\cap B)$ 未必相等. 则将上述讨论推广到 Fuzzy 推理句情形时引入以下定义.

定义 11.2.2 设 $(a)\to(b)$ 为 Fuzzy 推理句，分别记

$$R_1\triangleq T_1([(a)\to(b)])=A^c\cup B \tag{11.2.4}$$

$$R_2\triangleq T_2([(a)\to(b)])=A^c\cup(A\cap B) \tag{11.2.5}$$

则称 R_1, R_2 分别为 $(a)\to(b)$ 的第一种真域和第二种真域. 又若 $T=T_1$ 或 $T=T_2$，且 $T([(a)\to(b)](x))>\frac{1}{2}$，则称 $(a)\to(b)$ 对 x 为 Fuzzy 真；若 $T([(a)\to(b)](x))<\frac{1}{2}$，则称 $(a)\to(b)$ 对 x 为 Fuzzy 假；若 $\forall x\in X$，$(a)\to(b)$ 对 x 为 Fuzzy 真，则称 $(a)\to(b)$ 为 Fuzzy 恒真，此时也称 $(a)\to(b)$ 为 Fuzzy 定理；若 $\forall x\in X$，$(a)\to(b)$ 对 x 为 Fuzzy 假，则称 $(a)\to(b)$ 为 Fuzzy 恒假.

以 Fuzzy 恒真的推理句 $(a)\to(b)$（即 Fuzzy 定理）作为依据，可以进行如下的 Fuzzy 推理.

定理 11.2.1 下列诸结论成立：

(1) 肯定前件（条件）的假言推理（MP）：如果 $(a)\to(b)$ 是 Fuzzy 定理且 (a) 对 x 为 Fuzzy 真，则 (b) 对 x 为 Fuzzy 真，且

$$T((b)(x))\geqslant T([(a)\to(b)](x)).\ \text{（对第一种真域等式成立）} \tag{11.2.6}$$

(2) 否定后件（结论）的假言推理（MT）：如果 $(a)\to(b)$ 是 Fuzzy 定理且 (b) 对 x 为 Fuzzy 假，则 (a) 对 x 为 Fuzzy 假，且

$$T((a)(x))=1-T([(a)\to(b)](x)) \tag{11.2.7}$$

(3) 复合规则：如果 $(a)\to(b)$ 与 $(b)\to(c)$ 都是 Fuzzy 定理，则 $(a)\to(c)$ 是 Fuzzy 定理，且

$$T([(a)\to(c)](x))\geqslant T([(a)\to(b)](x))\wedge T([(b)\to(c)](x)) \tag{11.2.8}$$

证明 下面用 Fuzzy 推理句的第一种真域来证明. 同理可以用第二种真域来证明相应结论. 设 A,B,C 分别为 Fuzzy 判断句 (a), (b), (c) 的真域, 而 $(a)\rightarrow(b)$ 的真域为 $A^c\cup B$.

(1)由条件, $(a)\rightarrow(b)$ 是 Fuzzy 定理, 则 $\forall x\in X$, 有

$$T([(a)\rightarrow(b)](x))=(1-A(x))\vee B(x)>\frac{1}{2} \tag{11.2.9}$$

又由 (a) 对 x 为 Fuzzy 真, 得 $T((a)(x))=A(x)>\frac{1}{2}$, 即有 $1-A(x)<\frac{1}{2}$, 从而由式(11.2.9)得 $B(x)>\frac{1}{2}$, 这样 (b) 对 x 为 Fuzzy 真, 并且

$$T([(a)\rightarrow(b)](x))=B(x)=T((b)(x)).$$

(2)考虑 (b) 对 x 为 Fuzzy 假, 即 $T((b)(x))=B(x)<\frac{1}{2}$, 结合式(11.2.9)得

$$T([(a)\rightarrow(b)](x))=1-A(x)=1-T((b)(x))>\frac{1}{2}$$

即 (a) 对 x 为 Fuzzy 假, 且 $T((a)(x))=1-T([(a)\rightarrow(b)](x))$.

(3)由条件有式(11.2.9)成立, 并且 $\forall x\in X$, 有

$$T([(b)\rightarrow(c)](x))=(1-B(x))\vee C(x)>\frac{1}{2} \tag{11.2.10}$$

如果 $1-A(x)\geqslant B(x)$, 则由式(11.2.9)得 $1-A(x)>\frac{1}{2}$, 从而

$$\begin{aligned}T([(a)\rightarrow(c)](x))&=(1-A(x))\wedge C(x)\geqslant 1-A(x)\\&=T([(a)\rightarrow(b)](x))>\frac{1}{2}\end{aligned}$$

如果 $B(x)\geqslant 1-A(x)$, 则由式(11.2.9)得 $B(x)>\frac{1}{2}$, 即 $1-B(x)<\frac{1}{2}$, 再由式(11.2.10)得

$$T([(b)\rightarrow(c)](x))=C(x)>\frac{1}{2}$$

所以

$$\begin{aligned}T([(a)\rightarrow(c)](x))&=(1-A(x))\wedge C(x)\geqslant C(x)\\&=T([(b)\rightarrow(c)](x))>\frac{1}{2}\end{aligned}$$

因此结论成立. □

§11.3 不同变元的 Fuzzy 推理句

上述讨论的 Fuzzy 推理句, 例如"如果今天是晴天, 则今天暖和", 只有一个

变量. 但在实际中,经常碰到两个以上性质完全不同的因素,例如:"如果今天是晴天,则张三不在家"等. 一般地,形如"若 x 是 a, 则 y 是 b"的推理句,涉及两个不同的变元 x 与 y, 它们可以分别属于两个不同的论域 X 与 Y, 从而是一个二元谓词,记做 $(a(x)) \to (b(y))$, 其真域是 $X \times Y$ 的子集或 Fuzzy 子集. 为了研究这类 Fuzzy 推理句的真域,我们首先分析(二元)普通推理句的真域 $R \subseteq X \times Y$, 这时, a 和 b 所表示的概念都是清晰的. 设 (a) 的真域为 A, (b) 的真域为 B, 则

$$
\begin{aligned}
R &= \{(x,y) \in X \times Y \mid (a(x)) \to (b(y)) \text{ 对 } (x,y) \text{ 真}\} \\
&= \{(x,y) \in X \times Y \mid (a) \text{ 对 } x \text{ 真且} (b) \text{ 对 } y \text{ 真}\} \cup \{(x,y) \in X \times Y \mid (a) \text{ 对 } x \text{ 假}\} \\
&= \{(x,y) \in X \times Y \mid x \in A \text{ 且 } y \in B\} \cup \{(x,y) \in X \times Y \mid x \in A^c\} \\
&= (A \times B) \cup (A^c \times Y)
\end{aligned}
$$

图 11.3.1 给出了 $(a(x)) \to (b(y))$ 的真域图形,其中阴影部分表示真域.

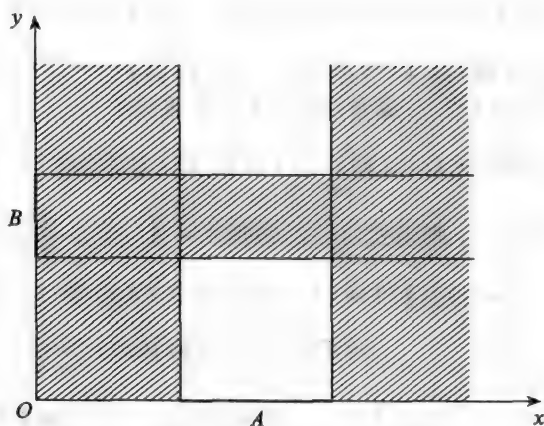


图 11.3.1

现在我们利用普通推理句 $(a(x)) \to (b(y))$ 给出逻辑推理规则:

(1)(MP):如果 $(a(x)) \to (b(y))$ 对 (x,y) 真且 (a) 对 x 真,那么 (b) 对 y 真.

(2)(MT):如果 $(a(x)) \to (b(y))$ 对 (x,y) 真且 (b) 对 y 假,那么 (a) 对 x 假.

(3)复合规则:如果 $(a(x)) \to (b(y))$ 对 (x,y) 真且 $(b(y)) \to (c(z))$ 对 (y,z) 真,则 $(a(x)) \to (c(z))$ 对 (x,z) 真.

将上述讨论推广到 Fuzzy 推理句,首先给出如下定义.

定义 11.3.1 设 a, b 所表示的概念是模糊的,则称推理句 $(a(x)) \rightarrow (b(y))$ 为二元 Fuzzy 推理句(2-ary fuzzy inference sentence),其真域 $R \in \mathscr{F}(X \times Y)$ 为

$$T([(a(x)) \rightarrow (b(y))]) \triangleq R = (A^c \times Y) \cup (A \times B) \qquad (11.3.1)$$

这里 $A \in \mathscr{F}(X)$, $B \in \mathscr{F}(Y)$分别是 (a), (b) 的真域,并且

$$T([(a(x)) \rightarrow (b(y))])(x,y) = R(x,y) = (1 - A(x)) \vee (A(x) \wedge B(y)) \qquad (11.3.2)$$

同样有以 $(a(x)) \rightarrow (b(y))$ 为依据的 Fuzzy 推理规则.

定理 11.3.1 下列结论成立:

(1)(MP):如果 $(a(x)) \rightarrow (b(y))$ 对 (x,y) 为 Fuzzy 真且 (a) 对 x 为Fuzzy 真,那么 (b) 对 y 为 Fuzzy 真,而且

$$T((b)(y)) \geqslant T([(a(x)) \rightarrow (b(y))](x,y)) \qquad (11.3.3)$$

(2)(MT):如果 $(a(x)) \rightarrow (b(y))$ 对 (x,y) 为 Fuzzy 真且 (b) 对 y 为 Fuzzy 假,那么 (a) 对 x 为 Fuzzy 假,而且

$$T((a)(x)) = 1 - T([(a(x)) \rightarrow (b(y))](x,y)) \qquad (11.3.4)$$

(3)复合规则:如果 $(a(x)) \rightarrow (b(y))$ 对 (x,y) 为 Fuzzy 真且 $(b(y)) \rightarrow (c(z))$ 对 (y,z) 为 Fuzzy 真,则 $(a(x)) \rightarrow (c(z))$ 对 (x,z) 为 Fuzzy 真,而且

$$\begin{aligned} & T([(a(x)) \rightarrow (c(z))](x,z)) \\ & \geqslant T([(a(x)) \rightarrow (b(y))](x,y)) \wedge T([(b(y)) \rightarrow (c(z))](y,z)) \end{aligned} \qquad (11.3.5)$$

证明 类似定理 11.2.1 可证. □

例 11.3.1 设

$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\} = \{1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8\}$$

表示某地区女子身高论域,单位为 m;

$$Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\} = \{40, 50, 60, 70, 80\}$$

表示某地区女子体重论域,单位为 kg.

又设该地区对女子来说,"高"的概念的集合表示为

$$[高] = \frac{0.2}{1.4} + \frac{0.5}{1.5} + \frac{0.8}{1.6} + \frac{1}{1.7} + \frac{1}{1.8}$$

"重"的概念的集合表示为

$$[重] = \frac{0.2}{40} + \frac{0.6}{50} + \frac{0.9}{60} + \frac{1}{70} + \frac{1}{80}$$

下面将求出 Fuzzy 推理句"若 x 很高,则 y 很重"的真域 R.

设" x 很高"与" y 很重"的真域分别为 A 和 B,则通过语气算子可得

$$A=[\text{很高}]=H^{(2)}(\text{高})=\frac{0.04}{1.4}+\frac{0.25}{1.5}+\frac{0.64}{1.6}+\frac{1}{1.7}+\frac{1}{1.8}$$

$$B=[\text{很重}]=H^{(2)}(\text{重})=\frac{0.04}{40}+\frac{0.36}{50}+\frac{0.81}{60}+\frac{1}{70}+\frac{1}{80}$$

Fuzzy 推理句的真域为

$$R=(A\times B)\cup(A^c\times Y)$$

其中

$$A^c=\frac{0.96}{1.4}+\frac{0.75}{1.5}+\frac{0.36}{1.6}+\frac{0}{1.7}+\frac{0}{1.8}$$

$A\times B$ 可以表示为 Fuzzy 矩阵

$$A\times B=\begin{bmatrix}0.04\\0.25\\0.64\\1\\1\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}0.04 & 0.36 & 0.81 & 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.04 & 0.04 & 0.04 & 0.04 & 0.04\\0.04 & 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25\\0.04 & 0.36 & 0.64 & 0.64 & 0.64\\0.04 & 0.36 & 0.81 & 1 & 1\\0.04 & 0.36 & 0.81 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$A^c\times Y$ 可以表示为 Fuzzy 矩阵

$$A^c\times Y=\begin{bmatrix}0.96\\0.75\\0.36\\0\\0\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.96 & 0.96 & 0.96 & 0.96 & 0.96\\0.75 & 0.75 & 0.75 & 0.75 & 0.75\\0.36 & 0.36 & 0.36 & 0.36 & 0.36\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

于是

$$R=(A\times B)\cup(A^c\times Y)=\begin{bmatrix}0.96 & 0.96 & 0.96 & 0.96 & 0.96\\0.75 & 0.75 & 0.75 & 0.75 & 0.75\\0.36 & 0.36 & 0.64 & 0.64 & 0.64\\0.04 & 0.36 & 0.81 & 1 & 1\\0.04 & 0.36 & 0.81 & 1 & 1\end{bmatrix}.\quad\square$$

§ 11.4 似然推理

在实际应用中，常用这样的近似推理方法：以"若 x 小，则 y 大"为依据，如果 x 很小就判断 y 很大，如果 x 略小就判断 y 略大. 这种推理过程可以视为一种 Fuzzy 变换，该变换将"x 很小"与"x 略小"的真域 A_1 和 A_2 分别变换到"y 很大"和"y 略大"的真域 B_1 和 B_2. 这种推理方法称为似然推理(plausibility reasoning).

设 $R\in\mathscr{F}(X\times Y)$ 为"若 x 是 a，则 y 是 b"的真域，由定理 6.2.1 知，R 可

以诱导一个从 X 到 Y 的 Fuzzy 变换 T_R，以及一个从 Y 到 X 的 Fuzzy 变换 T_R^{-1}

$$T_R : \mathscr{F}(X) \to \mathscr{F}(Y),$$
$$A_1 \mapsto B_1 = A_1 \circ R \tag{11.4.1}$$
$$T_R^{-1} : \mathscr{F}(Y) \to \mathscr{F}(X),$$
$$B_1 \mapsto A_1 = B_1 \circ R^{-1} \tag{11.4.2}$$

其中 $R^{-1} \in \mathscr{F}(Y \times X)$为 R 的逆关系.

似然推理的规则为：

(1)("若 x 是 a，则 y 是 b"，"x 是 a'") ⇒ "y 是 b'"；其中，如果 $(a(x)) \to (b(y))$ 的真域为 $R \in \mathscr{F}(X \times Y)$，$(a')$ 的真域为 A'，则 (b') 的真域为 $B' = A' \circ R$.

(2)("若 x 是 a，则 y 是 b"，"y 是 b'") ⇒ "x 是 a'"；其中，如果 $(a(x)) \to (b(y))$ 的真域为 $R \in \mathscr{F}(X \times Y)$，$(b')$ 的真域为 B'，则 (a') 的真域为 $A' = B' \circ R^{-1}$.

这两种似然推理相当于 Fuzzy 逻辑推理中的(MP)与(MT). 似然推理可以想象为转换器(如图 11.4.1 所示)，给定某个"输入"，得到一定的"输出".

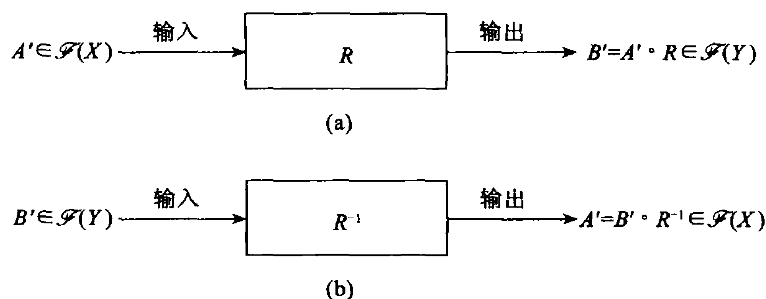


图 11.4.1

在前面已经讲过，普通二元推理句 $(a(x)) \to (b(y))$ 的真域为

$$R = (A^c \times Y) \cup (A \times B) \tag{11.4.3}$$

其中 $$R(x,y) = (1 - A(x)) \vee (A(x) \wedge B(y)).$$

将普通二元推理句 $(a(x)) \to (b(y))$ 的真域(11.4.3)推广到 Fuzzy 情形时，$R(x,y)$ 可以有许多种形式，由此可以得到若干不同的似然推理模型. 下列模型供读者参考.

模型 1. $$R_1 = (A^c \times Y) \cup (A \times B) \tag{11.4.4}$$

其中 $R_1(x,y) = (1 - A(x)) \vee (A(x) \wedge B(x))$ (Zadeh, 1973b).

模型 2. $$R_2 = (A^c \times Y) \cup_{\perp} (X \times B) \tag{11.4.5}$$

其中 $$R_2(x,y)=\perp((1-A(x)),B(x))$$

$\perp$ 为 t-余模.

模型 3. $$R_3(x,y)=(1-A(x))\vee A(x)B(y) \quad (11.4.6)$$

模型 4. $$R_4(x,y)=\begin{cases}1, & A(x)\leqslant B(y)\\ B(y), & A(x)>B(y)\end{cases} \quad \text{(Sanchez, 1976)} \quad (11.4.7)$$

模型 5. $$R_5(x,y)=\begin{cases}1, & A(x)\leqslant B(y)\\ 0, & A(x)>B(y)\end{cases} \quad (11.4.8)$$

模型 6. $$R_6(x,y)=\begin{cases}\dfrac{B(y)}{A(x)}\wedge 1, & A(x)>0\\ 0, & A(x)=0\end{cases} \quad \text{(Goguen, 1969)} \quad (11.4.9)$$

模型 7. $$R_7(x,y)=\begin{cases}1, & A(x)\leqslant B(y)\\ B(y)\wedge(1-A(x)), & A(x)>B(y)\end{cases} \quad (11.4.10)$$

当 $A(x)$, $B(y)$ 限制在 $\{0,1\}$ 中取值时,上述模型都与式(11.4.3)一致,即

$$R_k(x,y)=\begin{cases}1, & A(x)=B(y)=1 \text{ 或 } A(x)=0\\ 0, & A(x)=1 \text{ 并且 } B(y)=0\end{cases} \quad (11.4.11)$$

其中 $k=1,2,\cdots,7$. 因此它们都可以视为二值逻辑(公式(11.4.3))的推广.

例 11.4.1 设论域 $X=Y=\{1,2,3,4,5\}$

$$[小]=\frac{1}{1}+\frac{0.5}{2}$$

$$[较小]=H^{(0.75)}([小])=\frac{1}{1}+\frac{0.595}{2}$$

$$[大]=\frac{0.5}{4}+\frac{1}{5}$$

如果"若 x 小,则 y 大"的真域 R 使用模型 1,则

$$R(x,y)=(1-[小](x))\vee([小](x)\wedge[大](y))$$

算出 R 如下

$$\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}1 & 2 & 3 & 4 & 5\end{array}\\ \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0.5 & 1\\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\end{array}=R$$

由推理规则,有

$$(1,\ 0.595,\ 0,\ 0,\ 0)\circ R=(0.5,\ 0.5,\ 0.5,\ 0.5,\ 1)$$

即 $$[较小]\circ R\triangleq[较大]=\frac{0.5}{1}+\frac{0.5}{2}+\frac{0.5}{3}+\frac{0.5}{4}+\frac{1}{5}. \quad \square$$

例 11.4.2 假设我们正在评估一项新的发明以确定其商业潜力. 我们从两方面来对创新做出决策. 一是发明的"独特性",二是发明的"市场规模",分别用代表新颖程度的论域 $X=\{1,2,3,4\}$ 和市场规模大小的论域 $Y=\{1,2,3,4,5,6\}$ 表示,这两个论域中的最小值各代表"最高独特性"和"最大市场规模". 现设一新发明,上述两项的得分是"中等",分别用 Fuzzy 集 A、B 表示

$$A=[\text{中等独特性}]=\frac{0.6}{2}+\frac{1}{3}+\frac{0.2}{4}$$

$$B=[\text{中等市场规模}]=\frac{0.4}{2}+\frac{1}{3}+\frac{0.8}{4}+\frac{0.3}{5}$$

若"如果 A 则 B"的蕴涵关系 R 使用模型 1,则

$$\begin{array}{c} \\ 1\\ 2\\ 3\\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array}\\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0.4 & 0.4 & 0.6 & 0.6 & 0.4 & 0.4\\ 0 & 0.4 & 1 & 0.8 & 0.3 & 0\\ 0.8 & 0.8 & 0.8 & 0.8 & 0.8 & 0.8 \end{bmatrix} \end{array}=R$$

对新前件 $$A'=[\text{较高独特性}]=\frac{0.5}{1}+\frac{1}{2}+\frac{0.3}{3}+\frac{0}{4}$$

由推理规则,有

$$B'=[\text{相应的市场规模}]=A'\circ R=\frac{0.5}{1}+\frac{0.5}{2}+\frac{0.6}{3}+\frac{0.6}{4}+\frac{0.5}{5}+\frac{0.5}{6}$$

此即表示相应的市场规模大小的 Fuzzy 集. 换言之,市场规模大小分布均匀,因为对任何等级的市场规模没有较大的隶属度也没有较小的隶属度. □

§11.5 Fuzzy 条件语句

定义 11.5.1 设 a,b,c 为模糊概念,则称语句"若 (a),则 (b),否则 (c)"为 Fuzzy 条件语句(fuzzy conditional statement),记为 $((a)\to(b),\neg(a)\to(c))$.

为了求出 Fuzzy 条件语句的真域,先设 a,b,c 为普通概念,而 (a), (b), (c) 的真域分别为 A,B,C, 则对应条件语句 $((a)\to(b),\neg(a)\to(c))$ 的真域为

$$\begin{aligned} R&=\{(x,y)\mid(a(x))\to(b(y))\text{ 与}(\neg a(x))\to(c(y))\text{ 对}(x,y)\text{ 都真}\}\\ &=\{(x,y)\mid(a(x))\to(b(y))\text{ 对}(x,y)\text{ 真}\}\cap\\ &\quad\ \{(x,y)\mid(\neg a(x))\to(c(y))\text{ 对}(x,y)\text{ 真}\}\\ &=((A^c\times Y)\cup(A\times B))\cap((A\times Y)\cup(A^c\times C)) \end{aligned}$$

$$=((A^c \cap A)\times Y)\cup(A^c\times(Y\cap C))\cup$$
$$(A\times(B\cap Y))\cup((A\cap A^c)\times(B\cap C))$$
$$=(A\times B)\cup(A^c\times C).$$

图 11.5.1 给出了真域 R 的示意图,其中阴影部分为 R.

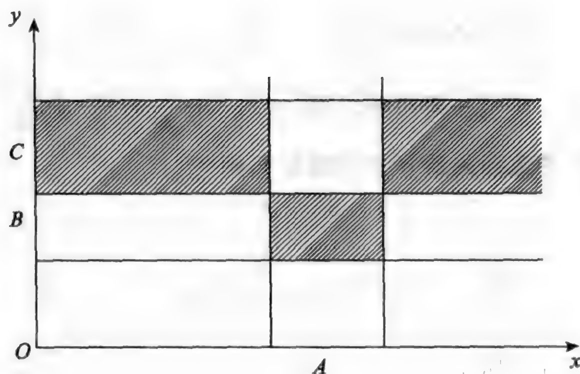


图 11.5.1

设 $A\in\mathscr{F}(X)$, $B,C\in\mathscr{F}(Y)$分别是 Fuzzy 判断句 (a), (b), (c) 的真域,条件 $((a)\to(b),\neg(a)\to(c))$ 的真域 $R=R_1\cup R_2$, 其中 R_1,R_2 分别为推理句 $(a(x))\to(b(y))$ 与推理句 $(\neg a(x))\to(c(y))$ 的真域. 下面介绍 Fuzzy 条件语句真域的三种模型.

模型 1.

$$R^{(1)}=((A^c\times Y)\cup(A\times B))\cap((A\times Y)\cup(A^c\times C))$$
$$=((A^c\cap A)\times Y)\cup(A^c\times C)\cup(A\times B)\cup$$
$$((A\cap A^c)\times(B\cap C)) \tag{11.5.1}$$
$$=((A\cap A^c)\times Y)\cup(A\times B)\cup(A^c\times C)$$
$$R^{(1)}(x,y)=(A(x)\wedge(1-A(x)))\vee(A(x)\wedge B(x))\vee$$
$$((1-A(x))\wedge C(x)) \tag{11.5.2}$$

模型 2.
$$R^{(2)}=(A\times B)\cup(A^c\times C) \tag{11.5.3}$$
$$R^{(2)}(x,y)=(A(x)\wedge B(x))\vee((1-A(x))\wedge C(x)) \tag{11.5.4}$$

模型 3.

求解真域 R 的 Fuzzy 关系方程

$$\begin{cases}A\circ R=B\\ A^c\circ R=C\end{cases} \tag{11.5.5}$$

如果设

$$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\},\quad Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_m\}$$
$$A=(a_1,a_2,\cdots,a_n),\quad A^c=(1-a_1,1-a_2,\cdots,1-a_n)$$
$$B=(b_1,b_2,\cdots,b_m),\quad C=(c_1,c_2,\cdots,c_m)$$

那么 R 可以表示成一个 Fuzzy 矩阵 $R\in[0,1]^{n\times m}$，R 满足 Fuzzy 关系方程

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1-a_1 & 1-a_2 & \cdots & 1-a_n \end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1m} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nm} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_m \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_m \end{bmatrix}$$

取该方程的最大解 $\overline{R}$ 作为 $((a)\to(b),\neg(a)\to(c))$ 的真域模型 $R^{(3)}$.

例 11.5.1 设 $X=Y=\{1,2,3\}$，并且

$$A=[小]=(1,\ 0.4,\ 0),\quad B=[大]=(0,\ 0.4,\ 1)$$

考虑 Fuzzy 条件语句："若 x 小，则 y 大，否则 y 不很大". 我们按上述三种模型求其真域.

$$[很大]=H^{(2)}([大])=(0,\ 0.16,\ 1)$$
$$C=[不很大]=[很大]^c=(1,\ 0.84,\ 0)$$
$$A^c=(0,\ 0.6,\ 1),A\cap A^c=(0,\ 0.4,\ 0)$$

$$A\times B=\begin{bmatrix} 0 & 0.4 & 1 \\ 0 & 0.4 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^c\times C=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0.6 & 0 \\ 1 & 0.84 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A\cap A^c)\times Y=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.4 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R^{(1)}=((A\cap A^c)\times Y)\cup(A\times B)\cup(A^c\times C)=\begin{bmatrix} 0 & 0.4 & 1 \\ 0.6 & 0.6 & 0.4 \\ 1 & 0.84 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R^{(2)}=(A\times B)\cup(A^c\times C)=\begin{bmatrix} 0 & 0.4 & 1 \\ 0.6 & 0.6 & 0.4 \\ 1 & 0.84 & 0 \end{bmatrix}=R^{(1)}$$

模型 $R^{(3)}$ 满足 Fuzzy 关系方程

$$\begin{bmatrix}1 & 0.4 & 0\\0 & 0.6 & 1\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}r_{11} & r_{12} & r_{13}\\r_{21} & r_{22} & r_{23}\\r_{31} & r_{32} & r_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0.4 & 1\\1 & 0.84 & 0\end{bmatrix}$$

取其最大解作为 $R^{(3)}$

$$R^{(3)}=\begin{bmatrix}1 & 0.4 & 0\\0 & 0.6 & 1\end{bmatrix}'\ \alpha\begin{bmatrix}0 & 0.4 & 1\\1 & 0.84 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0.4 & 1\\0 & 1 & 0\\1 & 0.84 & 0\end{bmatrix}$$

如果"x有点小"，A_1=[有点小]= $H^{(0.5)}$([小])=(1，0.63，0)，则根据推理规则，得

$$A_1\circ R^{(1)}=(0.6,\ 0.6,\ 1)\approx[\text{大}]$$

$$A_1\circ R^{(3)}=(0,\ 0.63,\ 1)=[\text{有点大}]=H^{(0.5)}([\text{大}])$$

模型 $R^{(1)}$（与 $R^{(2)}$）判断"y近似大"；模型 $R^{(3)}$ 判断"y有点大"，这与人们的实际想法是很符合的.

如果"x大"，A_2=[大]=(0，0.4，1)，则根据推理规则，得

$$A_2\circ R^{(1)}=(1,\ 0.84,\ 0.4)\approx[\text{不很大}]$$

$$A_2\circ R^{(3)}=(1,\ 0.84,\ 0)=[\text{不很大}]=(H^{(2)}([\text{大}]))^c$$

注意到"x大"与"x小"是对立的，按正常思维应判断"y不很大". 这三种模型都与人们的实际想法相符合.

如果"y不大"，B_1=[不大]=[大]^c=(1，0.6，0)，根据推理规则，得

$$B_1\circ(R^{(1)})^{-1}=(0.4,\ 0.6,\ 1)\approx[\text{不小}]=[\text{小}]^c=(0,\ 0.6,\ 1)$$

$$B_1\circ(R^{(3)})^{-1}=(0.4,\ 0.6,\ 1)\approx[\text{不小}]$$

三个模型判断"x近似不小".

如果"y小"，B_2=[小]=(1，0.4，0)，根据推理规则，得

$$B_2\circ(R^{(1)})^{-1}=(0.4,\ 0.6,\ 1)\doteq[\text{不小}]=[\text{小}]^c=(0,\ 0.6,\ 1)$$

$$B_2\circ(R^{(3)})^{-1}=(0.4,\ 0.4,\ 1)\doteq[\text{大}]=(0,\ 0.4,\ 1).$$ □

§11.6 多重 Fuzzy 条件语句

定义 11.6.1 设 a_i,b_i（$i=1,2,\cdots,l$）为模糊概念，则称语句"若x是a_1，则y是b_1；否则若x是a_2，则y是b_2；…；否则若x是a_l，则y是b_l"或者"若x是a_1，则y是b_1；若x是a_2，则y是b_2；…；若x是a_l，则y是b_l"的陈述句称为多重 Fuzzy 条件语句(multiple fuzzy conditional statement)，记为

$$((a_1)\to(b_1),(a_2)\to(b_2),\cdots,(a_l)\to(b_l))$$

设 (a_k) 的真域为 A_k，(b_k) 的真域为 B_k，$k=1,2,\cdots,l$，下面考虑多重 Fuzzy 条件语句的真域.

模型 1.

$$R^{(1)} \triangleq (A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2) \cup \cdots \cup (A_l \times B_l) \tag{11.6.1}$$

$$R^{(1)}(x,y) = \bigvee_{k=1}^{l} \{A_k(x) \wedge B_k(y)\} \tag{11.6.2}$$

模型 2.

$$R^{(2)} \triangleq \bigcap_{k=1}^{l} R_k \tag{11.6.3}$$

$$R_k \triangleq (A_k^c \times Y) \cup (A_k \times B_k), k=1,2,\cdots,l \tag{11.6.4}$$

$$R^{(2)}(x,y) = \bigwedge_{k=1}^{l} ((1-A_k(x))(A_k(x) \wedge B_k(y))) \tag{11.6.5}$$

模型 3.

设 $A_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}) \in \mathscr{F}(X)$，$B_i=(b_{i1},b_{i2},\cdots,b_{im}) \in \mathscr{F}(Y)$，$i=1,2,\cdots,l$，那么多重 Fuzzy 条件语句的真域 $R^{(3)}$ 应满足 Fuzzy 关系方程

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \cdots & a_{ln} \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1m} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{l1} & b_{l2} & \cdots & b_{lm} \end{bmatrix} \tag{11.6.6}$$

简记为 $A \circ R=B$，我们取其最大解 $A^{-1}\alpha B$（如果解存在）作为真域 $R^{(3)}$.

定义 11.6.2 设 a,b,c 为模糊概念，则称语句“若 x 是 a 且 y 是 b，则 z 是 c”的陈述句为复合 Fuzzy 条件语句(compound fuzzy conditional statement)，记为

$$((a) \wedge (b) \rightarrow (c))$$

设 (a)，(b)，(c) 的真域分别为 $A \in \mathscr{F}(X)$，$B \in \mathscr{F}(Y)$和 $C \in \mathscr{F}(Z)$，则复合 Fuzzy 条件语句 $((a) \wedge (b) \rightarrow (c))$ 的真域为

$$R=A \times B \times C \tag{11.6.7}$$

即 $\forall x \in X, y \in Y, z \in Z$，$R(x,y,z)=A(x) \wedge B(y) \wedge C(z)$.

定义 11.6.3 设 a_i,b_i,c_i（$i=1,2,\cdots,l$）为模糊概念，则称语句“若 x 是 a_1 且 y 是 b_1，则 z 是 c_1；否则若 x 是 a_2 且 y 是 b_2，则 z 是 c_2；…；否则若 x 是 a_l 且 y 是 b_l，则 z 是 c_l”的陈述句为多重复合 Fuzzy 条件语句(multiple compound fuzzy conditional statement)，记为

$$((a_1) \wedge (b_1) \rightarrow (c_1),(a_2) \wedge (b_2) \rightarrow (c_2),\cdots,(a_l) \wedge (b_l) \rightarrow (c_l))$$

设 (a_k) 的真域为 A_k，(b_k) 的真域为 B_k，(c_k) 的真域为 C_k，$k=1,2,\cdots,l$，则多重复合 Fuzzy 条件语句的真域为

$$R=\bigcup_{i=1}^{l}(A_i\times B_i\times C_i) \tag{11.6.8}$$

即 $\forall x\in X,y\in Y,z\in Z$，$R(x,y,z)=\bigvee_{i=1}^{l}(A_i(x)\wedge B_i(y)\wedge C_i(z))$.

§11.7 Fuzzy 控制原理

Fuzzy 控制类同于一般控制系统，所不同的是控制算法. 建立一个 Fuzzy 控制的算法模型有以下 4 个步骤：

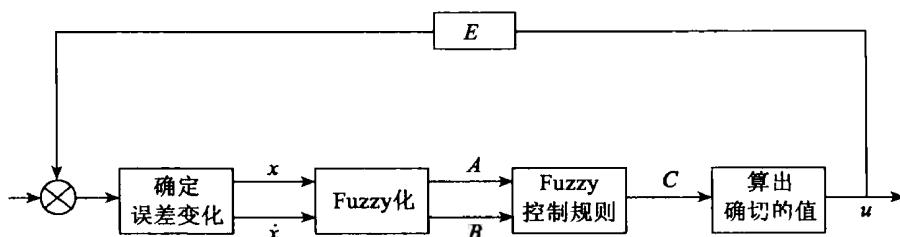
(1)确定误差和误差变化率；

(2)将误差与误差变化率模糊量化；

(3)由 Fuzzy 控制规则计算出 Fuzzy 量；

(4)将 Fuzzy 控制量转化为确切的值.

其框图如图 11.7.1 所示.



E——反馈；x——误差；$\dot{x}$——误差变化率；A——x 经 Fuzzy 化处理后的量；

B——$\dot{x}$ 经 Fuzzy 化处理后的量；C——Fuzzy 控制量；u——控制量的确切值

图 11.7.1

11.7.1 输入量与输出量的模糊化

以输入误差 x 的模糊化(fuzzification)为例，首先要定出系统误差的上、下限，从而作出误差的论域 X，比如设为[−6,6]；其次要给出误差的若干等级，每个等级对应一个论域 X 上的 Fuzzy 集，比如分成七级：正大(positive big，简记 PB)，正中(positive middle，简记 PM)，正小(positive small，简记 PS)，零(zero，简记 ZO)，负小(negative small，简记 NS)，负中(negative middle，简记 NM)，负

大(negative big,简记 NB). 分别记为 $A_i(i=1,2,\cdots,7)$，它们是 X 上的 Fuzzy 集. 最后建立这些 Fuzzy 集的隶属函数. 图 11.7.2 是定义这些 Fuzzy 集的三角形 Fuzzy 数,这里给出的是连续的隶属函数,实际应用时为了方便将论域离散化分成若干个整数的集合,比如分成 13 个,于是有误差论域

$$X=\{-6,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6\} \qquad (11.7.1)$$

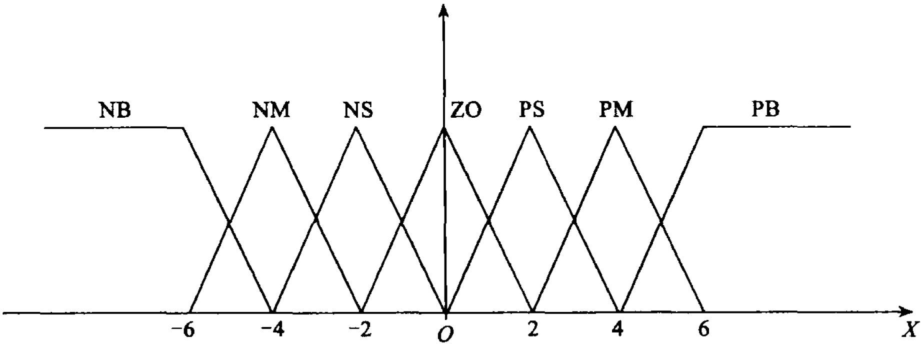


图 11.7.2　三角形隶属函数

这时每一隶属函数表现为论域上的一个向量. 表 11.7.1 表示了离散论域 X 上的离散函数的向量形式.

表 11.7.1　　**离散后的隶属函数**

A_i ＼ $A_i(x)$ ＼ x	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6
负大(NB)	1	0.5											
负中(NM)		0.5	1	0.5									
负小(NS)				0.5	1	0.5							
零(ZO)						0.5	1	0.5					
正小(PS)								0.5	1	0.5			
正中(PM)										0.5	1	0.5	
正大(PB)												0.5	1

注:表 11.7.1 中空白处均为 0.

对于误差变化率 $\dot{x}$ 和控制量也分别作类似处理,这样便构造出三组 Fuzzy

集 $\{A_i\}$，$\{B_i\}$，$\{C_i\}$，它们分别表示误差、误差变化率和控制量的 Fuzzy 量化等级.

11.7.2 建立 Fuzzy 控制规则，构造总的控制推理关系

控制规则是 Fuzzy 规则器的核心，其形式为“若 …… ，则 …… ”. 以两个输入（误差 x，误差变化率 $\dot{x}$）和一个输出（控制量 u）的控制为例，其规则一般用复合 Fuzzy 条件语句表示

$$\text{若 } x \text{ 是 } A_i \text{ 且 } \dot{x} \text{ 是 } B_j\text{，则 } u \text{ 是 } C_k$$

或简写为

$$\text{若 } A_i \text{ 且 } B_j\text{，则 } C_k$$

比如，“若炉温偏高且温度上升速率较快，则多吹入冷风”.

控制规则不止一条，但也不会太多. 相同的规则可以合并，但不允许出现矛盾的规则. 所有的规则可以填入一个控制规则表中. 控制规则表使所有的规则一目了然，还可以检查是否有重复和遗漏. 例如，考虑通过调节输入锅炉热量来控制锅炉气压的问题. 压力误差、误差变化率、控制量等的语言值的取法与上述相同. 按实践经验与技术知识以及复合条件语句，得到控制规则表如表 11.7.2 所示.

表 11.7.2 控制规则表

<table>
<tr><th>C_k \ B_j / A_i</th><th>NB</th><th>NM</th><th>NS</th><th>0</th><th>PS</th><th>PM</th><th>PB</th></tr>
<tr><td>NB
NM</td><td colspan="4">PB</td><td>PM</td><td colspan="2">0</td></tr>
<tr><td>NS</td><td colspan="2" rowspan="2">PM</td><td colspan="2">PM</td><td>0</td><td colspan="2" rowspan="2">NM</td></tr>
<tr><td>ZO</td><td>PS</td><td>0</td><td>NS</td></tr>
<tr><td>PS</td><td colspan="2">PS</td><td>0</td><td colspan="4">NM</td></tr>
<tr><td>PM
PB</td><td colspan="2">0</td><td>NM</td><td colspan="4">NB</td></tr>
</table>

每一条控制规则都是一条 Fuzzy 条件语句，所有规则恰好是一个多重复合 Fuzzy 条件语句. 每一条规则对应于一个推理关系

$$R_l = A_i \times B_j \times C_k \tag{11.7.2}$$

即 $\forall x, y, u$，有

$$R_l(x,y,u) = A_i(x) \wedge B_j(y) \wedge C_k(u) \tag{11.7.3}$$

全部 n 条规则对应的 Fuzzy 推理关系 R 为

$$R=\bigcup_{l=1}^{n} R_l \tag{11.7.4}$$

$$R(x,y,u)=\bigvee_{l=1}^{n} R_l(x,y,u) \tag{11.7.5}$$

11.7.3　Fuzzy 控制输出的清晰化

对于给定的一个输入，比如“误差 x 是 A^* 且误差变化率 $\dot{x}$ 是 B^* ”，由总推理关系 R 便得相应的输出控制量 C^*

$$C^*=(A^*\times B^*)\circ R \tag{11.7.6}$$

即 $\forall u\in U$，有　$$C^*(u)=\bigvee_{x,y}(A^*(x)\wedge B^*(y)\wedge R(x,y,u)) \tag{11.7.7}$$

如此得到的输出 C^* 是控制论域上的 Fuzzy 集，C^* 反映了控制语言的模糊性. 然而，最后应采取的控制应当是唯一的，究竟应从中选取哪一个控制量 u^* 施加到被控制对象，则要对 Fuzzy 控制输出进行清晰化处理(defuzzification).

常用的清晰化处理方法有以下几种：

(1)最大隶属度方法　选取 C^* 对应隶属度最大的点 u^* 作为控制输出量，即选取 u^*，使得

$$C^*(u^*)=\bigvee_{u\in U} C^*(u) \tag{11.7.8}$$

若这样的点不唯一，则有：

①最大隶属平均法　取这些点的算术平均值或几何平均值.

②最大中点法　设 $u_{\min}$ 与 $u_{\max}$ 分别是使 $C^*(u)$ 取最大值的最小点与最大点，则

$$u^*=\frac{u_{\min}+u_{\max}}{2} \tag{11.7.9}$$

(2)中位数法　最大隶属度方法只考虑主要信息，若要兼顾其他信息，则可以选用中位数方法，即选取

$$u^*=\min\left\{u' \mid \sum_{u\leqslant u'} C^*(u)\geqslant \frac{1}{2}\sum_{u\in U} C^*(u)\right\} \tag{11.7.10}$$

这种方法能全面考虑，但没有突出主要信息.

(3)加权平均法　取定一组合适的权系数 $\{\omega_u \mid u\in U\}$，则取

$$u^*=\frac{\sum\limits_{u\in U} u\cdot\omega_u}{\sum\limits_{u\in U}\omega_u} \tag{11.7.11}$$

权系数可以根据设计要求和经验来选取，为了方便，取隶属函数 $\omega_u=C^*(u)$ 作

为权系数,即所谓的重心法.

例 11.7.1 设控制是双输入单输出的,控制规则由下面条件语句构成

$$\text{if } x=A_1 \text{ and } \dot{x}=B_1 \text{ then } u=C_1$$

$$\text{if } x=A_1 \text{ and } \dot{x}=B_1 \text{ then } u=C_1$$

这里论域 $X=\{x_1,x_2\}$, $Y=\{y_1,y_2,y_3\}$, $Z=\{z_1,z_2\}$

$$A_1=\frac{0.5}{x_1}+\frac{1}{x_2}$$

$$A_2=\frac{1}{x_1}+\frac{0.5}{x_2}$$

$$B_1=\frac{0.1}{y_1}+\frac{1}{y_2}+\frac{0.6}{y_3}$$

$$B_2=\frac{0.6}{y_1}+\frac{1}{y_2}+\frac{0.1}{y_3}$$

$$C_1=\frac{0.4}{z_1}+\frac{1}{z_2}$$

$$C_1=\frac{1}{z_1}+\frac{0.4}{z_2}$$

$$A_1\times B_1=\begin{bmatrix}0.1 & 0.5 & 0.5\\ 0.1 & 1 & 0.6\end{bmatrix}$$

改写成

$$A_1\times B_1=\begin{bmatrix}0.1\\0.5\\0.5\\0.1\\1\\0.6\end{bmatrix}$$

从而

$$R_1=A_1\times B_1\times C_1=\begin{bmatrix}0.1\\0.5\\0.5\\0.1\\1\\0.6\end{bmatrix}\times(0.4,\ 1)=\begin{bmatrix}0.1 & 0.1\\0.4 & 0.5\\0.4 & 0.5\\0.1 & 0.1\\0.4 & 1\\0.4 & 0.6\end{bmatrix}$$

又

$$A_2 \times B_2 = \begin{bmatrix} 0.6 & 1 & 0.1 \\ 0.5 & 0.5 & 0.1 \end{bmatrix}$$

改写成

$$A_2 \times B_2 = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 1 \\ 0.1 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$

从而

$$R_2 = A_2 \times B_2 \times C_2 = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 1 \\ 0.1 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 0.1 \end{bmatrix} \times (1, 0.4) = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 1 & 0.4 \\ 0.1 & 0.1 \\ 0.5 & 0.4 \\ 0.5 & 0.4 \\ 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$R = R_1 \cup R_2 = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 1 & 0.5 \\ 0.4 & 0.5 \\ 0.5 & 0.4 \\ 0.5 & 1 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$$

又若输入为

$$A^* = \frac{1}{x_1} + \frac{0.5}{x_2}$$

$$B^* = \frac{0.1}{y_1} + \frac{0.5}{y_2} + \frac{1}{y_3}$$

则

$$C = (A^* \times B^*) \times R = (0.1, 0.5, 1.0, 0.1, 0.5, 0.5) \circ \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 1 & 0.5 \\ 0.4 & 0.5 \\ 0.5 & 0.4 \\ 0.5 & 1 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} = (0.5, 0.5).$$

□

Fuzzy 控制是 Fuzzy 逻辑最成功的应用，自从英国学者 E. H. Mamdani (1974)设计出对于发动机的压力与速度的 Fuzzy 控制器以来，Fuzzy 控制技术发展迅速. 从以下几个方面进行了相关的理论研究，如 Fuzzy 控制器性能的研究(Bandemer, Hartmann, 1998; 汪培庄，李洪兴，1996)，基于神经网络的 Fuzzy 控制(汪培庄，李洪兴，1996；赵振宇，徐用懋，1996)，Fuzzy 控制器的结构分析(Buckley, 1992a, b; Moon, 1995; Siler, Ying, 1989; Ying, Siler, et al., 1990; Ying, 1993, 1994; 李洪兴，1995, 1997, 1998)与实用 Fuzzy 控制器的设计(Ross, 1995)等. 关于 Fuzzy 控制的研究还可以查阅相关文献(Special Issue on Modern Fuzzy Control, 1995; Special Issue on Fuzzy Control, 1995; Wang, Chen, et al., 2007). 关于 Fuzzy 推理的研究可以查阅相关文献(Baldwin, 1979, 1981; Dubois, Godo, et al., 1993; Dubois, Prade, 1988a; Dubois, Prade, et al., 1990; Liu, Kerre, 1998; Reddy, Babu, 1992; Yager, 1986, 1988, 1989, 1995; Zadeh, 1973b, 1985, 1987a, b; 应明生, 1989).

第 12 章　Fuzzy 测度与 Fuzzy 积分

我们知道，经典的测度是一种可加性测度，这种测度是事物长度、面积、体积以及质量等的一种抽象表示．在客观实际中，对于事物的度量并不满足可加性，例如，信息处理中信息量的度量，物体的温度等就是这样一种情形．所以建立非可加测度的系统理论对于更加全面而深入地揭示大自然客观事物的本质是非常必要的．1968 年，L. A. Zadeh 完成了他关于 Fuzzy 测度的开创性工作．1974 年，M. Sugeno 对 Fuzzy 测度与 Fuzzy 积分进行了系统的研究．随后许多学者完善了这一理论并将其从不同方面进行了推广．本章研究经典集合上的 Fuzzy 测度与 ⊤ 型 Fuzzy 积分，Fuzzy 集合上的 Fuzzy 测度和 Fuzzy 积分，Fuzzy 集合上的区间值 Fuzzy 测度与 Fuzzy 值 Fuzzy 测度以及相应的 Fuzzy 积分等．这些研究只是初步的，更进一步的内容可以参阅本章后面的相关文献．

§ 12.1　Fuzzy 测度

首先讨论经典集合的 Fuzzy 测度．

定义 12.1.1　设 $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{P}(X)$，若满足条件：

(1) $X \in \mathscr{A}$；

(2) $A \in \mathscr{A} \Rightarrow A^c \in \mathscr{A}$；

(3) $A_n \in \mathscr{A}(n \in \mathbf{N}) \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathscr{A}$.

则称 $\mathscr{A}$ 为 X 上的 σ-代数或 σ-域（σ-algebra）．称 $(X, \mathscr{A})$ 为可测空间（measurable space），$A \in \mathscr{A}$ 称为可测集（measurable set）．

由定义 12.1.1 易知：对 σ-代数 $\mathscr{A}$，有 $\varnothing \in \mathscr{A}$，并且

$$A_n \in \mathscr{A}(n \in \mathbf{N}) \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathscr{A}.$$

定义 12.1.2　(Sugeno, 1974)设 $X \neq \varnothing$，$\mathscr{A} \subseteq \mathscr{P}(X)$，$\mu: \mathscr{A} \to [0,1]$，满足条件：

(1) $\mu(\varnothing) = 0$，$\mu(X) = 1$；

(2) $\forall A,B \in \mathscr{A}$, $A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leqslant \mu(B)$;

(3) $A_n \in \mathscr{A}(n \in \mathbf{N})$, $A_n \nearrow A$ 或 $A_n \searrow A$（见 §1.2），且 $A \in \mathscr{A}$，有

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A).$$

则称 μ 为$(X, \mathscr{A})$或 $\mathscr{A}$ 上的 Fuzzy 测度(fuzzy measure). $(X, \mathscr{A}, \mu)$称为Fuzzy 测度空间(fuzzy measure space). $M_{\mathscr{A}}(X)$ 表示$(X, \mathscr{A})$上的所有 Fuzzy 测度集.

关于 Fuzzy 测度可以作如下解释：设有某个元素 $x \in X$，我们猜测 x 可能属于 $\mathscr{A}$ 的某个元素 A（即有 $A \in \mathscr{A}$，使 $x \in A$）. 但这个猜测是不确定的，是模糊的. μ 就是这个猜测的模糊性的度量. 因此，若 $A=\varnothing$，可以肯定 $x \overline{\in} A$，从而 $\mu(\varnothing)=0$；若 $A=X$，则必有 $x \in A$，故取 $\mu(X)=1$；若 $A \subseteq B$，则 $x \in A$ 的可能性自然比 $x \in B$ 的可能性小，故取 $\mu(A) \leqslant \mu(B)$. 又设 $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_n \subseteq \cdots$，$x \in A_n$ 的可能性是随着 n 的增大而逐步增大的，故 μ 应该是连续的.

在定义 12.1.2 中，条件(1)表示非负有界性，条件(2)为单调性，条件(3)为连续性. 当 X 为有限集时，由条件(2)可以推出条件(3).

例 12.1.1 设 $X=\{a,b\}$, $\mathscr{A}=\mathscr{P}(X)$. 如果

$$\mu_1(A)=\begin{cases}0, & A=\varnothing\\ 0.2, & A=\{a\}\\ 0.4, & A=\{b\}\\ 1, & A=X\end{cases},\quad \mu_2(A)=\begin{cases}0, & A=\varnothing\\ 0.6, & A=\{a\}\\ 0.8, & A=\{b\}\\ 1, & A=X\end{cases}$$

则 $\mu_1, \mu_2 \in M_{\mathscr{A}}(X)$. □

定理 12.1.1 设 $\mu_1, \mu_2 \in M_{\mathscr{A}}(X)$, $A \in \mathscr{A}$. 如果定义 $\mu_1 \cup \mu_2$, $\mu_1 \cap \mu_2$ 如下

$$(\mu_1 \cup \mu_2)(A) = \mu_1(A) \vee \mu_2(A) \tag{12.1.1}$$

$$(\mu_1 \cap \mu_2)(A) = \mu_1(A) \wedge \mu_2(A) \tag{12.1.2}$$

则

$$\mu_1 \cup \mu_2, \mu_1 \cap \mu_2 \in M_{\mathscr{A}}(X) \tag{12.1.3}$$

在 $M_{\mathscr{A}}(X)$ 上定义序关系 $\subseteq$：$\mu_1 \subseteq \mu_2$ 当且仅当 $\forall A \in \mathscr{A}$

$$\mu_1(A) \leqslant \mu_2(A).$$

定理 12.1.2 设 μ 是可测空间$(X, \mathscr{A})$上的 Fuzzy 测度. 则 $\forall A,B \in \mathscr{A}$, $\{A_n \mid n \in \mathbf{N}\} \subseteq \mathscr{A}$，有

(1) $\mu(A \cup B) \geqslant \mu(A) \vee \mu(B)$, $\mu(A \cap B) \leqslant \mu(A) \wedge \mu(B)$;

(2) $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \geqslant \bigvee_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n)$, $\mu\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \leqslant \bigwedge_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n)$.

证明 由于 $A \cup B \supseteq A$, $A \cup B \supseteq B$，及 μ 的单调性，推得 $\mu(A \cup B) \geqslant \mu(A)$, $\mu(A \cup B) \geqslant \mu(B)$. 于是

$$\mu(A \cup B) \geqslant \mu(A) \vee \mu(B).$$

由于 $A\cap B\subseteq A, A\cap B\subseteq B$，及 μ 的单调性，同样可证(1)的第二式和(2). □

直接由定义还可以得到以下定理.

定理 12.1.3　设 μ 是可测空间 $(X, \mathscr{A})$ 上的 Fuzzy 测度. 在 $(X, \mathscr{A})$ 上定义

$$v(A)=1-\mu(A^c) \tag{12.1.4}$$

则 v 也是 $(X, \mathscr{A})$ 上的 Fuzzy 测度. 称 v 是 μ 的对偶 Fuzzy 测度(dual fuzzy measure).

例 12.1.1 中的两个 Fuzzy 测度是对偶的.

§12.2　几种特殊的 Fuzzy 测度

12.2.1　概率测度

定义 12.2.1　设 $X\neq\varnothing$，$\mathscr{A}\subseteq\mathscr{P}(X)$ 是 σ-代数，$P:\mathscr{A}\to[0,1]$ 满足下列两个条件：

(1) $P(X)=1$；

(2) $\forall i\neq j, A_i\cap A_j=\varnothing\Rightarrow P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)$.

则称 P 为 $\mathscr{A}$ 上的概率测度(probability measure). 也称 $(X, \mathscr{A})$ 为概率可测空间(probability measurable space)，$(X, \mathscr{A}, P)$ 为概率测度空间(probability measure space).

定理 12.2.1　概率测度是 Fuzzy 测度.

证明　(1) $P(X)=P(X\cup\varnothing)=P(X)+P(\varnothing)\Rightarrow P(\varnothing)=0$.

(2) $\forall A,B\in\mathscr{A}, A\subseteq B\Rightarrow B=A\cup(B\backslash A)$

$$\Rightarrow P(B)=P(A\cup(B\backslash A))=P(A)+P(B\backslash A)\geqslant P(A).$$

(3) 设 $A_1\subseteq A_2\subseteq\cdots\subseteq A_n\subseteq\cdots$，且 $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$，则

$$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=\lim_{N\to\infty}\left(\bigcup_{n=1}^{N}A_n\right)=\lim_{N\to\infty}A_N$$

及

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=A_1\cup(A_2\backslash A_1)\cup(A_3\backslash A_2)\cup\cdots\cup(A_n\backslash A_{n-1})\cup\cdots.$$

由于 $A_1, A_2\backslash A_1, A_3\backslash A_2, \cdots, A_n\backslash A_{n-1}, \cdots$ 两两不相交，由概率的可列可加性，有

$$\begin{aligned}P(A)&=\lim_{N\to\infty}[P(A_1)+P(A_2\backslash A_1)+P(A_3\backslash A_2)+\cdots+P(A_N\backslash A_{N-1})]\\&=\lim_{N\to\infty}P(A_N)\end{aligned}$$

当 $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_n \supseteq \cdots$，且 $A=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 时，可以类似地证明

$$\lim_{N\to\infty} P(A_N)=P(A). \qquad \square$$

12.2.2 Dirac 测度

定义 12.2.2 设 $X\neq\varnothing$，$\mathscr{A}\subseteq\mathscr{P}(X)$，$a\in X$ 是固定的，$m:\mathscr{A}\to\{0,1\}$，且对于任意 $A\in\mathscr{A}$，满足

$$m(A)=\begin{cases}1, & a\in A\\ 0, & a\overline{\in} A\end{cases} \tag{12.2.1}$$

则称 m 为 Dirac 测度(Dirac measure).

由 Fuzzy 测度的定义直接验证可以得以下定理.

定理 12.2.2 Dirac 测度是 Fuzzy 测度.

12.2.3 λ-Fuzzy 测度

定义 12.2.3 设给定 $\lambda\in(-1,+\infty)$，$\mathscr{A}\subseteq\mathscr{P}(X)$是 σ-代数，$g_\lambda:\mathscr{A}\to[0,1]$ 满足条件：

(1) $g_\lambda(X)=1$；

(2)若 $A,B\in\mathscr{A}$，且 $A\cap B=\varnothing$，则

$$g_\lambda(A\cup B)=g_\lambda(A)+g_\lambda(B)+\lambda g_\lambda(A)g_\lambda(B);$$

(3) g_λ 是连续的.

则称 g_λ 为 $\mathscr{A}$ 上的 λ-Fuzzy 测度(λ-fuzzy measure)，或 g_λ-测度，或 Sugeno 测度.

显然，当 $\lambda=0$ 时，λ-Fuzzy 测度是概率测度. 例 12.1.1 中的 μ_1 是 λ-Fuzzy 测度($\lambda=5$)，μ_2 也是 λ-Fuzzy 测度($\lambda=-1/12$).

定理 12.2.3 λ-Fuzzy 测度是 Fuzzy 测度.

证明 由定义 12.2.3(2)知

$$g_\lambda(X)=g_\lambda(X\cup\varnothing)=g_\lambda(X)+g_\lambda(\varnothing)+\lambda g_\lambda(X)g_\lambda(\varnothing)$$

从而 $g_\lambda(\varnothing)(1+\lambda)=0$. 因为 $\lambda\neq-1$，故只能有 $g_\lambda(\varnothing)=0$.

再证单调性. 设 $A,B\in\mathscr{A}$，则

$$\begin{aligned}A\subseteq B&\Rightarrow B=A\cup(B\backslash A)\\ &\Rightarrow g_\lambda(B)=g_\lambda(A)+g_\lambda(B\backslash A)+\lambda g_\lambda(A)g_\lambda(B\backslash A)\\ &=g_\lambda(A)+(1+\lambda g_\lambda(A))g_\lambda(B\backslash A)\geqslant g_\lambda(A)\ (\text{因 }\lambda>-1).\end{aligned} \qquad \square$$

定理 12.2.4 若 $g:\mathscr{A}\to[0,1]$，$g(X)=1$ 并且是连续的，则对于任意 $\lambda\in(-1,+\infty)$，任取 $A,B\in\mathscr{A}$，$A\cap B=\varnothing$，都有

$$g(A \cup B)=g(A)+g(B)+\lambda g(A)g(B) \tag{12.2.2}$$

的充分必要条件是 g 是关于某个 $x_0 \in X$ 的 Dirac 测度.

证明　取定 $\lambda=0$，则由式(12.2.2)得只要 $A,B\in \mathscr{A}$, $A\cap B=\varnothing$，就有 $g(A\cup B)=g(A)+g(B)$. 从而当 $\lambda\in(-1,+\infty)$ 且 $\lambda\neq 0$ 时，在给定条件下使式(12.2.2)成立的充要条件是，对于任意 $A,B\in\mathscr{A}$ 且 $A\cap B=\varnothing$，则 $g(A)$ 与 $g(B)$ 中至少有一个是零. 这等价于 g 是关于某个 $x_0\in X$ 的 Dirac 测度. □

这说明 Dirac 测度对于任意 $\lambda\in(-1,+\infty)$ 都是 λ-Fuzzy 测度.

定理 12.2.5　设 g_λ 是 σ-代数 $\mathscr{A}\subseteq\mathscr{P}(X)$ 上的 λ-Fuzzy 测度，则：

(1) $g_\lambda(B\backslash A)=\dfrac{g_\lambda(B)-g_\lambda(B\cap A)}{1+\lambda g_\lambda(B\cap A)}$，特别地

$$A\subseteq B\Rightarrow g_\lambda(B\backslash A)=\frac{g_\lambda(B)-g_\lambda(A)}{1+\lambda g_\lambda(A)};$$

(2) $g_\lambda(A^c)=\dfrac{1-g_\lambda(A)}{1+\lambda g_\lambda(A)}$;

(3)若 $h:A\to[0,1]$，且 $h(A)=1-g_\lambda(A^c)$，$\forall A\in A$，$\mu=\dfrac{-\lambda}{1+\lambda}$，则 h 是 μ-Fuzzy测度；

(4)设 $\forall i\neq j$，$A_i\cap A_j=\varnothing$，则当 $\lambda\neq 0$ 时

$$g_\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\frac{1}{\lambda}\left[\prod_{n=1}^{\infty}(1+\lambda g_\lambda(A_n))-1\right] \tag{12.2.3}$$

证明　(1)因 $B=(B\cap A)\cup(B\backslash A)$，$(B\cap A)\cap(B\backslash A)=\varnothing$，我们有

$$\begin{aligned}g_\lambda(B)&=g_\lambda((B\cap A)\cup(B\backslash A))\\&=g_\lambda(B\cap A)+g_\lambda(B\backslash A)[1+\lambda g_\lambda(B\cap A)]\\&\Rightarrow g_\lambda(B\backslash A)=\frac{g_\lambda(B)-g_\lambda(B\cap A)}{1+\lambda g_\lambda(B\cap A)}.\end{aligned}$$

(2)在(1)中取 $B=X$ 即得.

(3)因 $h(X)=1-g_\lambda(X^c)=1-g_\lambda(\varnothing)=1$，$h$ 满足定义 12.2.3(1)．由 g_λ 的连续性易知 h 的连续性. 下证 h 满足定义 12.2.3(2).

设 $A,B\in\mathscr{A}$ 且 $A\cap B=\varnothing$，则

$$\begin{aligned}h(A\cup B)&=1-g_\lambda((A\cup B)^c)=1-\frac{1-g_\lambda(A\cup B)}{1+\lambda g_\lambda(A\cup B)}=\frac{(1+\lambda)g_\lambda(A\cup B)}{1+\lambda g_\lambda(A\cup B)}\\&=\frac{(1+\lambda)(g_\lambda(A)+g_\lambda(B)+\lambda g_\lambda(A)g_\lambda(B))}{1+\lambda(g_\lambda(A)+g_\lambda(B)+\lambda g_\lambda(A)g_\lambda(B))}\\&=\frac{(1+\lambda)[g_\lambda(A)(1+\lambda g_\lambda(B))+g_\lambda(B)(1+\lambda g_\lambda(A))-\lambda g_\lambda(A)g_\lambda(B)]}{(1+\lambda g_\lambda(A))(1+\lambda g_\lambda(B))}\end{aligned}$$

$$= \frac{(1+\lambda)g_\lambda(A)}{1+\lambda g_\lambda(A)} + \frac{(1+\lambda)g_\lambda(B)}{1+\lambda g_\lambda(B)} - \frac{\lambda(1+\lambda)g_\lambda(A)g_\lambda(B)}{(1+\lambda g_\lambda(A))(1+\lambda g_\lambda(B))}$$

$$= 1-\frac{1-g_\lambda(A)}{1+\lambda g_\lambda(A)} + 1 - \frac{1-g_\lambda(B)}{1+\lambda g_\lambda(B)} - \frac{\lambda}{1+\lambda}\left(1-\frac{1-g_\lambda(A)}{1+\lambda g_\lambda(A)}\right)\left(1-\frac{1-g_\lambda(B)}{1+\lambda g_\lambda(B)}\right)$$

$$= 1-g_\lambda(A^c)+1-g_\lambda(B^c)-\frac{\lambda}{1+\lambda}(1-g_\lambda(A^c))(1-g_\lambda(B^c))$$

$$= h(A)+h(B)+\mu h(A)h(B)$$

由 $\lambda > -1$ 知
$$\mu = \frac{-\lambda}{1+\lambda} > -1.$$

(4)设 $\{A_n\} \subseteq \mathscr{A}$，且 $A_i \cap A_j = \varnothing\ (i \neq j)$，则当 $\lambda \neq 0$ 时

$$g_\lambda(A_1 \cup A_2) = g_\lambda(A_1) + g_\lambda(A_2) + \lambda g_\lambda(A_1) g_\lambda(A_2)$$
$$= \frac{1}{\lambda}[(1+\lambda g_\lambda(A_1))(1+\lambda g_\lambda(A_2)) - 1]$$

由数学归纳法，$\forall n \geqslant 2$. 恒有

$$g_\lambda\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \frac{1}{\lambda}\left[\prod_{k=1}^{n}(1+\lambda g_\lambda(A_k)) - 1\right]$$

由 g_λ 的连续性，得

$$g_\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \frac{1}{\lambda}\left[\prod_{n=1}^{\infty}(1+\lambda g_\lambda(A_n)) - 1\right]. \qquad \square$$

定理 12.2.6 设 $A,B \in \mathscr{A}$，g_λ 是 $\mathscr{A}$ 上的 λ-Fuzzy 测度，则有

$$g_\lambda(A \cup B) = \frac{g_\lambda(A)+g_\lambda(B)-g_\lambda(A\cap B)+\lambda g_\lambda(A)g_\lambda(B)}{1+\lambda g_\lambda(A \cap B)} \tag{12.2.4}$$

证明 由于 $A \cup B = A \cup (B \cap A^c)$，$A \cap (B \cap A^c) = \varnothing$，则

$$g_\lambda(A \cup B) = g_\lambda(A) + g_\lambda(B\cap A^c) + \lambda g_\lambda(A) g_\lambda(B \cap A^c)$$
$$= g_\lambda(A) + (1+\lambda g_\lambda(A)) g_\lambda(B \cap A^c) \tag{12.2.5}$$

又 $B = (A \cap B) \cup (B \cap A^c)$，$(A \cap B) \cap (B \cap A^c) = \varnothing$，于是

$$g_\lambda(B) = g_\lambda(A\cap B) + g_\lambda(B \cap A^c) + \lambda g_\lambda(A \cap B) g_\lambda(B\cap A^c)$$
$$= g_\lambda(A\cap B) + (1+\lambda g_\lambda(A \cap B)) g_\lambda(B \cap A^c)$$

即
$$g_\lambda(B \cap A^c) = \frac{g_\lambda(B) - g_\lambda(A\cap B)}{1+\lambda g_\lambda(A\cap B)} \tag{12.2.6}$$

将式(12.2.6)代入式(12.2.5)，得

$$g_\lambda(A \cup B) = g_\lambda(A) + (1+\lambda g_\lambda(A))\frac{g_\lambda(B)-g_\lambda(A\cap B)}{1+\lambda g_\lambda(A\cap B)}$$
$$= \frac{g_\lambda(A)+g(B)-g_\lambda(A\cap B)+\lambda g_\lambda(A)g_\lambda(B)}{1+\lambda g_\lambda(A\cap B)}. \qquad \square$$

定理 12.2.7　设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 是有限集，g_λ 是 $\mathscr{P}(X)$上的 λ-Fuzzy 测度，记 $g_\lambda(\{x_i\})=g_i(i=1,2,\cdots,n)$，则 $\forall A\in\mathscr{P}(X)$

$$g_\lambda(A)=\begin{cases}0, & A=\varnothing\\ \sum\limits_{x_i\in A}g_i, & \lambda=0,A\neq\varnothing\\ \dfrac{1}{\lambda}\left[\prod\limits_{x_i\in A}(1+\lambda g_i)-1\right]=\sum\limits_{B\in P(A)}\left(\lambda^{|B|-1}\prod\limits_{x_i\in B}g_i\right), & \lambda\neq 0,A\neq\varnothing\end{cases}\tag{12.2.7}$$

证明　(1)当 $\lambda=0$ 时，由定义 12.2.3(2)得

$$1=g_\lambda(X)=\sum_{i=1}^{n}g_\lambda(\{x_i\})=\sum_{i=1}^{n}g_i$$

又对于任意 $A\in\mathscr{P}(X)$，若 $A\neq\varnothing$，则

$$g_\lambda(A)=\sum_{x_i\in A}g_i.$$

(2)当 $\lambda\neq 0$ 时，对于任意 $A\in\mathscr{P}(X)$，且 $A\neq\varnothing$，由定理 12.2.5(4)得

$$g_\lambda(A)=\frac{1}{\lambda}\left[\prod_{x_i\in A}(1+\lambda g_i)-1\right]=\sum_{B\in P(A)}\left(\lambda^{|B|-1}\prod_{x_i\in B}g_i\right)$$

定理得证.　□

定理 12.2.8　设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 是有限集，g_λ 是 $\mathscr{P}(X)$上的 λ-Fuzzy 测度，记 $g_\lambda(\{x_i\})=g_i(i=1,2,\cdots,n)$，则等式

$$1+\lambda=\prod_{i=1}^{n}(1+\lambda g_i)\tag{12.2.8}$$

确定了唯一参数 λ，并且

(1) $\sum\limits_{i=1}^{n}g_i<1\Rightarrow\lambda>0$;

(2) $\sum\limits_{i=1}^{n}g_i=1\Rightarrow\lambda=0$;

(3) $\sum\limits_{i=1}^{n}g_i>1\Rightarrow-1<\lambda<0$.

证明　令 $f_k(\lambda)=\prod\limits_{i=1}^{k}(1+\lambda g_i)$，$k=2,3,\cdots,n$. 不失一般性假设 $g_1>0$ 和 $g_2>0$. 由已知条件有 $1+\lambda g_k>0$，$k=1,2,\cdots,n$ 并且 $\lambda>-1$. 因

$$f_k(\lambda)=(1+\lambda g_k)f_{k-1}(\lambda)$$

有

$$f'_k(\lambda)=g_k f_{k-1}(\lambda)+(1+\lambda g_k)f'_{k-1}(\lambda)$$
$$f''_k(\lambda)=2g_k f'_{k-1}(\lambda)+(1+\lambda g_k)f''_{k-1}(\lambda)$$

容易看到，$\forall k\in\{2,3,\cdots,n\}$ 和 $\lambda\in(-1,\infty)$，如果 $f'_{k-1}(\lambda)>0$ 和 $f''_{k-1}(\lambda)>0$，则 $f'_k(\lambda)>0$ 和 $f''_k(\lambda)>0$. 又因为

$$f'_2(\lambda)=g_1(1+\lambda g_2)+g_2(1+\lambda g_1)>0 \text{ 和 } f''_2(\lambda)=2g_1g_2>0$$

所以得到 $f''_k(\lambda)>0$，即函数 $f_n(\lambda)$ 在 $(-1,\infty)$ 内是凹的. 由导数的定义直接得到

$$f'_n(0)=\sum_{i=1}^n g_i$$

注意 $\lim\limits_{\lambda\to\infty}f_n(\lambda)=\infty$，于是得到：

(1)如果 $\sum\limits_{i=1}^n g_i<1$，则 $\lambda\neq 0$，且 $f_n(\lambda)$ 的曲线与直线 $f(\lambda)=1+\lambda$ 在某个 $\lambda>0$ 处有唯一的交点；

(2)如果 $\sum\limits_{i=1}^n g_i=1$，则直线 $f(\lambda)=1+\lambda$ 是 $f_n(\lambda)$ 在 $\lambda=0$ 处的切线；

(3)如果 $\sum\limits_{i=1}^n g_i>1$，则 $\lambda\neq 0$，又因为 $f'_n(\lambda)>0$ 并且对于 $\lambda\leqslant -1$，$f(\lambda)=1+\lambda\leqslant 0$，所以 $f_n(\lambda)$ 的曲线与直线 $f(\lambda)=1+\lambda$ 在某个 $\lambda\in(-1,0)$ 处有唯一的交点. □

例 12.2.1 设 $X=\{a,b,c\}$，$\mu(X)=1$，$\mu(\{a\})=\mu(\{b\})=0.2$，$\mu(\{c\})=0.1$，$\mu$ 是 λ-Fuzzy 测度. 由定理 12.2.8 可以确定 λ 的值. 由等式

$$1+\lambda=(1+0.2\lambda)(1+0.2\lambda)(1+0.1\lambda)$$

即 $0.004\lambda^2+0.08\lambda-0.5=0$，得到 $\lambda=5(\lambda=-25$ 舍去). □

12.2.4 信任测度

定义 12.2.4 称 $\mathrm{Bel}:\mathscr{A}\to[0,1]$ 为信任测度(belief measure)，若：

(1) $\mathrm{Bel}(\varnothing)=0$，$\mathrm{Bel}(X)=1$；

(2) $A,B\in\mathscr{A}$，$\mathrm{Bel}(A\cup B)\geqslant \mathrm{Bel}(A)+\mathrm{Bel}(B)-\mathrm{Bel}(A\cap B)$.

由(2)可得 $\forall A\in\mathscr{A}$，$\mathrm{Bel}(A)+\mathrm{Bel}(A^c)\leqslant 1$. 这一事实说明，由"$x\in A$ 不大可信"这一命题不能得出"$x\in A^c$ 就很可信"的结论. 并且由(2)还可以得到

$$\forall A_1,A_2,\cdots,A_m\in A,\ \mathrm{Bel}\Big(\bigcup_{k=1}^m A_k\Big)\geqslant\sum_{k=1}^m \mathrm{Bel}(A_k)-\sum_{k<l}\mathrm{Bel}(A_k\cap A_l)$$
$$+(-1)^{m-1}\mathrm{Bel}\Big(\bigcap_{k=1}^m A_k\Big)$$

例 12.2.2 设 $m: \mathscr{A} \to [0,1]$ 满足：

(1) $m(\varnothing)=0$；

(2) $\sum\limits_{A \in \mathscr{A}} m(A)=1$.

则

$$\mathrm{Bel}(A)=\sum_{B \subseteq A, B \in \mathscr{A}} m(B)$$

是信任测度.

证明

$$\begin{aligned}\mathrm{Bel}(A \cup B) &= \sum_{\substack{E \subseteq A \cup B \\ E \in \mathscr{A}}} m(E) \geqslant \sum_{\substack{E \subseteq A \text{ or } E \subseteq B \\ E \in \mathscr{A}}} m(E) \\ &\geqslant \sum_{\substack{E \subseteq A \\ E \in \mathscr{A}}} m(E)+\sum_{\substack{E \subseteq B \\ E \in \mathscr{A}}} m(E)-\sum_{\substack{E \subseteq A \cap B \\ E \in \mathscr{A}}} m(E) \\ &= \mathrm{Bel}(A)+\mathrm{Bel}(B)-\mathrm{Bel}(A \cap B).\end{aligned}$$

□

定理 12.2.9 $\forall A, B \in \mathscr{A}, A \subseteq B \Rightarrow \mathrm{Bel}(A) \leqslant \mathrm{Bel}(B)$

证明

$$\begin{aligned}\forall A, B \in \mathscr{A}, A \subseteq B &\Rightarrow B=A \cup (B \backslash A) \\ &\Rightarrow \mathrm{Bel}(B)=\mathrm{Bel}(A \cup (B \backslash A)) \\ &\geqslant \mathrm{Bel}(A)+\mathrm{Bel}(B \backslash A)-\mathrm{Bel}((A \cap (B \backslash A)) \\ &\geqslant \mathrm{Bel}(A).\end{aligned}$$

□

推论 12.2.1 若 X 为有限集，则 σ-代数 $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{P}(X)$ 上的信任测度是 Fuzzy 测度.

证明 设 X 为有限集并且 $A, A_n \in \mathscr{A}(n \in \mathbf{N})$ 满足 $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_n \subseteq \cdots \subseteq A \subseteq X$，$A_n \nearrow A$，则存在 $N \in \mathbf{N}$，使得 $A_N=A$. □

定理 12.2.10 设有限集 $X=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$，$g_\lambda$ 是 $\mathscr{P}(X)$ 上的 λ-Fuzzy 测度，则：

(1) 当 $\lambda \geqslant 0$ 时，g_λ 是信任测度；

(2) 当 g_λ 是信任测度，并且不是 Dirac 测度时，$\lambda \geqslant 0$.

证明 (1) $\forall A, B \in \mathscr{P}(X)$，当 $\lambda=0$ 时，我们有

$$g_\lambda(A \cup B)=g_\lambda(A)+g_\lambda(B) \geqslant g_\lambda(A)+g_\lambda(B)-g_\lambda(A \cap B)$$

这时 $g_\lambda\ (\lambda=0)$ 是信任测度.

当 $\lambda>0$ 时，若 $A=\varnothing$，$g_\lambda(A)=0$. 若 $A \neq \varnothing$，由定理 12.2.7 得

$$g_\lambda(A)=\sum_{B \subseteq A}\Big(\lambda^{|B|-1} \prod_{x_i \in B} g_i\Big)$$

令

$$m(B)=\lambda^{|B|-1} \prod_{x_i \in B} g_i$$

则当 $\lambda>0$ 时，$0 \leqslant m(B) \leqslant 1$，且 $m(\varnothing)=0$. 又

$$\sum_{B\subseteq X} m(B) = \sum_{B\subseteq X}\left(\lambda^{|B|-1}\prod_{x_i\in B} g_i\right) = g_\lambda(X) = 1$$

由例 12.2.2 知，g_λ $(\lambda > 0)$是信任测度.

(2)设 g_λ 是信任测度,并且不是 Dirac 测度,则存在 $k,l\in\{1,2,\cdots,n\}$，$k\neq l$，使得

$$g_k = g_\lambda(\{x_k\}) \neq 0,\quad g_l = g_\lambda(\{x_l\}) \neq 0$$

并且
$$\begin{aligned} g_\lambda(\{x_k\}) + g_\lambda(\{x_l\}) + \lambda g_\lambda(\{x_k\})g_\lambda(\{x_l\}) &= g_\lambda(\{x_k\}\cup\{x_l\}) \\ &\geqslant g_\lambda(\{x_k\}) + g_\lambda(\{x_l\}) - g_\lambda(\{x_k\}\cap\{x_l\}) \\ &= g_\lambda(\{x_k\}) + g_\lambda(\{x_l\}) \end{aligned}$$

故 $\lambda g_\lambda(\{x_k\})g_\lambda(\{x_l\}) \geqslant 0$，这样 $\lambda \geqslant 0$. □

例 12.2.3 设 X 为有限集，m 是关于某个 $x_0\in X$ 的 Dirac 测度,则 m 是 λ-Fuzzy测度 $(\lambda > -1)$，也是信任测度. □

12.2.5 似然测度

定义 12.2.5 称 $Pl:\mathscr{A}\to[0,1]$ 为似然测度(plausibility measure),若:

(1) $Pl(\varnothing)=0, Pl(X)=1$;

(2) $A,B\in\mathscr{A}$，$Pl(A\cup B)\leqslant Pl(A)+Pl(B)-Pl(A\cap B)$.

由(2)可得 $\forall A\in\mathscr{A}$，$Pl(A)+Pl(A^c)\geqslant 1$. 并且由(2)还可以得到

$$\forall A_1,A_2,\cdots,A_m\in\mathscr{A}$$

$$Pl\left(\bigcup_{k=1}^m A_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^m Pl(A_k) - \sum_{k<l} Pl(A_k\cap A_l) + (-1)^{m-1} Pl\left(\bigcap_{k=1}^m A_k\right) \tag{12.2.9}$$

例 12.2.4 设 $m:\mathscr{A}\to[0,1]$ 满足:

(1) $m(\varnothing)=0$;

(2) $\sum_{A\in\mathscr{A}} m(A)=1$.

则 $Pl(A)=\sum_{\substack{B\cap A\neq\varnothing\\ B\in\mathscr{A}}} m(B)$ 是似然测度.

证明 由定义易知 $Pl(\varnothing)=0$，$Pl(X)=1$. $\forall A,B\in\mathscr{A}$,容易验证

$$\begin{aligned} &\{C|C\cap(A\cup B)\neq\varnothing\}\backslash\{C|C\cap(A\cap B)\neq\varnothing\} \\ &=(\{C|C\cap A\neq\varnothing\}\backslash\{C|C\cap(A\cap B)\neq\varnothing\}) \\ &\quad\cup(\{C|C\cap B\neq\varnothing\}\backslash\{C|C\cap(A\cap B)\neq\varnothing\}) \end{aligned}$$

则有

$$
\begin{aligned}
Pl(A\cup B)-Pl(A\cap B) &= \sum_{\substack{C\cap(A\cup B)\neq\varnothing\\ C\in\mathscr{A}}} m(C)-\sum_{\substack{C\cap(A\cap B)\neq\varnothing\\ C\in\mathscr{A}}} m(C)\\
&\leqslant \sum_{\substack{C\cap A\neq\varnothing\\ C\in\mathscr{A}}} m(C)-\sum_{\substack{C\cap(A\cap B)\neq\varnothing\\ C\in\mathscr{A}}} m(C)+\sum_{\substack{C\cap B\neq\varnothing\\ C\in\mathscr{A}}} m(C)-\sum_{\substack{C\cap(A\cap B)\neq\varnothing\\ C\in\mathscr{A}}} m(C)\\
&= Pl(A)+Pl(B)-2Pl(A\cap B)
\end{aligned}
$$

即有 $Pl(A\cup B)\leqslant Pl(A)+Pl(B)-Pl(A\cap B)$. 故 Pl 是似然测度. □

定理 12.2.11　(1)若 $\mathrm{Bel}:\mathscr{A}\to[0,1]$ 为信任测度,则

$$Pl(A)=1-\mathrm{Bel}(A^c) \tag{12.2.10}$$

是似然测度;

(2)若 $Pl:\mathscr{A}\to[0,1]$ $Pl:A\to[0,1]$ 为似然测度,则

$$\mathrm{Bel}(A)=1-Pl(A^c) \tag{12.2.11}$$

是信任测度.

证明　(1) $Pl(\varnothing)=1-\mathrm{Bel}(\varnothing^c)=1-\mathrm{Bel}(X)=0$, $Pl(X)=1-\mathrm{Bel}(X^c)=1$,

$$
\begin{aligned}
Pl(A\cup B)=1-\mathrm{Bel}((A\cup B)^c) &= 1-\mathrm{Bel}(A^c\cap B^c)\\
&\leqslant 1+\mathrm{Bel}(A^c\cup B^c)-\mathrm{Bel}(A^c)-\mathrm{Bel}(B^c)\\
&= Pl(A)+Pl(B)-(1-\mathrm{Bel}((A\cap B)^c))\\
&= Pl(A)+Pl(B)-Pl(A\cap B)
\end{aligned}
$$

所以 Pl 是似然测度.

(2)类似(1)可证. □

定理 12.2.12　$\forall\ A,B\in\mathscr{A}$, $A\subseteq B\Rightarrow Pl(A)\leqslant Pl(B)$.

证明　由定理 12.2.11 知 $\mathrm{Bel}(A)=1-Pl(A^c)$ 为信任测度,再由定理 12.2.9,即信任测度的单调性,我们有

$$
\begin{aligned}
&A\subseteq B\Rightarrow B^c\subseteq A^c\Rightarrow \mathrm{Bel}(B^c)\leqslant \mathrm{Bel}(A^c)\\
&\qquad\Rightarrow 1-Pl(B)\leqslant 1-Pl(A)\Rightarrow Pl(A)\leqslant Pl(B).
\end{aligned}
$$
□

推论 12.2.2　若 X 为有限集,则 σ-代数 $\mathscr{A}\subseteq\mathscr{P}(X)$上的似然测度是 Fuzzy 测度.

定理 12.2.13　设有限集 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$, g_λ 是 $\mathscr{P}(X)$上的 λ-Fuzzy 测度,则:

(1)当 $-1<\lambda\leqslant 0$ 时, g_λ 是似然测度;

(2)当 g_λ 是似然测度,并且不是 Dirac 测度时, $-1<\lambda\leqslant 0$.

证明　由定理 12.2.5(3)与定理 12.2.10 以及 $\mu\geqslant 0\Leftrightarrow -1<\lambda\leqslant 0$ 易证. □

例 12.2.5　设 X 是有限集,且 $m:\mathscr{P}(X)\to[0,1]$, 使得

$$\forall A \in \mathscr{P}(X),\ m(A)=\frac{|A|}{|X|}$$

这里 $|A|$ 表示 A 中所含元素个数. 则容易验证 m 是 $\mathscr{A}=\mathscr{P}(X)$ 上的信任测度和似然测度. □

12.2.6 可能性测度

定义 12.2.6 $\Pi: \mathscr{A} \to [0,1]$ 称为可能性测度(possibility measure),若:

(1) $\Pi(\varnothing)=0,\ \Pi(X)=1$;

(2) $\Pi\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right)=\bigvee_{n=1}^{+\infty} \Pi(A_n)$.

由(2)可知:$\max\{\Pi(A),\ \Pi(A^c)\}=1$.

例 12.2.6 设 $A \in \mathscr{F}(X)$且 $\bigvee_{x\in X} A(x)=1$(即 $ht(A)=1$),记

$$\Pi(B)=\bigvee_{x\in B} A(x),\ B \in \mathscr{P}(X)$$

则Π是 $\mathscr{P}(X)$上的可能性测度. □

定理 12.2.14 $\forall A,B \in \mathscr{A},\ A \subseteq B \Rightarrow \Pi(A) \leqslant \Pi(B)$.

证明 $\forall A,B \in \mathscr{A},\ A \subseteq B$, 由定义 12.2.6(2)得

$$\Pi(B)=\Pi(A \cup B)=\Pi(A) \vee \Pi(B) \geqslant \Pi(A).$$ □

推论 12.2.3 若 X 为有限集,则 σ-代数 $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{P}(X)$上的可能性测度是 Fuzzy 测度.

定理 12.2.15 若 X 为有限集,则 $\mathscr{P}(X)$上的可能性测度是似然测度.

证明 设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$, $\pi_i=\Pi(\{x_i\})$, 且 $0 \leqslant \pi_1 \leqslant \pi_2 \leqslant \cdots \leqslant \pi_n \leqslant 1$. 不妨设$\Pi(A)=\pi_j$, $\Pi(B)=\pi_k$, $\Pi(A \cap B)=\pi_i$. 则 $\pi_i \leqslant \pi_j, \pi_i \leqslant \pi_k$. 若 $\pi_j \leqslant \pi_k$, 则$\Pi(A \cup B)=\pi_k$, 从而

$$\Pi(A \cup B) \leqslant \Pi(A)+\Pi(B)-\Pi(A \cap B)$$

对于 $\pi_j > \pi_k$ 情形类似可证. □

12.2.7 必然性测度

定义 12.2.7 $N: \mathscr{A} \to [0,1]$ 称为必然性测度(necessity measure),若:

(1) $N(\varnothing)=0, N(X)=1$;

(2) $N\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)=\bigwedge_{n=1}^{\infty} N(A_n)$.

由定义 12.2.7(2)可知: $\min\{N(A), N(A^c)\}=0$.

类似定理 12.2.11 可证以下定理.

定理 12.2.16 (1)若 $N: \mathscr{A} \to [0,1]$ 为必然性测度,则

$$\Pi(A)=1-N(A^c) \tag{12.2.12}$$

是可能性测度；

(2)若 $\Pi: A\to[0,1]$ 为可能性测度，则

$$N(A)=1-\Pi(A^c) \tag{12.2.13}$$

是必然性测度.

类似定理 12.2.12 可证以下定理.

定理 12.2.17　$\forall A,B\in\mathscr{A}$，$A\subseteq B\Rightarrow N(A)\leqslant N(B)$.

推论 12.2.4　若 X 为有限集，则 σ-代数 $\mathscr{A}\subseteq\mathscr{P}(X)$ 上的必然性测度是 Fuzzy 测度.

由定理 12.2.15 与定理 12.2.16 可证以下定理.

定理 12.2.18　若 X 为有限集，则 $\mathscr{P}(X)$ 上的必然性测度是信任测度.

§12.3　Fuzzy 积分

设 $(X,\mathscr{A})$ 是可测空间，记

$$\zeta(\mathscr{A})=\{h\in\mathscr{F}(X)\mid h_\alpha=\{x\mid h(x)\geqslant\alpha\}\in\mathscr{A},\alpha\in[0,1]\}.$$

很显然，对于 $h\in\mathscr{F}(X)$，我们有 $h\in\zeta(\mathscr{A})$ 当且仅当 $h_{\bar{\alpha}}=\{x\mid h(x)>\alpha\}\in\mathscr{A}$. 并且，若 $\mathscr{A}=\mathscr{P}(X)$，则 $\forall h\in\mathscr{F}(X)$，$h\in\zeta(\mathscr{A})$.

定义 12.3.1　设 $\mu:\mathscr{A}\to[0,1]$ 是 Fuzzy 测度，$A\in\mathscr{A}$，$h\in\zeta(\mathscr{A})$. h 在 $\mathscr{A}$ 上关于 μ 的 Fuzzy 积分(fuzzy integral)为

$$\int_A h(x)\circ\mu(\cdot)=\bigvee_{E\in\mathscr{A}}\left\{\left(\bigwedge_{x\in E}h(x)\right)\wedge\mu(A\cap E)\right\} \tag{12.3.1}$$

在没有声明的情况下，以下均认为 $A\in\mathscr{A}$，$h\in\zeta(\mathscr{A})$ 并且 $\mu\in M_{\mathscr{A}}(X)$. 下面给出 Fuzzy 积分的另一种表示形式.

定理 12.3.1　Fuzzy 积分可以表示为

$$\int_A h(x)\circ\mu(\cdot)=\bigvee_{\alpha\in[0,1]}\{\alpha\wedge\mu(A\cap h_\alpha)\} \tag{12.3.2}$$

证明　令 $\alpha_E=\bigwedge_{x\in E}h(x)$，则 $E\subseteq\{x\mid h(x)\geqslant\alpha_E\}=h_{\alpha_E}$. 于是

$$\begin{aligned}\bigvee_{E\in\mathscr{A}}\left\{\left(\bigwedge_{x\in E}h(x)\right)\wedge\mu(A\cap E)\right\}&\leqslant\bigvee_{E\in\mathscr{A}}\{\alpha_E\wedge\mu(A\cap h_{\alpha_E})\}\\&\leqslant\bigvee_{\alpha\in[0,1]}\{\alpha\wedge\mu(A\cap h_\alpha)\}\end{aligned}$$

又因为 $\alpha\leqslant\bigwedge_{x\in h_\alpha}h(x)$，则

$$\bigvee_{\alpha\in[0,1]}\{\alpha\wedge\mu(A\cap h_\alpha)\}\leqslant\bigvee_{\alpha\in[0,1]}\{(\bigwedge_{x\in h_\alpha}h(x))\wedge\mu(A\cap h_\alpha)\}$$

$$\leqslant \bigvee_{E\in\mathscr{A}} \{(\bigwedge_{x\in E} h(x)) \wedge \mu(A\cap E)\}$$

则证. □

例 12.3.1 设 $X=[0,1]$，μ 为 X 上的 Lebesgue 测度并且

$$h(x)=-x^2+2x,\ h_\alpha=[1-\sqrt{1-\alpha},1]$$

则

$$\int_X h(x)\circ\mu(\cdot)=\bigvee_{\alpha\in[0,1]}\{\alpha\wedge\mu(h_\alpha)\}$$

$$=\bigvee_{\alpha\in[0,1]}\{\alpha\wedge\sqrt{1-\alpha}\}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\approx 0.62.$$ □

例 12.3.2 设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，μ 是 X 上的 Fuzzy 测度，$h\in\mathscr{F}(X)$，并设 $h(x_1)\geqslant h(x_2)\geqslant\cdots\geqslant h(x_n)$，$A_i=\{x_1,x_2,\cdots,x_i\}$，则

$$\int_X h(x)\circ\mu(\cdot)=\bigvee_{i=1,2,\cdots,n}\{h(x_i)\wedge\mu(A_i)\}.$$ □

定义 12.3.2 设 $\{A_i\mid i=1,2,\cdots,n\}\subseteq\mathscr{P}(X)$ $(n\in\mathbf{N})$，使得

$$A_i\neq\varnothing(\forall i),\ A_i\cap A_j=\varnothing\ (i\neq j),\ \bigcup_{i=1}^n A_i=X$$

而 $\{\alpha_i\mid i=1,2,\cdots,n\}\subset[0,1]$，称函数 $s:X\to[0,1]$ 为 Fuzzy 简单函数，若

$$\forall x\in X,\ s(x)=\bigvee_{i=1}^n\{\alpha_i\wedge\chi_{A_i}(x)\}$$

全体 Fuzzy 简单函数之集为 $\mathscr{S}$.

若 $s\in\mathscr{S}$，记

$$Q_A(s)=\bigvee_{i=1}^n\{\alpha_i\wedge\mu(A\cap A_i)\}\tag{12.3.3}$$

若 $h\in\zeta(\mathscr{A})$，记

$$(S)\int_A h(x)\mathrm{d}\mu=\bigvee_{s\in\mathscr{S}}\{Q_A(s)\mid s\subseteq h\}\tag{12.3.4}$$

Fuzzy 积分符号用 $(S)\int$ 表示，以区别 Lebesgue 积分. 下面的定理给出了 Fuzzy 积分的又一种表示形式.

定理 12.3.2 Fuzzy 积分可以表示为

$$\int_A h(x)\circ\mu(\cdot)=(S)\int_A h(x)\mathrm{d}\mu\tag{12.3.5}$$

证明 设 $E\in\mathscr{A}$，$\alpha_E=\bigwedge_{x\in E} h(x)$，记

$$s_0(x)=\alpha_E\cdot\chi_E(x)$$

则 $s_0\subseteq h$，且 s_0 为 Fuzzy 简单函数，于是

$$Q_A(s_0)=\alpha_E\wedge\mu(A\cap E)$$

$$(S)\int_A h(x)\mathrm{d}\mu\geqslant Q_A(s_0)=\alpha_E\wedge\mu(A\cap E)$$

由 E 的任意性及定理 12.3.1 得

$$(S)\int_A h(x)\mathrm{d}\mu \geqslant \bigvee_{E\in\mathscr{A}} \{\alpha_E \wedge \mu(A\cap E)\} = \int_A h(x)\circ\mu(\cdot) \quad (12.3.6)$$

而另一方面,任取 $s\in\mathscr{S}$,设 $s(x)=\bigvee_{i=1}^{n}\{\alpha_i \wedge \chi_{A_i}(x)\}$,$(x\in X)$,且 $s\subseteq h$. 则存在 $i_0\in\{1,2,\cdots,n\}$,使

$$Q_A(s)=\bigvee_{i=1}^{n}\{\alpha_i \wedge \mu(A\cap A_i)\}=\alpha_{i_0} \wedge \mu(A\cap A_{i_0})$$

又由 $s\subseteq h$ 推出 $\alpha_{i_0}\leqslant \bigwedge_{x\in A_{i_0}} h(x)$,于是

$$Q_A(s)\leqslant \left(\bigwedge_{x\in A_{i_0}} h(x)\right)\wedge \mu(A\cap A_{i_0})\leqslant \bigvee_{E\in\mathscr{A}}\left\{\left(\bigwedge_{x\in E} h(x)\right)\wedge\mu(A\cap E)\right\}$$

$$=\int_A h(x)\circ\mu(\cdot) \quad (12.3.7)$$

由式(12.3.6)与式(12.3.7)即得式(12.3.5). □

定理 12.3.3 Fuzzy 积分具有下列性质:$A,B\in\mathscr{A}$,$h,h_1,h_2\in\zeta(\mathscr{A})$,$\mu$,$\mu_1,\mu_2\in M_{\mathscr{A}}(X)$,

(1) $0\leqslant (S)\int_A h(x)\mathrm{d}\mu\leqslant 1$;

(2) $h_1\leqslant h_2 \Rightarrow (S)\int_A h_1(x)\mathrm{d}\mu \leqslant (S)\int_A h_2(x)\mathrm{d}\mu$;

(3) $A\subseteq B\Rightarrow (S)\int_A h(x)\mathrm{d}\mu\leqslant (S)\int_B h(x)\mathrm{d}\mu$;

(4) $\mu_1\subseteq\mu_2\Rightarrow (S)\int_A h(x)\mathrm{d}\mu_1 \leqslant (S)\int_A h(x)\mathrm{d}\mu_2$;

(5) $\mu(A)=0\Rightarrow (S)\int_A h(x)\mathrm{d}\mu=0$;

(6) $(S)\int_A h(x)\mathrm{d}\mu=0\Rightarrow \mu(A\cap\{x|h(x)>0\})=0$;

(7) $(S)\int_A c\,\mathrm{d}\mu=c\wedge\mu(A)$ $(c\in[0,1])$;

(8) $(S)\int_A (h(x)+c)\mathrm{d}\mu\leqslant (S)\int_A h(x)\mathrm{d}\mu+(S)\int_A c\,\mathrm{d}\mu\left(0\leqslant c\leqslant 1-\bigvee_{x\in X}h(x)\right)$;

(9) $(S)\int_X (a\vee h(x))\mathrm{d}\mu=a\vee (S)\int_X h(x)\mathrm{d}\mu$, $0\leqslant a\leqslant 1$;

(10) $(S)\int_A h(x)\mathrm{d}\mu=(S)\int_X (\chi_A(x)\wedge h(x))\mathrm{d}\mu$;

(11) $(S)\int_A (h_1\cup h_2)(x)\mathrm{d}\mu\geqslant (S)\int_A h_1(x)\mathrm{d}\mu \vee (S)\int_A h_2(x)\mathrm{d}\mu$;

(12) $(S)\int_A (h_1 \cap h_2)(x)\mathrm{d}\mu \leqslant (S)\int_A h_1(x)\mathrm{d}\mu \wedge (S)\int_A h_2(x)\mathrm{d}\mu$;

(13) $(S)\int_{A\cup B} h(x)\mathrm{d}\mu \geqslant (S)\int_A h(x)\mathrm{d}\mu \vee (S)\int_B h(x)\mathrm{d}\mu$;

(14) $(S)\int_{A\cap B} h(x)\mathrm{d}\mu \leqslant (S)\int_A h(x)\mathrm{d}\mu \wedge (S)\int_B h(x)\mathrm{d}\mu$.

证明 只证(6),(8)和(9),其他容易证明.

(6)设 $\mu(A \cap \{x|h(x)>0\})=c>0$. 因为

$$A \cap \{x|h(x) \geqslant \frac{1}{n}\} \nearrow A \cap \{x|h(x)>0\}$$

所以由 Fuzzy 测度的连续性,有

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(A \cap \left\{x|h(x) \geqslant \frac{1}{n}\right\}\right)=c$$

于是存在 n_0 使得

$$\mu(A \cap h_{1/n_0})=\mu\left(A \cap \left\{x|h(x) \geqslant \frac{1}{n_0}\right\}\right) \geqslant \frac{c}{2}$$

因此有

$$(S)\int_A h(x)\mathrm{d}\mu=\bigvee_{\alpha\in[0,1]} \{\alpha \wedge \mu(A \cap h_\alpha)\} \geqslant \frac{1}{n_0} \wedge \frac{c}{2}>0$$

这与 $(S)\int_A h(x)\mathrm{d}\mu=0$ 矛盾.

(8)如果 $0 \leqslant c \leqslant 1-\bigvee_{x\in X} h(x)$, 则 $0 \leqslant h(x)+c \leqslant 1$, 于是

$$\begin{aligned}(S)\int_A (h(x)+c)\mathrm{d}\mu &= \bigvee_{F\in\mathscr{A}} \left\{\bigwedge_{x\in F} (h(x)+c) \wedge \mu(A \cap F)\right\}\\
&= \bigvee_{F\in\mathscr{A}} \left\{\left(\bigwedge_{x\in F} h(x)+c\right) \wedge \mu(A \cap F)\right\}\\
&\leqslant \bigvee_{F\in\mathscr{A}} \left\{\left(\bigwedge_{x\in F} h(x) \wedge \mu(A \cap F)\right)+(c \wedge \mu(A \cap F))\right\}\\
&\leqslant \bigvee_{F\in\mathscr{A}} \left\{\left(\bigwedge_{x\in F} h(x) \wedge \mu(A \cap F)\right)+(c \wedge \mu(A))\right\}\\
&= \bigvee_{F\in\mathscr{A}} \left\{\left(\bigwedge_{x\in F} h(x)\right) \wedge \mu(A \cap F)\right\}+c \wedge \mu(A)\\
&= (S)\int_A h(x)\mathrm{d}\mu+(S)\int_A c\,\mathrm{d}\mu\end{aligned}$$

(9)由定理 12.3.1 得

$$(S)\int_X (a \vee h(x))\mathrm{d}\mu=\bigvee_{\alpha\in[0,1]} \{\alpha \wedge \mu(X \cap (a \vee h)_\alpha)\}$$

而

$$(a \vee h)_\alpha = \begin{cases} X, & \alpha \leqslant a \\ h_\alpha, & \alpha > a \end{cases}$$

故有

$$\begin{aligned}(S)\int_X (a \vee h(x))\mathrm{d}\mu &= \left(\bigvee_{\alpha\in[0,a]} \{\alpha \wedge \mu(X \cap X)\}\right) \vee \left(\bigvee_{\alpha\in[a,1]} \{\alpha \wedge \mu(X \cap h_\alpha)\}\right) \\ &= (a \wedge \mu(X)) \vee \left(\bigvee_{\alpha\in[0,1]} \{\alpha \wedge \mu(X \cap h_\alpha)\}\right) \\ &= a \vee (S)\int_X h(x)\mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

□

注 1. 定理 12.3.3(8)的证明使用了不等式 $(a+b) \wedge c \leqslant a \wedge c + b \wedge c$, $\forall a,b,c \in [0,1]$;

注 2. $(S)\int_X (a \wedge h(x))\mathrm{d}\mu = a \wedge (S)\int_X h(x)\mathrm{d}\mu$ 不一定成立. 事实上,因为

$$(a \wedge h)_\alpha = \begin{cases} h_\alpha, & a \geqslant \alpha \\ \varnothing, & a < \alpha \end{cases}$$

我们有

$$\begin{aligned}(S)\int_A (a \wedge h(x))\mathrm{d}\mu &= \bigvee_{\alpha\in[0,1]} \{\alpha \wedge \mu(A \cap (a \wedge h)_\alpha)\} \\ &= \bigvee_{\alpha\in[0,a]} \{\alpha \wedge \mu(A \cap h_\alpha)\}.\end{aligned}$$

注 3. $(S)\int_X (ah(x))\mathrm{d}\mu = a(S)\int_X h(x)\mathrm{d}\mu$ 不一定成立. 看下面的例子.

例 12.3.3　设 $X=[0,1]$, μ 是 Lebesgue 测度. 取 $h(x)=x, x \in X$ 并且 $a=\frac{1}{2}$. 则

$$\begin{aligned}(S)\int_X (ah(x))\mathrm{d}\mu &= (S)\int_X \frac{x}{2}\mathrm{d}\mu = \bigvee_{\alpha\in[0,1]} \left\{\alpha \wedge \mu\left(\left\{x \mid \frac{x}{2} \geqslant \alpha\right\}\right)\right\} \\ &= \bigvee_{\alpha\in[0,0.5]} \{\alpha \wedge (1-2\alpha)\} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a(S)\int_X h(x)\mathrm{d}\mu &= \frac{1}{2}(S)\int_X x\,\mathrm{d}\mu = \frac{1}{2} \bigvee_{\alpha\in[0,1]} \{\alpha \wedge \mu(\{x \mid x \geqslant \alpha\})\} \\ &= \frac{1}{2} \bigvee_{\alpha\in[0,1]} \{\alpha \wedge (1-\alpha)\} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\end{aligned}$$

故

$$(S)\int_X (ah(x))\mathrm{d}\mu \neq a(S)\int_X h(x)\mathrm{d}\mu.$$

□

定理 12.3.4　设 $h \in \zeta(\mathscr{A})$, $A \in \mathscr{A}$, $\mu \in M_{\mathscr{A}}(X)$, 则

$$(S)\int_A h(x)\mathrm{d}\mu = (S)\int_0^1 \mu(A \cap h_\alpha)\mathrm{d}\alpha \tag{12.3.8}$$

其中 α 是[0,1]上的 Lebesgue 测度,并且 $(S)\int_0^1 \mu(A \cap h_\alpha)\mathrm{d}\alpha$ 也是一个 Fuzzy

积分.

证明 只需证 $A=X$ 的情形. 为此只要证

$$(S)\int_0^1 f(\alpha)\mathrm{d}\alpha=\bigvee_{\alpha\in[0,1]}\{\alpha\wedge f(\alpha)\}$$

其中 $f(\alpha)=\mu(h_\alpha)$. 对于任意 $\alpha_0\in[0,1]$, 令

$$s_0(\alpha)=f(\alpha_0)\chi_{[0,\alpha_0]}(\alpha)$$

则 $s_0\subseteq f$, 且

$$Q(s_0)=f(\alpha_0)\wedge\alpha_0\leqslant\bigvee_{s\leqslant f}Q(s)=(S)\int_0^1 f(\alpha)\mathrm{d}\alpha$$

于是

$$\bigvee_{\alpha\in[0,1]}\{\alpha\wedge f(\alpha)\}\leqslant(S)\int_0^1 f(\alpha)\mathrm{d}\alpha$$

令 $s\subseteq f$, 且

$$s(\alpha)=\bigvee_{i=1}^n\{\alpha_i\wedge\chi_{A_i}(\alpha)\}$$

则

$$Q(s)=\bigvee_{i=1}^n\{\alpha_i\wedge\alpha(A_i)\}=\alpha_{i_0}\wedge\alpha(A_{i_0})$$

令 $\beta=\sup A_{i_0}$, 则 $A_{i_0}\subseteq[0,\beta]$, 于是 $\alpha(A_{i_0})\leqslant\beta$, 而 $\alpha_{i_0}\leqslant f(\alpha)$ $(\alpha\in A_{i_0})$, $f(\alpha)$ 是左连续的,则

$$Q(s)\leqslant\alpha_{i_0}\wedge\beta\leqslant f(\beta)\wedge\beta\leqslant\bigvee_{\alpha\in[0,1]}\{\alpha\wedge f(\alpha)\}$$

于是 $(S)\int_0^1 f(\alpha)\mathrm{d}\alpha=\bigvee_{\alpha\in[0,1]}\{\alpha\wedge f(\alpha)\}=\bigvee_{\alpha\in[0,1]}\{\alpha\wedge\mu(h_\alpha)\}=\int_A h(x)\mathrm{d}\mu.$

□

定理 12.3.5 设 $\{\mu_n(n\in\mathbf{N}),\mu\}\subset M_{\mathscr{A}}(X)$, 如果 $\forall h\in\zeta(\mathscr{A})$

$$\lim_{n\to+\infty}(S)\int_X h(x)\mathrm{d}\mu_n=(S)\int_X h(x)\mathrm{d}\mu \tag{12.3.9}$$

则 $\mu_n\to\mu$.

证明 对任意 $A\in\mathscr{A}$, 令 $h(x)=\chi_A(x)$, 即 A 的特征函数,则

$$(S)\int_X\chi_A(x)\mathrm{d}\mu_n=\mu_n(A),\quad(S)\int_X\chi_A(x)\mathrm{d}\mu=\mu(A)$$

这样结论成立. □

定理 12.3.6 设 $h_n,h\in\zeta(\mathscr{A})$ 且 $\{h_n\}$ 单调收敛于 $h:X\to[0,1]$. 则 $\forall A\in\mathscr{A}$, 有

$$\lim_{n\to\infty}(S)\int_A h_n(x)\mathrm{d}\mu=(S)\int_A h(x)\mathrm{d}\mu \tag{12.3.10}$$

证明 设 $\{h_n\}$ 单调增加收敛于 h, 则数列 $(S)\int_A h_n(x)\mathrm{d}\mu$ 也单调增加,且有上界 1,从而有极限. 设

$$a = \lim_{n \to \infty} (S) \int_A h_n(x) \mathrm{d}\mu$$

从而

$$\forall n \in \mathbf{N},\ (S)\int_A h_n(x)\mathrm{d}\mu \leqslant (S)\int_A h(x)\mathrm{d}\mu \Rightarrow a \leqslant (S)\int_A h(x)\mathrm{d}\mu$$

又设 $s \in \mathscr{S}$, $s \leqslant h$, 且 $s(x) = \bigvee_{i=1}^{n} \{\alpha_i \wedge \chi_{A_i}(x)\}\ (x \in X)$

对于任意 $c \in (0,1)$, 令 $E_k = \{x \in A \mid h_k(x) \geqslant c \wedge s(x)\}$. 则 $E_k \subseteq E_{k+1}$, $\bigcup_{k \in \mathbf{N}} E_k = A$, 且

$$Q_{E_k}(c \wedge s) \leqslant (S)\int_{E_k} (c \wedge s(x))\mathrm{d}\mu \leqslant (S)\int_{E_k} h_k(x)\mathrm{d}\mu$$
$$\leqslant (S)\int_A h_k(x)\mathrm{d}\mu \leqslant \alpha \tag{12.3.11}$$

又由于

$$\lim_{k \to +\infty} Q_{E_k}(c \wedge s) = \lim_{k \to +\infty} \bigvee_{i=1}^{n} \{\alpha_i \wedge c \wedge \mu(E_k \cap A_i)\} = Q_A(c \wedge s)$$

而且易知, $\lim_{c \to 1^-} Q_A(c \wedge s) = Q_A(s)$, 故由式(12.3.11)得, $Q_A(s) \leqslant a$, 即

$$\bigvee_{s \in \mathscr{S}, s \leqslant h} \{Q_A(s)\} \leqslant a$$

这样

$$\lim_{n \to +\infty} (S)\int_A h_n(x)\mathrm{d}\mu = (S)\int_A h(x)\mathrm{d}\mu$$

同理可证, $\{h_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ 单调减时式(12.3.10)成立. □

定理 12.3.7 设 $\{\mu_n(n \in \mathbf{N}), \mu\} \subset M_{\mathscr{A}}(X)$, $h \in \zeta(\mathscr{A})$ 并且 $A \in \mathscr{A}$. 如果 $\mu_n \nearrow \mu$ ($\mu_n \searrow \mu$), 即 $\forall A \in \mathscr{A}$ 有 $\mu_1(A) \leqslant \mu_2(A) \leqslant \cdots \leqslant \mu_n(A) \leqslant \cdots$, ($\mu_1(A) \geqslant \mu_2(A) \geqslant \cdots \geqslant \mu_n(A) \geqslant \cdots$), 并且 $\mu_n \to \mu$, 则

$$(S)\int_A h(x)\mathrm{d}\mu_n \nearrow (S)\int_A h(x)\mathrm{d}\mu\ \left((S)\int_A h(x)\mathrm{d}\mu_n \searrow (S)\int_A h(x)\mathrm{d}\mu \right) \tag{12.3.12}$$

证明 由定理 12.3.4, 我们有

$$(S)\int_A h(x)\mathrm{d}\mu_n = (S)\int_0^1 \mu_n(A \cap h_\alpha)\mathrm{d}\alpha$$
$$(S)\int_A h(x)\mathrm{d}\mu = (S)\int_0^1 \mu(A \cap h_\alpha)\mathrm{d}\alpha$$

因 $\mu_n \nearrow \mu$ (或 $\mu_n \searrow \mu$), 所以由定理 12.3.6 易知结论成立. □

定理 12.3.8 设 $\{\mu_n(n \in \mathbf{N}), \mu\} \subset M_{\mathscr{A}}(X)$, $h \in \zeta(\mathscr{A})$ 并且 $A \in \mathscr{A}$. 如果 $\mu_n \to \mu$, 则

$$(S)\int_A h(x)\mathrm{d}\mu_n \to (S)\int_A h(x)\mathrm{d}\mu \tag{12.3.13}$$

推论 12.3.1 设 $\{\mu_n(n\in \mathbf{N}),\mu\}\subset M_{\mathscr{A}}(X)$，则 $\mu_n\to\mu$ 当且仅当 $\forall h\in \zeta(\mathscr{A})$

$$\lim_{n\to+\infty}(S)\int_X h(x)\mathrm{d}\mu_n=(S)\int_X h(x)\mathrm{d}\mu \qquad (12.3.14)$$

定理 12.3.9 设 $\{\mu_n(n\in \mathbf{N}),\mu\}\subset M_{\mathscr{A}}(X)$，$\{h_n(n\in \mathbf{N}),h\}\subset\zeta(\mathscr{A})$ 并且 $A\in\mathscr{A}$. 如果 $h_n\nearrow h,\mu_n\nearrow\mu(h_n\searrow h,\mu_n\searrow\mu)$，则

$$(S)\int_A h_n(x)\mathrm{d}\mu_n\nearrow(S)\int_A h(x)\mathrm{d}\mu\left((S)\int_A h_n(x)\mathrm{d}\mu_n\searrow(S)\int_A h(x)\mathrm{d}\mu\right) \qquad (12.3.15)$$

证明 设 $h_n\nearrow h,\mu_n\nearrow\mu$，则对于固定的 n，由定理 12.3.6 得到

$$(S)\int_A h_m(x)\mathrm{d}\mu_n\nearrow(S)\int_A h(x)\mathrm{d}\mu_n$$

再由定理 12.3.7，有

$$(S)\int_A h(x)\mathrm{d}\mu_n\nearrow(S)\int_A h(x)\mathrm{d}\mu$$

由此

$$\lim_{m\to+\infty}\lim_{n\to+\infty}(S)\int_A h_m(x)\mathrm{d}\mu_n=(S)\int_A h(x)\mathrm{d}\mu$$

因 $h_n\nearrow h,\mu_n\nearrow\mu$ 同时成立，并且 $(S)\int_A h_n(x)\mathrm{d}\mu_n$ 单调增加，所以 $\lim\limits_{n\to+\infty}(S)\int_A h_n(x)\mathrm{d}\mu_n$ 存在. 由此得到

$$\lim_{n\to+\infty}(S)\int_A h_n(x)\mathrm{d}\mu_n=\lim_{m\to+\infty}\lim_{n\to+\infty}(S)\int_A h_m(x)\mathrm{d}\mu_n=(S)\int_A h(x)\mathrm{d}\mu$$

对于 $h_n\searrow h,\mu_n\searrow\mu$ 可以类似证明. □

设$(X,\mathscr{A})$是可测空间，$h\in\zeta(\mathscr{A})$，则由 Fuzzy 集截集的性质易验证，$\forall\alpha\in(0,1]$，有

$$h_\alpha=\lim_{\lambda\to\alpha^-}h_\lambda\triangleq h_{\alpha^-}，h_{\bar{\alpha}}=\lim_{\lambda\to\alpha^+}h_\lambda\triangleq h_{\alpha^+}$$

定理 12.3.10 设 $h\in\zeta(\mathscr{A})$，而 $A\in\mathscr{A}$，则

$$(S)\int_A h(x)\mathrm{d}\mu=\beta\Leftrightarrow\mu(A\cap h_{\bar{\beta}})\leqslant\beta\leqslant\mu(A\cap h_\beta) \qquad (12.3.16)$$

证明 必要性 设 $(S)\int_A h(x)\mathrm{d}\mu=\beta$，则由式(12.3.2)有

$$\beta=\left(\bigvee_{\alpha\leqslant\beta}\{\alpha\wedge\mu(A\cap h_\alpha)\}\right)\vee\left(\bigvee_{\alpha>\beta}\{\alpha\wedge\mu(A\cap h_\alpha)\}\right)$$

下面证明

$$\lambda_0\triangleq\bigvee_{\alpha\leqslant\beta}\{\alpha\wedge\mu(A\cap h_\alpha)\}\geqslant\beta$$

事实上，若 $\lambda_0<\beta$，则有 $\mu(A\cap h_\beta)<\beta$，而且由条件得

$$\bigvee_{\alpha\leqslant\beta}\{\alpha\wedge\mu(A\cap h_\alpha)\}<\bigvee_{\alpha>\beta}\{\alpha\wedge\mu(A\cap h_\alpha)\}=\beta \qquad (12.3.17)$$

故
$$\beta>\mu(A\cap h_\beta)\geqslant\bigvee_{\alpha>\beta}\mu(A\cap h_\beta)$$

且 $\bigvee_{\alpha>\beta}\{\mu(A\cap h_\alpha)\}\leqslant\mu(A\cap h_\beta)=\beta\wedge\mu(A\cap h_\beta)\leqslant\bigvee_{\alpha\leqslant\beta}\{\alpha\wedge\mu(A\cap h_\alpha)\}$

从而

$$\bigvee_{\alpha\leqslant\beta}\{\alpha\wedge\mu(A\cap h_\alpha)\}\geqslant\bigvee_{\alpha>\beta}\{\alpha\wedge\mu(A\cap h_\alpha)\}$$

这与式(12.3.17)矛盾．故 $\lambda_0\geqslant\beta$. 又考虑到

$$\lim_{\alpha\to\lambda_0^-}\mu(A\cap h_\alpha)=\mu(A\cap h_{\lambda_0})\geqslant\lambda_0,\quad\bigvee_{\alpha>\lambda_0}\{\alpha\wedge\mu(A\cap h_\alpha)\}\leqslant\lambda_0$$

得
$$\alpha>\lambda_0\Rightarrow\mu(A\cap h_\alpha)\leqslant\lambda_0$$

这样
$$\mu(A\cap h_{\lambda_0}^-)=\lim_{\alpha\to\lambda_0^+}\mu(A\cap h_\alpha)\leqslant\lambda_0$$

必要性得证.

充分性　设 $\mu(A\cap h_\beta^-)\leqslant\beta\leqslant\mu(A\cap h_\beta)$，则考虑到 $\alpha>\beta\Rightarrow h_\alpha\subseteq h_\beta^-$，有

$$\mu(A\cap h_\alpha)\leqslant\mu(A\cap h_\beta^-)\leqslant\beta$$

从而

$$\begin{aligned}(S)\int_A h(x)\mathrm{d}\mu&=\bigvee_{\alpha\in[0,1]}\{\alpha\wedge\mu(A\cap h_\alpha)\}\\&=\Big(\bigvee_{\alpha\leqslant\beta}\{\alpha\wedge\mu(A\cap h_\alpha)\}\Big)\vee\Big(\bigvee_{\alpha>\beta}\{\alpha\wedge\mu(A\cap h_\alpha)\}\Big)\\&\leqslant\beta\vee\beta=\beta\end{aligned}$$

而另一方面

$$(S)\int_A h(x)\mathrm{d}\mu=\bigvee_{\alpha\in[0,1]}\{\alpha\wedge\mu(A\cap h_\alpha)\}\geqslant\beta\wedge\mu(A\cap h_\beta)=\beta$$

从而
$$(S)\int_A h(x)\mathrm{d}\mu=\beta.$$
□

由定理 12.3.10 容易证明下面的定理.

定理 12.3.11　设 $h\in\zeta(\mathscr{A})$，而 $A\in\mathscr{A}$，则

$$(S)\int_A h(x)\mathrm{d}\mu=\bigvee_{\alpha\in[0,1]}\{\alpha\wedge\mu(A\cap h_{\bar\alpha})\} \qquad (12.3.18)$$

下面的例子给出了 Fuzzy 积分在医疗诊断上的应用.

例 12.3.4　在某个建立的诊断系统中考虑了 6 种疾病症状的集合 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_6\}$，并利用 λ-Fuzzy 测度对疾病 A,B 建立了如下的数学模型

$$g_\lambda(x_1),g_\lambda(x_2),g_\lambda(x_3),g_\lambda(x_4),g_\lambda(x_5),g_\lambda(x_6)$$

疾病 A:　$\lambda_1=-0.86,0.09,0.18,0.314,0.494,0.359,0.449$

疾病 B:　$\lambda_2=-0.93,0.185,0.278,0.649,0.324,0.463,0.371$

如果有病人甲、乙,其症状诊断分别为

$$h_1=(0.4,0.3,0.2,0.1,0.2,0.1)$$

$$h_2=(0.3,0.4,0.2,0.3,0.4,0.2)$$

试问甲、乙分别患 A, B 中的哪种疾病?

将 h_1,h_2 视为 $X\to[0,1]$ 的函数,分别利用 h_1,h_2 对应疾病的测度加权求和,数值大的即表示患者患有相应的疾病. 即求

$$(S)\int_X h_1 \mathrm{d}g_{\lambda_1},\ (S)\int_X h_2 \mathrm{d}g_{\lambda_1},\ (S)\int_X h_1 \mathrm{d}g_{\lambda_2},\ (S)\int_X h_2 \mathrm{d}g_{\lambda_2}$$

容易验证

$$\prod_{i=1}^{6}(1+\lambda_1 g_{\lambda_1}(\{x_i\}))=1+\lambda_1,\quad \prod_{i=1}^{6}(1+\lambda_2 g_{\lambda_2}(\{x_i\}))=1+\lambda_2$$

故

$$(S)\int_X h_1(x)\mathrm{d}g_{\lambda_1}=\bigvee_{\alpha\in[0,1]}\{\alpha\wedge g_{\lambda_1}(h_{1\alpha})\}=0.26$$

同理可以计算 $(S)\int_X h_1(x)\mathrm{d}g_{\lambda_2}=0.3$. 由此可以诊断甲患有疾病 B. 有

$$(S)\int_X h_2(x)\mathrm{d}g_{\lambda_1}=0.4,\quad (S)\int_X h_2(x)\mathrm{d}g_{\lambda_2}=0.4$$

A,B 两种疾病在乙的身上表现基本相同,由此可以诊断乙患有疾病 A 或 B,应作进一步的诊断. □

下面的例子给出了 Fuzzy 积分在评价中的应用.

例 12.3.5 我们拟评价 3 台电视机. 为了方便起见,我们只考虑两个质量因素:"图像"与"声音",它们分别用 x_1 和 x_2 表示,并且相应的权重是 $w_1=0.7$ 和 $w_2=0.3$. 现在,一个评判者给出了每台电视机的每一个质量因素的评分如表 12.3.1 所示.

表 12.3.1

电视机编号	x_1	x_2
1	1	0
2	0	1
3	0.45	0.45

利用加权平均型 Fuzzy 综合评判函数(见 § 6.3),我们得到 3 台电视机的综合评价

$$b_1 = w_1 \times 1 + w_2 \times 0 = 0.7$$
$$b_2 = w_1 \times 0 + w_2 \times 1 = 0.3$$
$$b_3 = w_1 \times 0.45 + w_2 \times 0.45 = 0.45.$$

按照上述结果，第一台电视机是最好的．这是很难让人接受的，因为这不符合人的直觉：一台没有声音的电视机即便有很好的画质，也是完全不实用的．产生这种违反直觉的结果是因为选择了不恰当的权重，认识这一点是很重要的．例如，如果我们选权重 $w_1 = 0.4$ 和 $w_2 = 0.6$，这样用同样的方法得到的评价结果是 $b_1 = 0.4$，$b_2 = 0.6$ 和 $b_3 = 0.45$．这时，第二台电视机被认为是最好的．这同样是不符合人的直觉：一台有优质的声音而没有图像的电视机不是一台真正的电视机，那只能算是一台收音机．按照我们的直觉，我们认为第三台电视机是最好的．这是因为第三台电视机在这三台电视机中是最实用的，即便第三台电视机的图像和声音都不是很好．

这一问题的症结是加权平均方法是建立在评价因素是相互独立的假设基础上的．即将它们的影响看成是可加的．然而，在某些实际问题中这是不合理的．在上述例子中，图像和声音结合的重要性比单独图像的重要性与声音的重要性之和要高得多．如果我们采用一个 Fuzzy 测度来刻画这两个因素的重要性，相应的积分作为 3 台电视机质量的综合评价．例如，假设重要性测度为 $\mu(\{x_1\}) = 0.3$，$\mu(\{x_2\}) = 0.1$，$\mu(X) = 1$，$\mu(\varnothing) = 0$，这里 $X = \{x_1, x_2\}$．显见 μ 是 $\mathscr{P}(X)$ 上的一个 Fuzzy 测度．利用 Fuzzy 积分，我们获得下列综合评价

$$b_1 = (S)\int_X h_1 \mathrm{d}\mu = (1 \wedge 0.3) \vee (0 \wedge 1) = 0.3$$
$$b_2 = (S)\int_X h_2 \mathrm{d}\mu = (1 \wedge 0.1) \vee (0 \wedge 1) = 0.1$$
$$b_3 = (S)\int_X h_3 \mathrm{d}\mu = 0.45 \wedge 1 = 0.45.$$

其中 h_1，h_2 和 h_3 是 3 台电视机的因素评分：$h_1(x_1) = 1$，$h_1(x_2) = 0$，$h_2(x_1) = 0$，$h_2(x_2) = 1$，并且 $h_3(x_1) = h_3(x_2) = 0.45$．因此我们获得合理的评价结论——“第三台电视机是最好的”，这符合我们的直觉． □

如果将 Fuzzy 积分中的 $\wedge$ 运算推广到 t-模上，我们便得到 $\top$ 型 Fuzzy 积分．

设$(X, \mathscr{A}, \mu)$是 Fuzzy 测度空间，$h \in \zeta(\mathscr{A})$，$\top$ 是$[0,1]$上连续的 t-模．

定义 12.3.3 h 的 $\top$ 型 Fuzzy 积分为

$$(\top)\int_A h(x)\mathrm{d}\mu = \bigvee_{\alpha \in [0,1]} \{\alpha \top \mu(h_\alpha \cap A)\} \tag{12.3.19}$$

其中 $A \in \mathscr{A}$．当 $\top = \wedge$ 时，$\wedge$ 型 Fuzzy 积分即为前面讨论的 Fuzzy 积分，即

$$(\wedge)\int_A h(x)\mathrm{d}\mu=(S)\int_A h(x)\mathrm{d}\mu \tag{12.3.20}$$

定理 12.3.12 ⊤ 型 Fuzzy 积分可以表示为

$$(\top)\int_A h(x)\mathrm{d}\mu=\bigvee_{\alpha\in[0,1]}\{\alpha\top\mu(h_{\bar{\alpha}}\cap A)\} \tag{12.3.21}$$

证明 首先，由于 $h_{\bar{\alpha}}\subseteq h_\alpha$，则

$$\alpha\top\mu(h_{\bar{\alpha}}\cap A)\leqslant\alpha\top\mu(h_\alpha\cap A)$$

于是

$$\bigvee_{\alpha\in[0,1]}\{\alpha\top\mu(h_{\bar{\alpha}}\cap A)\}\leqslant(\top)\int_A h(x)\mathrm{d}\mu$$

由于 ⊤ 的连续性，令 $\lambda\to\alpha$，则

$$\alpha\top\mu(h_\alpha\cap A)=\alpha\top\mu(h_{\alpha^-}\cap A)=\lim_{\lambda\to\alpha^-}\lambda\top\mu(h_\lambda\cap A)\leqslant\bigvee_{\alpha\in[0,1]}\alpha\top\mu(h_{\bar{\alpha}}\cap A)$$

则证. □

与定理 12.3.1 证明类似，⊤ 型 Fuzzy 积分可以表示为

$$(\top)\int_A h(x)\mathrm{d}\mu=\bigvee_{F\in\mathscr{A}}\left\{(\bigwedge_{x\in F}h(x))\top\mu(A\cap F)\right\} \tag{12.3.22}$$

若 s 是 Fuzzy 简单函数，即

$$\forall x\in X,\ s(x)=\bigvee_{i=1}^{n}\{\alpha_i\wedge\chi_{A_i}(x)\}$$

其中 $\{\alpha_i\,|\,i=1,2,\cdots,n\}\subset[0,1]$，$A_i\cap A_j=\varnothing\ (i\neq j)$，$\bigcup_{i=1}^{n}A_i=X$，记

$$Q_A^T(s)=\bigvee_{i=1}^{n}\{\alpha_i\top\mu(A\cap A_i)\} \tag{12.3.23}$$

类似定理 12.3.2 易证

$$(\top)\int_A h(x)\mathrm{d}\mu=\bigvee_{s\in\mathscr{S},s\subseteq h}Q_A^T(s) \tag{12.3.24}$$

类似定理 12.2.4 易证

$$(\top)\int_A h(x)\mathrm{d}\mu=(\top)\int_0^1\mu(A\cap h_\alpha)\mathrm{d}\alpha \tag{12.3.25}$$

其中 α 是[0,1]上的 Lebesgue 测度.

⊤ 型 Fuzzy 积分有类似定理 12.3.3 的性质. 特别地，有以下定理.

定理 12.3.13 设 ⊤ 是[0,1]上连续的 t-模，$\top_1$ 是[0,1]上的 t-模，⊥ 是[0,1]上的 t-余模，则：

(1) $(\top)\int_A c\,\mathrm{d}\mu=c\top\mu(A)$ ，$c\in[0,1]$；

(2) $(\top)\int_X(a\vee h(x))\mathrm{d}\mu=a\vee(\top)\int_X h(x)\mathrm{d}\mu$，$a\in[0,1]$；

(3) $(\top)\int_A h(x)\mathrm{d}\mu=(\top)\int_X(\chi_A(x)\wedge h(x))\mathrm{d}\mu$;

(4) $(\top)\int_A(h_1\cup_\perp h_2)(x)\mathrm{d}\mu\geqslant(\top)\int_A h_1(x)\mathrm{d}\mu\vee(\top)\int_A h_2(x)\mathrm{d}\mu$;

(5) $(\top)\int_A(h_1\cap_{\top_1}h_2)(x)\mathrm{d}\mu\leqslant(\top)\int_A h_1(x)\mathrm{d}\mu\wedge(\top)\int_A h_2(x)\mathrm{d}\mu$;

(6) $(\top)\int_{A\cup B}h(x)\mathrm{d}\mu\geqslant(\top)\int_A h(x)\mathrm{d}\mu\vee(\top)\int_B h(x)\mathrm{d}\mu$;

(7) $(\top)\int_{A\cap B}h(x)\mathrm{d}\mu\leqslant(\top)\int_A h(x)\mathrm{d}\mu\wedge(\top)\int_B h(x)\mathrm{d}\mu$.

证明

(1)
$$\begin{aligned}(\top)\int_A c\,\mathrm{d}\mu&=\Big(\bigvee_{\alpha\in[0,c]}\{\alpha\top\mu(A\cap c_\alpha)\}\Big)\vee\Big(\bigvee_{\alpha\in(c,1]}\{\alpha\top\mu(A\cap c_\alpha)\}\Big)\\&=\Big(\bigvee_{\alpha\in[0,c]}\{\alpha\top\mu(A)\}\Big)\vee\Big(\bigvee_{\alpha\in(c,1]}\{\alpha\top\mu(\varnothing\}\Big)\\&=c\top\mu(A)\vee 0=c\top\mu(A).\end{aligned}$$

(2) $(\top)\int_X(a\vee h(x))\mathrm{d}\mu=\Big(\bigvee_{\alpha\in[0,a)}\{\alpha\top\mu(X\cap X)\}\Big)\vee\Big(\bigvee_{\alpha\in[a,1]}\{\alpha\top\mu(X\cap h_\alpha)\}\Big)$

$=(a\top\mu(X))\vee\Big(\bigvee_{\alpha\in[0,1]}\{\alpha\top\mu(X\cap h_\alpha)\}\Big)$（由 ⊤ 的单调性）

$=a\vee\int_X h(x)\mathrm{d}\mu$.

(3) $(\top)\int_X(\chi_A(x)\wedge h(x))\mathrm{d}\mu=\bigvee_{\alpha\in[0,1]}\{\alpha\top\mu(X\cap(\chi_A\cap h)_\alpha)\}$

$=\bigvee_{\alpha\in[0,1]}\{\alpha\top\mu((\chi_A)_\alpha\cap h_\alpha)\}$（由定理 2.1.4(1)）

$=\bigvee_{\alpha\in[0,1]}\{\alpha\top\mu(A\cap h_\alpha)\}\top\mu(A\cap h_\alpha)\}$

$=(\top)\int_A h(x)\mathrm{d}\mu$.

(4) $(\top)\int_A(h_1\cup_\perp h_2)(x)\mathrm{d}\mu=\bigvee_{\alpha\in[0,1]}\{\alpha\top\mu(A\cap(h_1\cup_\perp h_2)_\alpha)\}$

$\geqslant\bigvee_{\alpha\in[0,1]}\{\alpha\top\mu(A\cap(h_{1\alpha}\cup h_{2\alpha}))\}$　（由定理 2.1.7(1)）

$=\bigvee_{\alpha\in[0,1]}\{\alpha\top\mu((A\cap h_{1\alpha})\cup(A\cap h_{2\alpha}))\}$

$\geqslant\bigvee_{\alpha\in[0,1]}\{\alpha\top(\mu(A\cap h_{1\alpha})\vee\mu(A\cap h_{2\alpha}))\}$（由 μ 的单调性）

$=\bigvee_{\alpha\in[0,1]}\{(\alpha\top\mu(A\cap h_{1\alpha}))\vee(\alpha\top\mu(A\cap h_{2\alpha}))\}$　（由 ⊤ 的单调性）

$=\Big(\bigvee_{\alpha\in[0,1]}\{\alpha\top\mu(A\cap h_{1\alpha})\}\Big)\vee\Big(\bigvee_{\alpha\in[0,1]}\{\alpha\top\mu(A\cap h_{2\alpha})\}\Big)$

$=(\top)\int_A h_1(x)\mathrm{d}\mu\vee(\top)\int_A h_2(x)\mathrm{d}\mu$.

(5) $(\top)\int_A (h_1 \cap_{\top_1} h_2)(x)\mathrm{d}\mu = \bigvee_{\alpha\in[0,1]} \{\alpha \top \mu(A \cap (h_1 \cap_{\top_1} h_2)_\alpha)\}$

$\leqslant \bigvee_{\alpha\in[0,1]} \{\alpha \top \mu(A \cap (h_{1_\alpha} \cap h_{2_\alpha}))\}$ （由定理 2.1.7(1)）

$= \bigvee_{\alpha\in[0,1]} \{\alpha \top \mu((A \cap h_{1_\alpha}) \cap (A \cap h_{2_\alpha}))\}$

$\leqslant \bigvee_{\alpha\in[0,1]} \{\alpha \top (\mu(A \cap h_{1_\alpha}) \wedge \mu(A \cap h_{2_\alpha}))\}$（由 μ 的单调性）

$= \bigvee_{\alpha\in[0,1]} \{(\alpha \top \mu(A \cap h_{1_\alpha})) \wedge (\alpha \top \mu(A \cap h_{2_\alpha}))\}$ （由 $\top$ 的单调性）

$\leqslant \left(\bigvee_{\alpha\in[0,1]} \{\alpha \top \mu(A \cap h_{1_\alpha})\}\right) \wedge \left(\bigvee_{\alpha\in[0,1]} \{\alpha \top \mu(A \cap h_{2_\alpha})\}\right)$

$= (\top)\int_A h_1(x)\mathrm{d}\mu \wedge (\top)\int_A h_2(x)\mathrm{d}\mu.$

(6)、(7) 类似(4)、(5)易证. □

§ 12.4 Fuzzy 集的 Fuzzy 测度与 Fuzzy 积分

定义 12.4.1 $\mathscr{A}_F \subseteq \mathscr{F}(X)$称为非空集 X 的 Fuzzy σ-代数(fuzzy σ-algebra)，如果 $\mathscr{A}_F$满足以下条件：

(1) $X \in \mathscr{A}_F$；

(2) $A \in \Rightarrow A^c \in \mathscr{A}_F$；

(3) $A_n \in \mathscr{A}_F (n \in \mathbf{N}) \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathscr{A}_F$.

$(X, \mathscr{A}_F)$称为 Fuzzy 可测空间(fuzzy measurable space).

由定义我们容易得到：设 $\mathscr{A}_F \subseteq \mathscr{F}(X)$是 X 的 Fuzzy σ-代数，则

(1) $\varnothing \in \mathscr{A}_F$；

(2) $A_n \in \mathscr{A}_F (n \in \mathbf{N}) \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathscr{A}_F$；

(3) $\mathscr{A}_F^0 \triangleq \{A \mid A$ 是 $\mathscr{A}_F$中的经典集$\}$是 X 的 σ 代数.

对于 $S \subseteq \mathscr{F}(X)$，$[S]$ 表示包含 S 的最小的 Fuzzy σ-代数.

例 12.4.1 设 X 是非空集.

(1) $[\{\varnothing\}] = \{\varnothing, X\}$ 是 X 的平凡 Fuzzy σ-代数.

(2) 对于 $A \in \mathscr{F}(X)$，$[\{A\}] = \{A, A^c, A \cup A^c, A \cap A^c, \varnothing, X\}$.

(3) 设$(X, \mathscr{A}, P)$为概率测度空间(见定义 12.2.1)，则 $\mathscr{A}_F = \{\chi_A : A \in \mathscr{A}\}$ 是 X 的 Fuzzy σ-代数. □

定理 12.4.1 $\mathscr{A}$是 X 的 σ 代数 $\Rightarrow \zeta(\mathscr{A})$是 X 的 Fuzzy σ-代数.

证明 (1)显然 $X \in \zeta(\mathscr{A})$.

(2)$A \in \zeta(\mathscr{A}) \Rightarrow A_{\overline{1-\alpha}} \in \mathscr{A}$, $\forall \alpha \in [0,1]$

$\Rightarrow (A_{\overline{1-\alpha}})^c \in \mathscr{A}$, $\forall \alpha \in [0,1]$

$\Rightarrow (A^c)_\alpha \in \mathscr{A}$, $\forall \alpha \in [0,1]$ (由定理 2.1.6 得 $(A^c)_\alpha = (A_{\overline{1-\alpha}})^c$)

$\Rightarrow A^c \in \zeta(\mathscr{A})$.

(3)$A_n \in \zeta(\mathscr{A})\ (n \in \mathbf{N}) \Rightarrow (A_n)_{\bar{\alpha}} \in \mathscr{A}$

$$\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{+\infty} (A_n)_{\bar{\alpha}} \in \mathscr{A}$$

$$\Rightarrow \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right)_{\bar{\alpha}} \in \mathscr{A}\ (\text{由定理 2.1.5 得} \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right)_{\bar{\alpha}} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} (A_n)_{\bar{\alpha}})$$

$$\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \zeta(\mathscr{A}).$$ □

定义 12.4.2　设 $(X, \mathscr{A}_F)$为 Fuzzy 可测空间,映射 $m: \mathscr{A}_F \to [0,1]$ 称为 Fuzzy σ-代数 $\mathscr{A}_F$上的 Fuzzy 测度(fuzzy measure),若 m 满足条件:

(1) $m(\varnothing)=0$, $m(X)=1$;

(2) $\forall A,B \in \mathscr{A}_F$, $A \subseteq B \Rightarrow m(A) \leqslant m(B)$;

(3) $A_n \in \mathscr{A}_F$, $(n \in \mathbf{N})$, $A_n \nearrow A$ 或 $A_n \searrow A$ (见 § 1.2),且 $A \in \mathscr{A}_F$,有

$$\lim_{n\to\infty} m(A_n) = m(\lim_{n\to\infty} A_n) = m(A) \tag{12.4.1}$$

称$(X, \mathscr{A}_F, m)$为 Fuzzy 测度空间(fuzzy measure space). $M_{\mathscr{A}_F}(X)$ 表示$(X, \mathscr{A}_F)$上的所有 Fuzzy 测度之集.

例 12.4.2　设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$, $\mathscr{A}_F=\mathscr{F}(X)$,定义映射 $m: \mathscr{F}(X) \to [0,1]$ 如下

$$\forall A \in \mathscr{F}(X),\ m(A)=\sum_{i=1}^{n} \frac{A(x_i)}{n}$$

则 m 是 $\mathscr{F}(X)$上的 Fuzzy 测度($m(A)$是 Fuzzy 集 A 的相对基数,参见 § 1.4).

事实上,m 显然满足定义 12.4.2(1)和(2). 若 $\{A_k \mid k \in \mathbf{N}\} \subset \mathscr{F}(X)$,且 $A_k \subseteq A_{k+1}$ $(k \in \mathbf{N})$,则 $\{m(A_k) \mid k \in \mathbf{N}\} \subset [0,1]$ 是递增数列,从而收敛,并设 $l=\lim\limits_{k\to+\infty} m(A_k)$. 又 $\forall i \in \{1,2,\cdots,n\}$,有

$$\left(\bigcup_{k\in\mathbf{N}} A_k\right)(x_i) = \bigvee_{k\in\mathbf{N}} \{A_k(x_i)\} = \lim_{k\to+\infty} A_k(x_i)$$

从而

$$m\left(\bigcup_{k\in\mathbf{N}} A_k\right) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\bigcup\limits_{k\in\mathbf{N}} A_k\right)(x_i)}{n} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\lim\limits_{k\to+\infty} A_k(x_i)\right)}{n}$$

$$= \frac{\lim\limits_{k\to+\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} A_k(x_i)}{n} = \lim_{k\to+\infty} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} A_k(x_i)}{n}$$

$$= \lim_{k \to +\infty} m(A_k) = l$$

当 $A_k \supseteq A_{k+1}$ $(k \in \mathbf{N})$ 时，同理可证 $m\left(\bigcap_{k \in \mathbf{N}} A_k\right) = \lim_{k \to +\infty} m(A_k)$. 故 m 是 $\mathscr{F}(X)$上的 Fuzzy 测度. □

定理 12.4.2 设$(X, \mathscr{A}, \mu)$为 Fuzzy 测度空间，$\mathscr{A}$ 为 X 的 σ-代数，$\mathscr{A}_F = \zeta(\mathscr{A})$，则

$$m(A) = (S)\int_X A(x)\mathrm{d}\mu \quad (A \in \mathscr{A}_F) \tag{12.4.2}$$

是 Fuzzy σ-代数 $\mathscr{A}_F$ 上的 Fuzzy 测度.

证明 利用 Fuzzy 积分性质定理 12.3.3(1)、(2)、(7)和定理 12.3.6 即得. □

定理 12.4.3 设 m 是 Fuzzy σ-代数 $\mathscr{A}_F$上的 Fuzzy 测度，则 $\forall A, B \in \mathscr{A}_F$，$\{A_n | n \in \mathbf{N}\} \subseteq \mathscr{A}_F$，

(1) $\mu(A \cup B) \geqslant \mu(A) \vee \mu(B)$，$\mu(A \cap B) \leqslant \mu(A) \wedge \mu(B)$；

(2) $m\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \geqslant \bigvee_{n=1}^{+\infty} m(A_n)$，$m\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \leqslant \bigwedge_{n=1}^{+\infty} m(A_n)$.

定义 12.4.3 设 m 是 Fuzzy σ-代数 $\mathscr{A}_F$ 上的 Fuzzy 测度，那么：

(1)对 $A, B \in \mathscr{A}_F$，若 $A \cap B = \varnothing$，则 $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$，称 m 为 Z 型 Fuzzy 测度；

(2)对 $A, B \in \mathscr{A}_F$，若 $A \cap B = \varnothing$，则 $m(A \cup B) = m(A) \vee m(B)$，称 m 为 S 型 Fuzzy 测度；

(3)对 $A, B \in \mathscr{A}_F$，若 $A \cap B = \varnothing$，则 $m(A \cup B) = m(A) + m(B) + \lambda m(A)m(B)$ $(\lambda \geqslant 0)$，称 m 为 S_λ 型 Fuzzy 测度.

定理 12.4.4 设映射 $m: \mathscr{A}_F \to [0,1]$ 是 Fuzzy σ-代数 $\mathscr{A}_F$上的 Fuzzy 测度，则下列命题等价：

(1) m 是 Z 型 Fuzzy 测度；

(2) $\forall A, B \in \mathscr{A}_F$，$m(A \cup B) + m(A \cap B) = m(A) + m(B)$；

(3)若 $\{A_n | n \in \mathbf{N}\} \subseteq A_F$，且 $A_i \cap A_j = \varnothing (i \neq j)$，则有

$$m\left(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbf{N}} m(A_n) \tag{12.4.3}$$

证明 (1) ⇒ (2) 任取 $A, B \in \mathscr{A}_F$，记 $J = \{x \in X | A(x) \geqslant B(x)\}$. 容易验证

$$A \cup B = (A \cap J) \cup (B \cap J^c), \quad A \cap B = (A \cap J^c) \cup (B \cap J)$$

而且 $(A \cap J) \cap (B \cap J^c) = (A \cap J^c) \cap (B \cap J) = \varnothing$. 从而由 m 是 Z 型 Fuzzy

测度得

$$
\begin{aligned}
& m(A \cup B)+m(A \cap B) \\
& =m((A \cap J) \cup (B \cap J^c))+m((A \cap J^c) \cup (B \cap J)) \\
& =m(A \cap J)+m(B \cap J^c)+m(A \cap J^c)+m(B \cap J) \\
& =m((A \cap J) \cup (A \cap J^c))+m((B \cap J) \cup (B \cap J^c)) \\
& =m(A)+m(B)
\end{aligned}
$$

故(2)成立.

(2) ⇒ (3) 设 $A_i \cap A_j=\varnothing(i \neq j)$，记 $B_n=\bigcup_{k=1}^{n} A_k(n \in \mathbf{N})$，则 $B_n \subseteq B_{n+1}(n \in \mathbf{N})$，故由(2)得

$$
m\left(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} A_n\right)=m\left(\lim_{n \to +\infty} B_n\right)=\lim_{n \to +\infty} m(B_n)=\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} m(A_k)=\sum_{n=1}^{+\infty} m(A_n)
$$

即(3)为真.

(3) ⇒ (1)显然. □

定理 12.4.5　设映射 $m: \mathscr{A}_F \to [0,1]$ 是 Fuzzy σ-代数 $\mathscr{A}_F$ 上的 Fuzzy 测度,则下列各命题相互等价:

(1) m 为 S 型 Fuzzy 测度;

(2) $\forall A, B \in \mathscr{A}_F$，有 $m(A \cup B)=m(A) \vee m(B)$;

(3)对 $\{A_n \mid n \in \mathbf{N}\} \subseteq \mathscr{A}_F$，有 $m\left(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} A_n\right)=\bigvee_{n \in \mathbf{N}} m(A_n)$;

(4)对 $\{A_n \mid n \in \mathbf{N}\} \subseteq \mathscr{A}_F$，有

$$
A_i \cap A_j=\varnothing(i \neq j) \Rightarrow m\left(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} A_n\right)=\bigvee_{n \in \mathbf{N}} m(A_n) \tag{12.4.4}
$$

证明　(1) ⇒ (2)任取 $\forall A, B \in \mathscr{A}_F$，记 $J=\{x \in X \mid A(x) \geqslant B(x)\}$，则

$$
(A \cap J) \cap (B \cap J^c)=\varnothing, \quad A \cup B=(A \cap J) \cup (B \cap J^c)
$$

从而由 m 是 S 型 Fuzzy 测度得

$$
m(A \cup B)=m(A \cap J) \vee m(B \cap J^c) \leqslant m(A) \vee m(B)
$$

且 $m(A \cup B) \geqslant m(A), m(A \cup B) \geqslant m(B)) \Rightarrow m(A \cup B) \geqslant m(A) \vee m(B)$

这样 $m(A \cup B)=m(A) \vee m(B)$，(2)为真.

(2) ⇒ (3)类似定理 12.4.4 的(2) ⇒ (3).

(3) ⇒ (4)，(4) ⇒ (1) 显见. □

例 12.4.3　设取 $\mathscr{A}_F=\mathscr{F}(X)$，定义映射 $m: \mathscr{F}(X) \to [0,1]$，使得

$$
m(A)=\bigvee_{x \in X}\{A(x)\}, \forall A \in \mathscr{F}(X)
$$

则 m 是 S 型 Fuzzy 测度.

事实上，$m(\varnothing)=\bigvee_{x\in X}\varnothing(x)=0$；若 $A\subseteq B$，则 $\forall x\in X, A(x)\leqslant B(x)$，从而

$$m(A)=\bigvee_{x\in X}\{A(x)\}\leqslant\bigvee_{x\in X}\{B(x)\}=m(B)$$

又设 $\{A_n|n\in\mathbf{N}\}\subseteq\mathscr{A}_F$，且 $A_n\subseteq A_{n+1}(n\in\mathbf{N})$，则 $\forall x\in X$，$A_n(x)\leqslant A_{n+1}(x)(n\in\mathbf{N})$，这样

$$m\left(\bigcup_{n\in\mathbf{N}}A_n\right)=\bigvee_{x\in X}\left(\bigvee_{n\in\mathbf{N}}\{A_n(x)\}\right)=\bigvee_{n\in\mathbf{N}}\left(\bigvee_{x\in X}\{A_n(x)\}\right)$$
$$=\bigvee_{n\in\mathbf{N}}\{m(A_n)\}=\lim_{n\to+\infty}m(A_n)$$

所以 m 是 Fuzzy 测度. $\forall A,B\in\mathscr{A}_F$，且 $A\cap B=\varnothing$，则有

$$m(A\cup B)=\bigvee_{x\in X}(A(x)\vee B(x))=\left(\bigvee_{x\in X}\{A(x)\}\right)\vee\left(\bigvee_{x\in X}\{B(x)\}\right)=m(A)\vee m(B)$$

故 m 是 S 型 Fuzzy 测度. □

定理 12.4.6 设 m 是 Fuzzy 测度，而且

$$\forall A,B\in\mathscr{A}_F,\ m(A\cap B)=m(A)\wedge m(B)\tag{12.4.5}$$

则 m 是 S 型 Fuzzy 测度的充分必要条件是 m 是 Z 型 Fuzzy 测度.

证明 必要性 设 m 是 S 型 Fuzzy 测度，则 m 是 Fuzzy 测度. 而 $\forall A,B\in\mathscr{A}_F$，由定理 12.4.5 得

$$m(A\cup B)+m(A\cap B)=(m(A)\vee m(B))+(m(A)\wedge m(B))=m(A)+m(B)$$

故由定理 12.4.4 知，m 是 Z 型 Fuzzy 测度.

充分性 设 m 是 Z 型 Fuzzy 测度，则 $\forall A,B\in\mathscr{A}_F$，$A\cap B=\varnothing$. 由此得 $m(A)\wedge m(B)=m(A\cap B)=m(\varnothing)=0$. 于是

$$m(A\cup B)=m(A)+m(B)=(m(A)\vee m(B))+(m(A)\wedge m(B))=m(A)\vee m(B)$$

故 m 是 S 型 Fuzzy 测度. □

定理 12.4.7 设 $m:\mathscr{A}_F\to[0,1]$ 是 Fuzzy σ-代数 $\mathscr{A}_F$上的 Fuzzy 测度，而 $\lambda>0$，则下列命题等价：

(1) m 是 S_λ 型 Fuzzy 测度；

(2)若 $\{A_n|n\in\mathbf{N}\}\subseteq\mathscr{A}_F$，且 $A_i\cap A_j=\varnothing(i\neq j)$，则

$$m\left(\bigcup_{n\in\mathbf{N}}A_n\right)=\frac{1}{\lambda}\left(\prod_{n\in\mathbf{N}}(1+\lambda m(A_n))-1\right)\tag{12.4.6}$$

(3)定义 $m^*:\mathscr{A}_F\to[0,1]$，使 $m^*(A)=\ln(1+\lambda m(A))(A\in\mathscr{A}_F)$，则 m^* 是 Z 型 Fuzzy 测度.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2)首先用数学归纳法容易证明

$$\forall n\in\mathbf{N},m\left(\bigcup_{k=1}^{n}A_k\right)=\frac{1}{\lambda}\left(\prod_{k=1}^{n}(1+\lambda M(A_k))-1\right)$$

故由 m 是 Fuzzy 测度知

$$m\left(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n\right)=\lim_{n\to+\infty} m\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)=\lim_{n}\frac{1}{\lambda}\left(\prod_{k=1}^{n}(1+\lambda M(A_k))-1\right)$$

$$=\frac{1}{\lambda}\left(\prod_{n\in\mathbf{N}}(1+\lambda M(A_k))-1\right)$$

故(2)为真.

(2) ⇒ (3)显见 $m^*(\varnothing)=0$；若 $A,B\in\mathscr{A}_F$，$A\subseteq B$，则 $m(A)\leqslant m(B)$，从而

$$m^*(A)=\ln(1+\lambda m(A))\leqslant\ln(1+\lambda m(B))=m^*(B)$$

任取 $\{A_n|n\in\mathbf{N}\}\subseteq\mathscr{A}_F$，$A_n\subseteq A_{n+1}(n\in\mathbf{N})$，则有

$$\lim_{n\to+\infty} m(A_n)=m\left(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n\right)$$

由此得到
$$\lim_{n\to+\infty}\ln(1+\lambda m(A_n))=\ln\left(1+\lambda m\left(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n\right)\right)$$

这样 m^* 是 Fuzzy 测度. 又对 $A,B\in\mathscr{A}_F$，$A\cap B=\varnothing$，由条件得

$$m^*(A\cup B)=\ln(1+\lambda m(A\cup B))=\ln(1+\lambda m(A))(1+\lambda m(B))$$
$$=\ln(1+\lambda m(A))+\ln(1+\lambda m(B))=m^*(A)+m^*(B)$$

故 m^* 是 Z 型 Fuzzy 测度.

(3) ⇒ (1)设 $A,B\in\mathscr{A}_F$，$A\cap B=\varnothing$，由条件得

$$m^*(A\cup B)=m^*(A)+m^*(B)$$

从而
$$1+\lambda m(A\cup B)=(1+\lambda m(A))(1+\lambda m(B))$$

即 $m(A\cup B)=m(A)+m(B)+\lambda m(A)m(B)$. 所以 m 是 S_λ 型 Fuzzy 测度.

□

下面给出基于 Fuzzy 集的 Fuzzy 积分. 以下均设 $\mathscr{A}_F$是 Fuzzy σ-代数，并记

$$\zeta(\mathscr{A}_F)=\{h\in\mathscr{F}(X)\mid h_\alpha=\{x|h(x)\geqslant\alpha\}\in\mathscr{A}_F,\alpha\in[0,1]\}\tag{12.4.7}$$

定义 12.4.4 设$(X,\mathscr{A}_F,m)$是 Fuzzy 测度空间，$A\in\mathscr{A}_F$，$h\in\zeta(\mathscr{A}_F)$. Fuzzy 集 h 关于 $\mathscr{A}_F$上 Fuzzy 测度 m 的 Fuzzy 积分为

$$(S)\int_A h(x)\mathrm{d}m=\bigvee_{\alpha\in[0,1]}\{\alpha\wedge m(A\cap h_\alpha)\}\tag{12.4.8}$$

定理 12.4.8
$$(S)\int_A h(x)\mathrm{d}m=\bigvee_{\alpha\in[0,1]}\{\alpha\wedge m(A\cap h_\alpha)\}$$
$$=\bigvee_{\alpha\in(0,1]}\{\alpha\wedge m(A\cap h_\alpha)\}$$
$$=\bigvee_{\alpha\in[0,1]}\{\alpha\wedge m(A\cap h_{\bar{\alpha}})\}=\bigvee_{\alpha\in(0,1]}\{\alpha\wedge m(A\cap h_{\bar{\alpha}})\}\tag{12.4.9}$$

证明 我们只证明 $(S)\int_A h(x)\mathrm{d}m = \bigvee_{\alpha\in[0,1]}\{\alpha \wedge m(A\cap h_{\bar{\alpha}})\}$.
由 m 的单调性，有 $m(A\cap h_\alpha)\geqslant m(A\cap h_{\bar{\alpha}})$，$\forall \alpha\in[0,1]$，于是

$$(S)\int_A h(x)\mathrm{d}m \geqslant \bigvee_{\alpha\in[0,1]}\{\alpha\wedge m(A\cap h_{\bar{\alpha}})\}\triangleq a$$

若 $a=1$，显然等式成立. 下设 $0\leqslant a<1$.

假设 $(S)\int_A h(x)\mathrm{d}m > a$. 因 $a<1$，所以存在 $\varepsilon>0$ 使得 $(S)\int_A h(x)\mathrm{d}m > a+\varepsilon$，并且 $a+\varepsilon<1$. 因此存在 α_0 使得 $\alpha_0\wedge m(A\cap h_{\alpha_0})>a+\varepsilon$，即 $\alpha_0>a+\varepsilon$ 和 $m(A\cap h_{\alpha_0})>a+\varepsilon$. 由此得到

$$\bigvee_{\alpha\in[0,1]}\{\alpha\wedge m(A\cap h_\alpha)\}\geqslant (a+\varepsilon)\wedge m(A\cap h_{\overline{a+\varepsilon}})=a+\varepsilon>a$$

这与假设矛盾. 定理得证. □

定理 12.4.9 设 $\mathscr{A}_F^0=\{A\mid A$ 是 $\mathscr{A}_F$中的经典集合$\}$，则

$$(S)\int_A h(x)\mathrm{d}m=\bigvee_{E\in\mathscr{A}_F^0}\left\{\left(\bigwedge_{x\in E}h(x)\right)\wedge m(A\cap E)\right\}$$

$$=\bigvee_{E\in\mathscr{A}_F}\left\{\left(\bigwedge_{E(x)>0}h(x)\right)\wedge m(A\cap E)\right\}\qquad(12.4.10)$$

证明 首先，$\forall\alpha\in[0,1]$，$\bigwedge_{x\in h_\alpha}h(x)\geqslant\alpha$，并且 $h_\alpha\in\mathscr{A}_F^0$

$$\alpha\wedge m(A\cap h_\alpha)\leqslant\bigvee_{E\in\mathscr{A}_F^0}\left\{\left(\bigwedge_{x\in E}h(x)\right)\wedge m(A\cap E)\right\}$$

$$(S)\int_A h(x)\mathrm{d}m=\bigvee_{\alpha\in[0,1]}\{\alpha\wedge m(A\cap h_\alpha)\}$$

$$\leqslant\bigvee_{E\in\mathscr{A}_F^0}\left\{\left(\bigwedge_{x\in E}h(x)\right)\wedge m(A\cap E)\right\}$$

$$\leqslant\bigvee_{E\in\mathscr{A}_F}\left\{\left(\bigwedge_{E(x)>0}h(x)\right)\wedge m(A\cap E)\right\}$$

最后，$\forall E\in\mathscr{A}_F$，令 $\alpha'=\bigwedge_{E(x)>0}h(x)$，则 $E\subseteq h_{\alpha'}$，于是

$$\left(\bigwedge_{E(x)>0}h(x)\right)\wedge m(A\cap E)\leqslant\alpha'\wedge m(A\cap h_{\alpha'})\leqslant(S)\int_A h(x)\mathrm{d}m$$

因此
$$\bigvee_{E\in\mathscr{A}_F}\left\{\left(\bigwedge_{E(x)>0}h(x)\right)\wedge m(A\cap E)\right\}\leqslant(S)\int_A h(x)\mathrm{d}m$$

定理得证. □

定义 12.4.5 设 $\mathscr{A}_F^0=\{A\mid A$ 是 $\mathscr{A}_F$中的经典集合$\}$，$\{A_i\mid i=1,2,\cdots,n\}\subseteq\mathscr{A}_F\ (n\in\mathbf{N})$，使得

$$A_i\neq\varnothing(\forall i),\ A_i\cap A_j=\varnothing\ (i\neq j),\ \bigcup_{i=1}^n A_i=X$$

而 $\{\alpha_i \mid i=1,2,\cdots,n\} \subset [0,1]$，称函数 $s:X \to [0,1]$ 为 $\mathscr{A}_F$上的 Fuzzy 简单函数，若

$$\forall x \in X,\ s(x) = \bigvee_{i=1}^{n} \{\alpha_i \wedge \chi_{A_i}(x)\}$$

全体 Fuzzy 简单函数之集为 $\mathscr{S}(\mathscr{A}_F)$.

若 $s \in \mathscr{S}(\mathscr{A}_F)$，记

$$Q_A(s) = \bigvee_{i=1}^{n} \{\alpha_i \wedge \mu(A \cap A_i)\} \tag{12.4.11}$$

下面的定理给出了 Fuzzy 集上 Fuzzy 积分的又一种表示形式.

定理 12.4.10 Fuzzy 集上的 Fuzzy 积分可以表示为

$$(S)\int_A h(x)\mathrm{d}\mu = \bigvee_{s \in \mathscr{S}(\mathscr{A}_F)} \{Q_A(s) \mid s \leqslant h\} \tag{12.4.12}$$

证明 结合定理 12.4.9，类似定理 12.3.2 的证明可证. □

Fuzzy 集上的 Fuzzy 积分具有类似于经典集上 Fuzzy 积分的许多性质，可以参阅本书相关参考文献.

§12.5 区间值与 Fuzzy 值 Fuzzy 测度及其 Fuzzy 积分

以下总设 $A \subseteq \mathscr{P}(X)$是 X 上的 σ-代数且 $\mathscr{A}_F \subseteq \mathscr{F}(X)$是 X 上的 Fuzzy σ-代数.

定义 12.5.1 一个映射 $\mu_I : \mathscr{A}_F \to I_{[0,1]}$ 称为 Fuzzy σ-代数 $\mathscr{A}_F$ 上的区间值 Fuzzy 测度(interval-valued fuzzy measure)，如果 μ_I 满足下列条件：

(1) $\mu_I(\varnothing)=0$，$\mu_I(X)=1$；

(2) $A,B \in \mathscr{A}_F$，$A \subseteq B \Rightarrow \mu_I(A) \leqslant \mu_I(B)$；

(3) $A_n \in \mathscr{A}_F (n \in \mathbf{N})$，$A_n \nearrow A$ 或 $A_n \searrow A$，且 $A \in \mathscr{A}_F$，有

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(\lim_{n\to\infty} A_n) = \mu(A) \tag{12.5.1}$$

称 $(X,\mathscr{A}_F,\mu_I)$ 为区间值 Fuzzy 测度空间(interval-valued fuzzy measure space). $(X,\mathscr{A})$上的所有区间值 Fuzzy 测度集为 $\overline{M}_{\mathscr{A}}(X)$，$(X,\mathscr{A}_F)$上的所有区间值 Fuzzy 测度集为 $\overline{M}_{\mathscr{A}_F}(X)$.

注意 $0=[0,0]$，$1=[1,1]$并且 $[\underline{a},\overline{a}] \leqslant [\underline{b},\overline{b}]$ 当且仅当 $\underline{a} \leqslant \underline{b}$，$\overline{a} \leqslant \overline{b}$ (见§2.5). 用该序关系容易证明下面的结论.

定理 12.5.1 一个映射 $\mu_I : \mathscr{A}_F \to I_{[0,1]}$ 是区间值 Fuzzy 测度当且仅当 $\underline{\mu_I}$ 和 $\overline{\mu}_I$ 是 Fuzzy σ-代数 $\mathscr{A}_F$上的 Fuzzy 测度，其中

$$\underline{\mu_I}(A) = \underline{\mu_I(A)},\quad \overline{\mu}_I(A) = \overline{\mu_I(A)}\ (A \in \mathscr{A}_F).$$

定理 12.5.2 设$h \in \mathscr{F}_I(X)$是区间值 Fuzzy 集，$\mathscr{A}_F$为X的 Fuzzyσ-代数，$\mu \in M_{\mathscr{A}_F}(X)$，定义

$$\mu_I(A) = \left[(S)\int_A \underline{h}(x)\mathrm{d}\mu, (S)\int_A \overline{h}(x)\mathrm{d}\mu\right], A \in \mathscr{A}_F \qquad (12.5.2)$$

则$\mu_I \in \overline{M}_{\mathscr{A}_F}(X)$.

定义 12.5.2 设$h \in \zeta(\mathscr{A}_F)$，$\mu_I$是 Fuzzy$\sigma$-代数$\mathscr{A}_F$上的区间值 Fuzzy 测度，$A \in \mathscr{A}_F$，则$h$在$A$上关于区间值 Fuzzy 测度$\mu_I$的 Fuzzy 积分为

$$\int_A h(x)\mathrm{d}\mu_I = \bigvee_{\alpha \in [0,1]} \{\alpha \wedge \mu_I(A \cap h_\alpha)\} \qquad (12.5.3)$$

注：设$[\underline{a}_t, \overline{a}_t] \in I_{[0,1]}(t \in T)$，则$\bigvee_{t \in T}[\underline{a}_t, \overline{a}_t] = [\bigvee_{t \in T} \underline{a}_t, \bigvee_{t \in T} \overline{a}_t]$（见§2.5）.

由定义容易证明下面的结论.

定理 12.5.3 设$h \in \zeta(\mathscr{A}_F)$，$\mu_I$是 Fuzzy$\sigma$-代数$\mathscr{A}_F$上的区间值 Fuzzy 测度，$A \in \mathscr{A}_F$，则

$$\int_A h(x)\mathrm{d}\mu_I = \left[(S)\int_A h(x)\mathrm{d}\underline{\mu_I}, (S)\int_A h(x)\mathrm{d}\overline{\mu}_I\right] = \bigvee_{G \in \mathscr{A}_F} \left\{\bigwedge_{G(x)>0} h(x) \wedge \mu_I(A \cap G)\right\} \qquad (12.5.4)$$

定理 12.5.4 设$h \in \zeta(\mathscr{A}_F)$，$\mu_I$是 Fuzzy$\sigma$-代数$\mathscr{A}_F$上的区间值 Fuzzy 测度，$A \in \mathscr{A}_F$，则

$$\int_A h(x)\mathrm{d}\mu_I = \bigvee_{s \in \mathscr{S}(\mathscr{A}_F)} \{Q_A(s) \mid s \leqslant h\} \qquad (12.5.5)$$

其中s是 Fuzzy 简单函数（见§12.4）并且$Q_A(s) = \bigvee_{i=1}^{n} \{\alpha_i \wedge \mu_I(A \cap A_i)\}$.

定理 12.5.5 Fuzzyσ-代数$\mathscr{A}_F$上关于区间值 Fuzzy 测度μ_I的 Fuzzy 积分具有下列性质：

$$A, B \in \mathscr{A}_F, h, h_1, h_2 \in \zeta(\mathscr{A}_F), \mu_I, \nu_I \in \overline{M}_{\mathscr{A}_F}(X)$$

(1) $0 \leqslant \int_A h(x)\mathrm{d}\mu_I \leqslant 1$;

(2) $h_1 \leqslant h_2 \Rightarrow \int_A h_1(x)\mathrm{d}\mu_I \leqslant \int_A h_2(x)\mathrm{d}\mu_I$;

(3) $A \subseteq B \Rightarrow \int_A h(x)\mathrm{d}\mu_I \leqslant \int_B h(x)\mathrm{d}\mu_I$;

(4) $\mu_I \subseteq \nu_I \Rightarrow \int_A h(x)\mathrm{d}\mu_I \leqslant \int_A h(x)\mathrm{d}\nu_I$;

(5) $\mu_I(A) = 0 \Rightarrow \int_A h(x)\mathrm{d}\mu_I = 0$;

(6) $\int_A h(x)\mathrm{d}\mu_I = 0 \Rightarrow \mu_I(A \cap \{x \mid h(x) > 0\}) = 0$;

(7) $\int_A c\,\mathrm{d}\mu_I = c \wedge \mu_I(A)\ (c \in [0,1])$;

(8) $\int_A (h(x)+c)\mathrm{d}\mu_I \leqslant \int_A h(x)\mathrm{d}\mu_I + \int_A c\,\mathrm{d}\mu_I,\ 0 \leqslant c \leqslant 1 - \bigvee_{x\in X} h(x)$;

(9) $\int_X (a \vee h(x))\mathrm{d}\mu_I = a \vee \int_X h(x)\mathrm{d}\mu_I,\ 0 \leqslant a \leqslant 1$;

(10) $\int_A h(x)\mathrm{d}\mu_I = \int_X (\chi_A(x) \wedge h(x))\mathrm{d}\mu_I$;

(11) $\int_A (h_1 \cup h_2)(x)\mathrm{d}\mu_I \geqslant \int_A h_1(x)\mathrm{d}\mu_I \vee \int_A h_2(x)\mathrm{d}\mu_I$;

(12) $\int_A (h_1 \cap h_2)(x)\mathrm{d}\mu_I \leqslant \int_A h_1(x)\mathrm{d}\mu_I \wedge \int_A h_2(x)\mathrm{d}\mu_I$;

(13) $\int_{A\cup B} h(x)\mathrm{d}\mu_I \geqslant \int_A h(x)\mathrm{d}\mu_I \vee \int_B h(x)\mathrm{d}\mu_I$;

(14) $\int_{A\cap B} h(x)\mathrm{d}\mu_I \leqslant \int_A h(x)\mathrm{d}\mu_I \wedge \int_B h(x)\mathrm{d}\mu_I$.

定理 12.5.6 设 $h \in \zeta(\mathscr{A}_F)$,并且 $\{\mu_I^{(n)}(n \in \mathbf{N}),\mu_I\} \subset \overline{M}_{\mathscr{A}_F}(X)$,如果 $\mu_I^{(n)} \to \mu_I$,则

$$\int_A h(x)\mathrm{d}\mu_I^{(n)} \to \int_A h(x)\mathrm{d}\mu_I \tag{12.5.6}$$

定理 12.5.7 设 $\{h_n(n \in \mathbf{N}),h\} \subset \zeta(\mathscr{A}_F)$, $\{\mu_I^{(n)}(n \in \mathbf{N}),\mu_I\} \subset \overline{M}_{\mathscr{A}_F}(X)$. 如果 $h_n \nearrow h,\mu_I^{(n)} \nearrow \mu_I$ (或 $h_n \searrow h,\mu_I^{(n)} \searrow \mu_I$),则

$$\int_A h_n(x)\mathrm{d}\mu_I^{(n)} \to \int_A h(x)\mathrm{d}\mu_I \tag{12.5.7}$$

推论 12.5.1 设 $h \in \zeta(\mathscr{A}_F)$, $\{\mu_I^{(n)}(n \in \mathbf{N}),\mu_I\} \subset \overline{M}_{\mathscr{A}_F}(X)$ 且 $\mu_I^{(n)} \to \mu_I$.

(1)如果 $\mu_I^{(1)} \subseteq \mu_I^{(2)} \subseteq \cdots \subseteq \mu_I^{(n)} \subseteq \cdots$,即 $\forall\ A \in \mathscr{A}_F$, $\mu_I^{(1)}(A) \leqslant \mu_I^{(2)}(A) \leqslant \cdots \leqslant \mu_I^{(n)}(A) \leqslant \cdots$,则

$$\int_A h(x)\mathrm{d}\mu_I = \bigcup_{n=1}^{\infty} \int_A h(x)\mathrm{d}\mu_I^{(n)} \tag{12.5.8}$$

(2) 如果 $\mu_I^{(1)} \supseteq \mu_I^{(2)} \supseteq \cdots \supseteq \mu_I^{(n)} \supseteq \cdots$,即 $\forall A \in \mathscr{A}_F$, $\mu_I^{(1)}(A) \geqslant \mu_I^{(2)}(A) \geqslant \cdots \geqslant \mu_I^{(n)}(A) \geqslant \cdots$,则

$$\int_A h(x)\mathrm{d}\mu_I = \bigcap_{n=1}^{\infty} \int_A h(x)\mathrm{d}\mu_I^{(n)} \tag{12.5.9}$$

定义 12.5.3 一个映射 $\tilde{\mu}: \mathscr{A}_F \to \widetilde{[0,1]}$ 称为 Fuzzy σ-代数 $\mathscr{A}_F$上的 Fuzzy 值 Fuzzy 测度(fuzzy-valued fuzzy measure),如果 $\tilde{\mu}$ 满足下列条件:

(1) $\tilde{\mu}(\varnothing) = \tilde{0}$, $\tilde{\mu}(X) = \tilde{1}$;

(2) $A,B\in\mathscr{A}_F$, $A\subseteq B\Rightarrow\tilde{\mu}(A)\leqslant\tilde{\mu}(B)$;

(3) $A_n\in\mathscr{A}_F\ (n\in\mathbf{N})$, $A_n\nearrow A$ 或 $A_n\searrow A$, 且 $A\in\mathscr{A}_F$, 有

$$\tilde{\mu}(A)(x)=\tilde{\mu}(\lim_{n\to\infty}A_n)(x)=\bigvee\{\alpha\in(0,1]\mid x\in\lim_{n\to\infty}\tilde{\mu}(A_n)_\alpha\}\ (x\in[0,1])\tag{12.5.10}$$

称$(X,\mathscr{A}_F,\tilde{\mu})$为 Fuzzy 值 Fuzzy 测度空间(fuzzy-valued fuzzy measure space),$(X,\mathscr{A})$上的所有 Fuzzy 值 Fuzzy 测度集为 $\widetilde{M}_{\mathscr{A}}(X)$,$(X,\mathscr{A}_F)$上的所有 Fuzzy 值 Fuzzy 测度集为 $\widetilde{M}_{\mathscr{A}_F}(X)$.

注:$\tilde{0}(x)=\begin{cases}1, & x=0\\0, & x\neq 0\end{cases}$, $\tilde{1}(x)=\begin{cases}1, & x=1\\0, & x\neq 1\end{cases}$, 并且对于 $A,B\in\widetilde{\mathbf{R}}$, $A\subseteq B$ 当且仅当 $\forall\alpha\in(0,1]$, $A_\alpha\subseteq B_\alpha$(见§2.1 和§2.6). 由该序关系与区间值和 Fuzzy 值 Fuzzy 测度的定义容易证明下面的结论.

定理 12.5.8 如果 $\tilde{\mu}$ 是 Fuzzy σ-代数 $\mathscr{A}_F$上的一个 Fuzzy 值 Fuzzy 测度,则 $\forall\alpha\in(0,1]$, $\tilde{\mu}_\alpha$ 是 Fuzzy σ-代数 $\mathscr{A}_F$上的一个区间值 Fuzzy 测度,其中

$$\tilde{\mu}_\alpha(A)=(\tilde{\mu}(A))_\alpha, A\in\mathscr{A}_F.$$

定理 12.5.9 设 $\{\tilde{\mu}_\alpha\mid\alpha\in(0,1]\}$ 是一簇 Fuzzy σ-代数 $\mathscr{A}_F$上的区间值 Fuzzy 测度并且满足下列条件:

(1) $\alpha_1<\alpha_2\Rightarrow\tilde{\mu}_{\alpha_1}\supseteq\tilde{\mu}_{\alpha_2}$;

(2) $A_n\nearrow A$ 或 $A_n\searrow A\Rightarrow\tilde{\mu}_\alpha(A_n)\to\tilde{\mu}_\alpha(A)\ (\alpha\in(0,1])$.

则 $\tilde{\mu}$ 是 Fuzzy σ-代数 $\mathscr{A}_F$上的 Fuzzy 值 Fuzzy 测度,其中

$$\tilde{\mu}(A)(x)=\bigvee\{\alpha\in(0,1]\mid x\in\tilde{\mu}_\alpha(A)\}.$$

定义 12.5.4 设 $h\in\zeta(\mathscr{A}_F)$, $\tilde{\mu}\in\widetilde{M}_{\mathscr{A}_F}(X)$, $A\in\mathscr{A}_F$. 则 h 在 $\mathscr{A}_F$上关于 Fuzzy 值 Fuzzy 测度 $\tilde{\mu}$ 的 Fuzzy 积分为

$$\left(\int_A h(x)\mathrm{d}\tilde{\mu}\right)(x)=\bigvee\left\{\alpha\in(0,1]\mid x\in\int_A h(x)\mathrm{d}\tilde{\mu}_\alpha\right\}\tag{12.5.11}$$

定理 12.5.10 设 $h\in\zeta(\mathscr{A}_F)$, $\tilde{\mu}\in\widetilde{M}_{\mathscr{A}_F}(X)$, $A\in\mathscr{A}_F$. 则 $\int_A h(x)\mathrm{d}\tilde{\mu}\in\widetilde{[0,1]}$, 并且

$$\left(\int_A h(x)\mathrm{d}\tilde{\mu}\right)_\alpha=\int_A h(x)\mathrm{d}\tilde{\mu}_\alpha,\ \alpha\in(0,1]\tag{12.5.12}$$

证明 正规性是显然的. 对于 $\alpha\in(0,1]$, 由 Fuzzy 集的表现定理 I(定理 2.3.3),我们有

$$\left(\int_A h(x)\mathrm{d}\tilde{\mu}\right)_\alpha=\bigcap_{\alpha'<\alpha}\int_A h(x)\mathrm{d}\tilde{\mu}_{\alpha'}$$

如果设 $\alpha_n=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\alpha$，那么 $\alpha_n\nearrow\alpha$. 于是容易得到

$$\bigcap_{\alpha'<\alpha}\int_A h(x)\mathrm{d}\bar{\mu}_{\alpha'}=\bigcap_{n=1}^{+\infty}\int_A h(x)\mathrm{d}\bar{\mu}_{\alpha_n}$$

因 $\mu_{\alpha_1}\supseteq\mu_{\alpha_2}\supseteq\cdots\supseteq\mu_{\alpha_n}\supseteq\cdots$ 并且 $\bigcap_{n=1}^{\infty}\bar{\mu}_{\alpha_n}=\mu_\alpha\in\overline{M}_{\mathscr{A}_F}(X)$，所以由推论12.5.1我们得到

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty}\int_A h(x)\mathrm{d}\bar{\mu}_n=\int_A h(x)\mathrm{d}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty}\bar{\mu}_{\alpha_n}\right)=\int_A h(x)\mathrm{d}\bar{\mu}_\alpha$$

故 $\left(\int_A h(x)\mathrm{d}\bar{\mu}\right)_\alpha=\int_A h(x)\mathrm{d}\bar{\mu}_\alpha$. 又 $\forall\alpha\in(0,1]$，$\bar{\mu}_\alpha$ 是闭区间，所以由定理12.5.8与定理 12.5.2 易知 $\forall\alpha\in(0,1]$，$\left(\int_A h(x)\mathrm{d}\bar{\mu}\right)_\alpha$ 是闭区间，即

$$\int_A h(x)\mathrm{d}\bar{\mu}\in\widetilde{[0,1]}.$$ □

定理 12.5.11 关于 Fuzzy 值 Fuzzy 测度 $\bar{\mu}$ 的 Fuzzy 积分具有下列性质：

(1) $\tilde{0}\leqslant\int_A h(x)\mathrm{d}\bar{\mu}\leqslant\tilde{1}$；

(2) $h_1\subseteq h_2\Rightarrow\int_A h_1(x)\mathrm{d}\bar{\mu}\leqslant\int_A h_2(x)\mathrm{d}\bar{\mu}$；

(3) $A\subseteq B\Rightarrow\int_A h(x)\mathrm{d}\bar{\mu}\leqslant\int_B h(x)\mathrm{d}\bar{\mu}$；

(4) $\bar{\mu}_1\subseteq\bar{\mu}_2\Rightarrow\int_A h\mathrm{d}\bar{\mu}_1\leqslant\int_A h\mathrm{d}\bar{\mu}_2$；

(5) $\bar{\mu}(A)=0\Rightarrow\int_A h(x)\mathrm{d}\bar{\mu}=0$；

(6) $\int_A h(x)\mathrm{d}\bar{\mu}=0\Rightarrow\bar{\mu}(A\cap\{x\,|\,h(x)>0\})=0$；

(7) $\int_A c\mathrm{d}\bar{\mu}=c\wedge\bar{\mu}(A)\ (c\in[0,1])$；

(8) $\int_A(h+c)\mathrm{d}\bar{\mu}\leqslant\int_A h\mathrm{d}\bar{\mu}+\int_A c\mathrm{d}\bar{\mu}\ (c\in[0,1])$，$0\leqslant c\leqslant 1-\bigvee_{x\in X}h(x)$；

(9) $\int_X(a\vee h(x))\mathrm{d}\bar{\mu}=a\vee\int_X h(x)\mathrm{d}\bar{\mu}$，$0\leqslant a\leqslant 1$；

(10) $\int_A h(x)\mathrm{d}\bar{\mu}=\int_X(\chi_A(x)\wedge h(x))\mathrm{d}\bar{\mu}$；

(11) $\int_A(h_1\vee h_2)(x)\mathrm{d}\bar{\mu}\geqslant\int_A h_1(x)\mathrm{d}\bar{\mu}\vee\int_A h_2(x)\mathrm{d}\bar{\mu}$；

(12) $\int_A(h_1\wedge h_2)(x)\mathrm{d}\bar{\mu}\leqslant\int_A h_1(x)\mathrm{d}\bar{\mu}\wedge\int_A h_2(x)\mathrm{d}\bar{\mu}$；

(13) $\int_{A\cup B} h(x)\mathrm{d}\tilde{\mu} \geqslant \int_A h(x)\mathrm{d}\tilde{\mu} \vee \int_B h(x)\mathrm{d}\tilde{\mu}$;

(14) $\int_{A\cap B} h(x)\mathrm{d}\tilde{\mu} \leqslant \int_A h(x)\mathrm{d}\tilde{\mu} \wedge \int_B h(x)\mathrm{d}\tilde{\mu}$.

自从 1974 年 M. Sugeno 对 Fuzzy 测度与 Fuzzy 积分进行系统研究之后，Fuzzy 测度与 Fuzzy 积分理论从不同方面进行了讨论和推广(Ban, Gal, 2002; Benvenuti, Mesiar, 2000; Bertoluzza, Cariolaro, 1997; Guo, Zhang, et al., 1998; Kim, Ghil, 1997; Liu, Zhang, 1994; Mesiar, 1997; Murofushi, Sugeno, 1989, 1991, 2000; Qiao, 1990a,b; Ralescu, Adams, 1980; Stojakovic, 1994; Wang, 1984; Wang, Yang, et al., 2006; Wu, Ha, 1993; Wu, Wang, et al., 1993, 1995; Wu, Zhang, et al., 1998, 1999; Zhang, 1992, Zhang, Guo, 1995a,b; Zhang, Wang, 1993 等). Fuzzy 测度与 Fuzzy 积分在决策理论(Grabisch, 1993, 1997),评价问题(Chen, Chang et al., 2002; Chen, Tzeng, 2001; Ishii, Sugeno, 1985; Onisawa et al., 1986; Tanaka, Sugeno, 1991),模式识别(Mikenina, Zimmermann, 1999),专家系统(Klir, et al., 1997)等实际领域得到了广泛的应用.

第 13 章　可能性分布与 Fuzzy 概率

可能性是人们对于事物的可实现程度以及达到某种目标的难易程度的一种反映，其大小与人的感觉相关. 例如，“这次试验可能成功”、“计算机可能有问题”等，都是对一种结果的不确定性的估计. 针对这一问题，1978 年 L. A. Zadeh 创立了可能性理论，随后许多学者研究、发展了这一理论，建立了与概率论平行的理论框架. 本章介绍可能性分布，多元可能性分布以及边缘可能性分布与条件可能性分布，事件的 Fuzzy 概率，Fuzzy 事件的概率与语言概率等.

§ 13.1　可能性分布

可能性同事件的概率既有联系又有本质的区别. 为了说明这个问题，首先来考虑下面的例子.

例 13.1.1　(Zadeh, 1978)　考虑“Hans 吃 x 个鸡蛋当早餐”，记 $X=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$. 对 $x\in X$, $\Pi(x)$, $P(x)$ 分别表示 Hans 每天吃 x 个鸡蛋的可能性与概率，并且列表如表 13.1.1 所示.

表 13.1.1

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$\Pi(x)$	1	1	1	1	0.8	0 6	0.4	0.2
$P(x)$	0.1	0.8	0.1	0	0	0	0	0

由表 13.1.1 可见，尽管 Hans 可以吃 3 个鸡蛋当早餐的可能性是 1，而他这样做的概率却为 0.1. 可能性大并不意味着概率大，概率小也并不意味着可能性小. 然而，当事件不可能发生时，该事件必不发生. 从这里我们可以看到概率与可能性的不同之处. □

定义 13.1.1　设映射 $\pi: X\to[0,1]$ 满足 $\bigvee_{x\in X}\{\pi(x)\}=1$，则称 π 是 X 上的可能性分布函数(possibility distribution function).

给定 X 上的可能性分布函数 π，由 π 决定可能度 $\Pi:\mathscr{P}(X)\to[0,1]$ 如下

$$\forall A\in\mathscr{P}(X),\ \Pi(A)=\bigvee_{x\in A}\{\pi(x)\} \tag{13.1.1}$$

称 Π 是 π 导出的可能性测度(参见例 12.2.6). 另一方面，若已知可能性测度 Π，则由 Π 也可以决定 X 上的可能性分布函数 π

$$\forall x\in X,\pi(x)=\Pi(\{x\}) \tag{13.1.2}$$

在 Fuzzy 命题 F："x 是 A"中，A 对变量 x 的取值有着约束的作用，所以这时称 A 是 x 的 Fuzzy 约束(fuzzy constraint). 所以对 X 中取值的变量 x，一个与 x 相联系的可能性分布函数 π_x 可以被认为是对 x 取值的一种 Fuzzy 约束，π_x 将每个 $t\in X$ 同变量 x 取值为 t 的可能性联系起来：$\pi_x(t)=Poss\{x=t\}$. 由此可以作这样的基本假设：

可能性假设:若 $A\in\mathscr{F}(X)$，则命题"x 是 A"诱导出一个等同于 A 的可能性分布函数 π_x.

即"x 是 A"可以翻译成下列的可能性指派方程

$$\pi_x=A \tag{13.1.3}$$

例 13.1.2 (Zadeh, 1978) 设 A 是 **N** 上"小整数"Fuzzy 集，定义为

$$A=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{0.8}{3}+\frac{0.6}{4}+\frac{0.4}{5}+\frac{0.2}{6}$$

则 Fuzzy 命题"x 是小整数"引入的可能性分布是

$$\pi_x=A$$

若 $A(3)=0.8$ 表示 x 是 3 的可能性，即如果 x 是小整数，则其可能性是 0.8. □

设 x 是取值于 X 的变量，而 $y_1,y_2,\cdots,y_n\in X$，且

$$P\{x=y_i\}=q_i,\quad \text{Poss}\{x=y_i\}=p_i(i=1,2,\cdots,n)$$

则概率 $q_1,q_2,\cdots,q_n$ 与可能性 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 之间的一致程度可以定义为

$$\lambda=(p_1\wedge q_1)\vee(p_2\wedge q_2)\vee\cdots\vee(p_n\wedge q_n)=\bigvee_{i=1}^{n}\{p_i\wedge q_i\} \tag{13.1.4}$$

由此可见，为了使每个 p_i 与 q_i 相一致，则不应将 x 小概率取值的点赋予大的可能性.

将上述定义一般化，设 $p:X\to[0,1]$，使 $p(t)=P\{x=t\}$，而 π 是 X 上的可能性分布函数，则 p 与 π 之间的一致性程度定义为

$$\lambda=\bigvee_{t\in X}\{p(t)\wedge\pi(t)\}$$

对于一个 Fuzzy 集 B，同样可以对 B 进行可能性度量.

定义 13.1.2 (Zadeh, 1978) 设 x 是取值 X 的变量，而 $B\in\mathscr{F}(X)$，π_x 是与 x 相关联的可能性分布函数，则称

$$\prod_x(B) \triangleq \prod(B) \triangleq \bigvee_{y\in X}\{B(y) \wedge \pi_x(y)\} \quad (13.1.5)$$

为 Fuzzy 集 B 的可能性测度(possibility measure of fuzzy set).

例 13.1.3　设考虑 Fuzzy 命题"x 是小整数",则由其引入的可能性分布函数为(参见例 13.1.1)

$$\pi_x = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{0.8}{3} + \frac{0.6}{4} + \frac{0.4}{5} + \frac{0.2}{6}$$

如果 $B=\{3,4,5\}$,则 B 的可能性测度为

$$\prod(B) = (1 \wedge 0.8) \vee (1 \wedge 0.6) \vee (1 \wedge 0.4) = 0.8$$

如果 $B=\frac{0.2}{3}+\frac{0.4}{4}+\frac{0.6}{5}+\frac{0.8}{6}+\frac{1}{7}$,则 B 的可能性测度为

$$\prod(B) = (0.2 \wedge 0.8) \vee (0.4 \wedge 0.6) \vee (0.6 \wedge 0.4) \vee (0.8 \wedge 0.2) = 0.4. \quad \square$$

由定义容易得到以下定理.

定理 13.1.1　$\prod$ 是 $\mathscr{F}(X)$ 上的 Fuzzy 测度.

值得注意的是 $\prod$ 也是 $\mathscr{P}(X)$ 上的 Fuzzy 测度,这时

$$\prod(A) \triangleq \bigvee_{y\in A}\{\pi_x(y)\}, \ \forall A \in \mathscr{P}(X).$$

我们对 $\prod$ 还可以建立同概率相平行的结果.

定理 13.1.2　设 $A,B \in \mathscr{F}(X)$,则有:

(1) $\prod(A \cup B) = \prod(A) \vee \prod(B)$;

(2) $\prod(A \cap B) \leqslant \prod(A) \wedge \prod(B)$;

(3) $\prod(A) = (S)\int_X A(x)\mathrm{d}\prod$.

证明　(1)由定义 13.1.2 容易验证

$$\begin{aligned}\prod(A \cup B) &= \bigvee_{y\in X}\{(A \cup B)(y) \wedge \pi_x(y)\} = \bigvee_{y\in X}\{(A(y) \wedge \pi_x(y)) \vee (B(y) \wedge \pi_x(y))\} \\ &= \Big(\bigvee_{y\in X}\{A(y) \wedge \pi_x(y)\}\Big) \vee \Big(\bigvee_{y\in X}\{B(y) \wedge \pi_x(y)\}\Big) = \prod(A) \vee \prod(B)\end{aligned}$$

(2)同理可证.

(3)由定理 12.3.1 知

$$(S)\int_X A(x)\mathrm{d}\prod = \bigvee_{\alpha\in[0,1]}\{\alpha \wedge \prod(A_\alpha)\}$$

而 $\prod(A_\alpha) = \bigvee_{y\in A_\alpha} \pi_x(y)$,从而

$$\begin{aligned}(S)\int_X A(x)\mathrm{d}\prod &= \bigvee_{\alpha\in[0,1]}\Big\{\alpha \wedge \Big(\bigvee_{y\in A_\alpha}\pi_x(y)\Big)\Big\} = \bigvee_{\alpha\in[0,1]}\bigvee_{y\in X}\{(\alpha \wedge A_\alpha(y)) \wedge \pi_x(y)\} \\ &= \bigvee_{y\in X}\Big\{\bigvee_{\alpha\in[0,1]}\{\alpha \wedge A_\alpha(y) \wedge \pi_x(y)\}\Big\}\end{aligned}$$

$$=\bigvee_{y\in X}\{A(y)\wedge\pi_x(y)\}=\Pi(A).$$ □

可能性与概率的一致性程度可以通过关于Π的 Fuzzy 积分表示出来.

定理 13.1.3 设 $p:X\to[0,1]$，而γ表示Π与p在集合$D\in\mathscr{P}(X)$上的一致性程度，即

$$\gamma=\bigvee_{x\in D}\{p(x)\wedge\pi(x)\},\tag{13.1.6}$$

则

$$\gamma=(S)\int_D p(x)\,\mathrm{d}\,\Pi.\tag{13.1.7}$$

证明 由定理 12.3.1 得

$$\begin{aligned}(S)\int_D p(x)\,\mathrm{d}\,\Pi&=\bigvee_{\alpha\in[0,1]}\{\alpha\wedge\Pi(D\cap p_\alpha)\}=\bigvee_{\alpha\in[0,1]}\left\{\alpha\wedge\left(\bigvee_{y\in D\cap p_\alpha}\{\pi(y)\}\right)\right\}\\&=\bigvee_{\alpha\in[0,1]}\bigvee_{y\in D\cap p_\alpha}\{\alpha\wedge\pi(y)\}=\bigvee_{\alpha\in[0,1]}\bigvee_{y\in D}\{\alpha\wedge p_\alpha(y)\wedge\pi(y)\}\\&=\left(\bigvee_{y\in D}\{\pi(y)\}\right)\wedge\left(\bigvee_{\alpha\in[0,1]}\{\alpha\wedge p_\alpha(y)\}\right)\\&=\bigvee_{y\in D}\{(\pi(y)\wedge p(y)\}=\gamma\end{aligned}$$

定理得证. □

§13.2 多元可能性分布

定义 13.2.1 设 X,Y 为论域，而 x,y 分别是在 X,Y 中取值的两个变量，$\pi_{(x,y)}(u,v)$ 是与 (x,y) 相关联的可能性分布函数，即

$$\forall(u,v)\in X\times Y,\ \pi_{(x,y)}(u,v)=\mathrm{Poss}\{x=u,y=v\}\tag{13.2.1}$$

则称 $\pi_{(x,y)}(u,v)$ 为与 (x,y) 相关联的二元(联合)可能性分布函数(2-ary possibility distribution function). 又设 $\pi_x(u)$ 与 $\pi_y(v)$ 分别是 $\pi_{(x,y)}(u,v)$ 在 X,Y 上的投影，即

$$\forall u\in X,v\in Y,\ \pi_x(u)=\bigvee_{v\in Y}\{\pi_{(x,y)}(u,v)\},\quad \pi_y(v)=\bigvee_{u\in X}\{\pi_{(x,y)}(u,v)\}$$

则称 $\pi_x(u)$ 与 $\pi_y(v)$ 为 $\pi_{(x,y)}(u,v)$ 的边缘可能性分布函数(marginal possibility distribution function).

类似地可以定义 n 元可能性分布和与之对应的边缘可能性分布，下面主要讨论 $n=2$ 的情况.

例 13.2.1 (Zadeh, 1978) 考虑"地毯是大的"可能性分布，$x=$宽度，$y=$长度，为了简单起见，取宽度论域 $X=\{250,300,350,400\}$ 与长度论域 $Y=\{300,350,400,450,500\}$ (单位:cm). $\pi_{(x,y)}$ 如表 13.2.1 所示.

表 13.2.1　"大地毯"的二元可能性分布　（单位：cm）

大地毯	宽　度	长　度	$\pi_{(x,y)}(u,v)$
	250	300	0.6
	250	≥350	0.7
	300	300	0.7
	300	350	0.7
	300	≥400	0.8
	350	350	0.8
	350	≥400	0.9
	400	400	0.9
	400	≥450	1

这时 $\pi_{(x,y)}$ =大地毯，π_x =宽，π_y =长，并且 π_x 与 π_y 如表 13.2.2 所示.

表 13.2.2　"大地毯"的边缘可能性分布　（单位：cm）

宽	宽度	$\pi_x(u)$		长	长度	$\pi_y(v)$
	250	0.7			300	0.7
	300	0.8			350	0.8
	350	0.9			400	0.9
	400	1			450	1
					500	1

下面的定理给出了联合可能性分布函数与其边缘可能性分布函数之间的关系.

定理 13.2.1　设 $\pi_{(x,y)}(u,v)$ 是 (x,y) 的可能性分布函数，其边缘可能性分布函数分别为 $\pi_x(u)$ 与 $\pi_y(v)$，对于 $A \in \mathscr{P}(X)$，$B \in \mathscr{P}(Y)$，记

$$\Pi_{(x,y)}(A,v) = \bigvee_{u\in A} \{\pi_{(x,y)}(u,v)\},\quad \Pi_{(x,y)}(u,B) = \bigvee_{v\in B} \{\pi_{(x,y)}(u,v)\}$$

$$\Pi_x(A) = \bigvee_{u\in A} \pi_x(u),\quad \Pi_y(B) = \bigvee_{v\in B} \pi_y(v)$$

则 Π_x，Π_y 分别是 $\mathscr{P}(X)$ 与 $\mathscr{P}(Y)$ 上的 Fuzzy 测度，且有

$$\forall A \in \mathscr{P}(X),\ \Pi_x(A) = (S)\int_Y \Pi_{(x,y)}(A,v)\,\mathrm{d}\,\Pi_y \tag{13.2.2}$$

$$\forall B \in \mathscr{P}(Y), \Pi_y(B) = (S)\int_X \Pi_{(x,y)}(u,B)\,d\,\Pi_x. \qquad (13.2.3)$$

证明 由定义 13.1.2 可以直接验证 Π_x 与 Π_y 是 Fuzzy 测度. 由定理 13.1.3及定义 13.2.1 得

$$\begin{aligned}(S)\int_Y \Pi_{(x,y)}(A,v)\,d\Pi_y &= \bigvee_{v\in Y}\left\{\left(\bigvee_{u\in A}\{\pi_{(x,y)}(u,v)\}\right)\wedge \pi_y(v)\right\} \\ &= \bigvee_{u\in A}\bigvee_{v\in Y}\{\pi_{(x,y)}(u,v)\wedge \pi_y(v)\} = \bigvee_{u\in A}\{\pi_x(u)\} = \Pi_x(A)\end{aligned}$$

即 $\Pi_x(A) = (S)\int_Y \Pi_{(x,y)}(A,v)\,d\,\Pi_y$. 同理可证定理的其余部分. □

由定理 13.2.1 易知,若取 $A=\{u\}, B=\{v\}$, 则

$$\pi_x(u) = (S)\int_Y \pi_{(x,y)}(u,v)\,d\,\Pi_y \qquad (13.2.4)$$

$$\pi_y(v) = (S)\int_X \pi_{(x,y)}(u,v)\,d\,\Pi_x \qquad (13.2.5)$$

我们可以引入相应于概率论中的条件分布函数.

定义 13.2.2 设 (x,y) 在论域 $X\times Y$ 上取值,对给定的 $u\in X, v\in Y$, 记

$$\pi_{x/y}(u/v) = \mathrm{Poss}\{x=u\,|\,y=v\} \qquad (13.2.6)$$

$$\pi_{y/x}(v/u) = \mathrm{Poss}\{y=v\,|\,x=u\} \qquad (13.2.7)$$

则称 $\pi_{x/y}(u/v)$ 为条件 $y=v$ 下 x 的条件可能性分布函数(conditioned possibility distribution function),而 $\pi_{y/x}(v/u)$ 为条件 $x=u$ 下 y 的条件可能性分布函数.

在定义 13.2.1 的基础上重新定义 $\pi(u/v)$ 与 $\pi(v/u)$ 如下:

$$\pi(u/v) = \begin{cases}\pi_{(x,y)}(u,v) & \pi_x(u)\leqslant \pi_y(v) \\ \pi_{(x,y)}(u,v)\cdot \dfrac{\pi_x(u)}{\pi_y(v)} & \pi_x(u) > \pi_y(v)\end{cases} \qquad (13.2.8)$$

$$\pi(v/u) = \begin{cases}\pi_{(x,y)}(u,v) & \pi_y(v)\leqslant \pi_x(u) \\ \pi_{(x,y)}(u,v)\cdot \dfrac{\pi_y(v)}{\pi_x(u)} & \pi_y(v) > \pi_x(u)\end{cases} \qquad (13.2.9)$$

对 $A\in\mathscr{P}(X), B\in\mathscr{P}(Y)$,记

$$\Pi(A/v) = \bigvee_{u\in A}\{\pi(u/v)\}, \qquad (13.2.10)$$

$$\Pi(B/u) = \bigvee_{v\in B}\{\pi(v/u)\} \qquad (13.2.11)$$

定理 13.2.2 可能性条件分布函数与可能性边缘分布函数之间有如下关系

$$\pi_x(u) = \bigvee_{v\in Y}\left\{\pi\left(\frac{u}{v}\right)\wedge \pi_y(v)\right\} \qquad (13.2.12)$$

$$\pi_y(u)=\bigvee_{u\in X}\left\{\pi\left(\frac{v}{u}\right)\wedge\pi_x(u)\right\}. \tag{13.2.13}$$

证明　只证第一式，第二式同理可证. 由定义 13.2.2 及 $\pi(u/v)$ 的定义容易验证

$$\begin{aligned}
\bigvee_{v\in Y}\{\pi(u/v)\wedge\pi_y(v)\}=&\left(\bigvee_{v\mid\pi_x(u)\leqslant\pi_y(v)}\{\pi(u/v)\wedge\pi_y(v)\}\right)\\
&\vee\left(\bigvee_{v\mid\pi_x(u)>\pi_y(v)}\{\pi(u/v)\wedge\pi_y(v)\}\right)\\
=&\left(\bigvee_{v\mid\pi_x(u)\leqslant\pi_y(v)}\{\pi_{(x,y)}(u/v)\wedge\pi_y(v)\}\right)\\
&\vee\left(\bigvee_{v\mid\pi_x(u)>\pi_y(v)}\left\{\pi_{(x,y)}(u,v)\cdot\frac{\pi_x(u)}{\pi_y(v)}\wedge\pi_y(v)\right\}\right)\\
\geqslant&\bigvee_{v\in Y}\{\pi_{(x,y)}(u,v)\wedge\pi_y(v)\}=\pi_x(u)
\end{aligned}$$

并且

$$\begin{aligned}
\bigvee_{v\in Y}\{\pi(u/v)\wedge\pi_y(v)\}=&\left(\bigvee_{v\mid\pi_x(u)\leqslant\pi_y(v)}\{\pi(u/v)\wedge\pi_y(v)\}\right)\\
&\vee\left(\bigvee_{v\mid\pi_x(u)>\pi_y(v)}\{\pi(u/v)\wedge\pi_y(v)\}\right)\\
\leqslant&\left(\bigvee_{v\mid\pi_x(u)\leqslant\pi_y(v)}\{\pi(u/v)\wedge\pi_y(v)\}\right)\vee\pi_x(u)\\
\leqslant&\left(\bigvee_{v\mid\pi_x(u)\leqslant\pi_y(v)}\{\pi_{(x,y)}(u,v)\wedge\pi_y(v)\}\right)\vee\pi_x(u)\\
\leqslant&\left(\bigvee_{v\in Y}\{\pi_{(x,y)}(u,v)\wedge\pi_y(v)\}\right)\vee\pi_x(u)=\pi_x(u)
\end{aligned}$$

定理得证. □

下面的定理是可能性理论的 Bayes 公式.

定理 13.2.3　设 $A\in\mathscr{P}(X)$，$B\in\mathscr{P}(Y)$，则

$$(S)\int_B \Pi_{(x,y)}(A,v)\mathrm{d}\,\Pi_y=(S)\int_A \Pi_{(x,y)}(u,B)\mathrm{d}\,\Pi_x \tag{13.2.14}$$

证明　由定理 13.1.3 得

$$\begin{aligned}
(S)\int_B \Pi_{(x,y)}(A,v)\mathrm{d}\,\Pi_y&=\bigvee_{v\in B}\left\{\left(\bigvee_{u\in A}\{\pi_{(x,y)}(u,v)\}\right)\wedge\pi_y(v)\right\}\\
&=\bigvee_{u\in A,v\in B}\{\pi_y(v)\wedge\pi_{(x,y)}(u,v)\}\\
&=\bigvee_{u\in A,v\in B}\{\pi_{(x,y)}(u,v)\}\triangleq\Pi_{(x,y)}(A,B)
\end{aligned}$$

同理可证

$$(S)\int_A \Pi_{(x,y)}(u,B)\,\mathrm{d}\,\Pi_x \triangleq \Pi_{(x,y)}(A,B)$$

定理得证. □

§ 13.3 Fuzzy 事件的概率

尽管模糊性与随机性有着本质的区别，但两者之间又有一定的联系，是可以相互渗透的. 同一现象往往既含有模糊性，也含有随机性. 例如："抽检 100 件产品，几乎没有次品"；"明天可能下大雨"，等等. 这些事件不仅发生与否是不定的，而且其含义也不明确肯定. 这正是模糊概率要解决的问题. 下面我们给出 Fuzzy 事件的定义及其概率度量.

定义 13.3.1 (Zadeh, 1968)设 $(\Omega, \mathscr{A}, P)$是概率测度空间，如果

$$A \in \zeta(\mathscr{A}) = \{A \in \mathscr{F}(\Omega) \mid A_\alpha \in \mathscr{A}, \alpha \in [0,1]\} \tag{13.3.1}$$

则称 A 是 Ω 上的 Fuzzy 事件(fuzzy event).

易见 $A \subseteq \zeta(\mathscr{A})$并且由定理 12.4.1 知 $\zeta(\mathscr{A})$是 Ω 的 Fuzzy σ-代数.

如何计算 Fuzzy 事件的概率，我们先从普通事件开始分析. 若 A 是 Ω 的一个普通事件，集 $A \in \mathscr{A}$，则

$$P(A) = \int_A \mathrm{d}P = \int_\Omega \chi_A(w)\,\mathrm{d}P = E(\chi_A) \tag{13.3.2}$$

这里的积分指 Lebesgue 积分，$E(\cdot)$ 是数学期望. 可以将上式推广至 A 是Fuzzy 事件的情形.

定义 13.3.2 (Zadeh, 1968) 设 A 是概率测度空间 $(\Omega, \mathscr{A}, P)$上的一个 Fuzzy 事件，置

$$P_z(A) \triangleq \int_\Omega A(\omega)\,\mathrm{d}P = E(A) \tag{13.3.3}$$

则称 $P_Z(A)$是 Fuzzy 事件 A 的概率(probability of a fuzzy event A)，P_Z 称为 Fuzzy σ-代数 $\zeta(\mathscr{A})$上的 Fuzzy 概率测度(fuzzy probability measure).

P_Z 的下标 Z 表示 P_Z 是 Zadeh 意义下的 Fuzzy 概率测度.

如果 $\Omega = \{w_1, w_2, \cdots, w_n, \cdots\}$ 是无穷可列集，则若记 $p_i = P_Z(\{w_i\})$，由定义 13.3.2 得

$$P_Z(A) = \sum_{i=1}^{+\infty} A(w_i)\,p_i \tag{13.3.4}$$

例 13.3.1 已知某批产品的次品率为 1%，现从中任取 100 件. 用 A 表示"所取的产品几乎无次品"，B 表示"所取的产品大约有 4 个次品"，其定义分别为

$$A = \frac{1}{0} + \frac{1}{1} + \frac{0.6}{2} + \frac{0.4}{3}$$

$$B = \frac{0.4}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{0.4}{6}$$

试求这两个 Fuzzy 事件的概率.

取到 n 件次品的概率为

$$p(n) = C_{100}^{n}\,(0.01)^{n}\,(1-0.01)^{100-n},\ n = 0, 1, \cdots, 100$$

从而 $p(0)=0.366$, $p(1)=0.370$, $p(2)=0.185$, $p(3)=0.061$, $p(4)=0.015$, $p(5)=0.003$, $p(6)=0.0005$, 于是

$$\begin{aligned} P_Z(A) &= A(0)p(0) + A(1)p(1) + A(2)p(2) + A(3)p(3) \\ &= 1\times 0.366 + 1\times 0.37 + 0.6\times 0.185 + 0.4\times 0.061 \\ &= 0.8714 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_Z(B) = {} & B(0)p(0) + B(1)p(1) + B(2)p(2) + B(3)p(3) + \\ & B(4)p(4) + B(5)p(5) + B(6)p(6) = 0.155. \end{aligned}$$ □

例 13.3.2　向目标进行射击,直到打中为止. 设每次击中目标的概率为 p, 各次射击是独立的. 考虑"只射击了几次就击中目标"这一 Fuzzy 事件的概率.

取射击次数作为论域 $U=\{1,2,\cdots\}$. 第 i 次才击中目标的概率为 $p_i = (1-p)^{i-1}p$. 设 A ="只射击了几次就击中目标",并且

$$A = \frac{1}{1} + \frac{0.8}{2} + \frac{0.6}{3} + \frac{0.4}{4}$$

则 $$\begin{aligned} P_Z(A) &= \sum_{i=1}^{+\infty} A(i)p_i = \sum_{i=1}^{+\infty} A(i)\,(1-p)^{i-1}p \\ &= p + 0.8(1-p)p + 0.6\,(1-p)^2 p + 0.4\,(1-p)^3 p. \end{aligned}$$ □

例 13.3.3　在掷骰子游戏中,样本空间为

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$$

其中 ω_i 表示掷骰子结果为 i 点,用 A 表示"不出现小点",且

$$A = \frac{0.2}{\omega_2} + \frac{0.3}{\omega_3} + \frac{0.8}{\omega_4} + \frac{1}{\omega_5} + \frac{1}{\omega_6}$$

则有

$$\begin{aligned} P_Z(A) = {} & A(\omega_2)p(\omega_2) + A(\omega_3)p(\omega_3) + A(\omega_4)p(\omega_4) + \\ & A(\omega_5)p(\omega_5) + A(\omega_6)p(\omega_6) \\ = {} & \frac{1}{6}\times(0.2 + 0.3 + 0.8 + 1 + 1) = 0.55. \end{aligned}$$ □

例 13.3.4　设某物体的长度为 a, 现用一仪器去测量,若无系统偏差,测量方差为 σ^2, 则测量所得物体的长度 X 是一随机变量,其概率密度为

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

用 A 表示"测量的结果与 a 相差不大",其定义为

$$A(x)=e^{-\frac{(x-a)^2}{b}},\ (b>0,\ 为参数)$$

于是,按定义 13.3.2 有

$$P_Z(A)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x-a)^2}{b}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x-a)^2(2\sigma^2+b)}{2b\sigma^2}}dx=\sqrt{\frac{b}{2\sigma^2+b}}.$$

□

Fuzzy 事件概率有许多类似于普通事件概率的性质.

定理 13.3.1 设 $A,B\in\mathscr{F}(\Omega)$是 Fuzzy 事件,则有:

(1) $0\leqslant P_Z(A)\leqslant 1$, 且 $P_Z(\varnothing)=0,P_Z(\Omega)=1$;

(2) $P_Z(A^c)=1-P_Z(A)$;

(3) $A\subseteq B\Rightarrow P_Z(A)\leqslant P_Z(B)$;

(4) $P_Z(A\cup B)=P_Z(A)+P_Z(B)-P_Z(A\cap B)$;

(5) $A\cap B=\varnothing\Rightarrow P_Z(A\cup B)=P_Z(A)+P_Z(B)$;

(6) $P_Z(A\,\dot{\cup}\,B)=P_Z(A)+P_Z(B)-P_Z(A\,\dot{\cap}\,B)$ ($\dot{\cup}$, $\dot{\cap}$ 见定义 1.3.6).

证明 只证(2)和(4),其他易证.

(2) $$P_Z(A^c)=\int_\Omega A^c(w)dP=\int_\Omega(1-A(w))dP=\int_\Omega dP-\int_\Omega A(w)dP=1-P_Z(A).$$

(4) $$\begin{aligned}P_Z(A\cup B)+P_Z(A\cap B)&=\int_\Omega(A\cup B)(w)dP+\int_\Omega(A\cap B)(w)dP\\&=\int_\Omega(A(w)\vee B(w))dP+\int_\Omega(A(w)\wedge B(w))dP\\&=\int_\Omega[(A(w)\vee B(w))+(A(w)\wedge B(w))]dP\\&=\int_\Omega(A(w)+B(w))dP\\&=\int_\Omega A(w)dP+\int_\Omega B(w)dP=P_Z(A)+P_Z(B).\end{aligned}$$

□

定理 13.3.2 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n\in\mathscr{F}(\Omega)$且当 $i\neq j$ 时 $A_i\cap A_j=\varnothing$ (称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为两两不相容),则

$$P_Z\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)=\sum_{i=1}^n P_Z(A_i) \qquad (13.3.5)$$

证明 因当 $i\neq j$ 时, $A_i\cap A_j=\varnothing$, 故对于任一 $\omega\in\Omega$, $A_1(\omega),A_2(\omega),\cdots$,

$A_n(\omega)$ 中至多有一个大于 0,从而有

$$\bigvee_{1\leqslant i\leqslant n} A_i(\omega)=\sum_{i=1}^{n} A_i(\omega)$$

由此可得

$$P_Z\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\int_\Omega\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)(\omega)\mathrm{d}P=\int_\Omega\left(\bigvee_{1\leqslant i\leqslant n} A_i(\omega)\right)\mathrm{d}P$$

$$=\int_\Omega\left(\sum_{i=1}^{n} A_i(\omega)\right)\mathrm{d}P=\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega(A_i(\omega))\mathrm{d}P=\sum_{i=1}^{n} P_Z(A_i).\qquad\square$$

Fuzzy 概率测度 P_Z 是 Fuzzy σ-代数 $\zeta(\mathscr{A})$上的一种特殊的 Fuzzy 测度.

定理 13.3.3 设 P_Z 是 $\zeta(\mathscr{A})$上的 Fuzzy 概率测度,则 P_Z 是 $\zeta(\mathscr{A})$上的 Z 型 Fuzzy 测度.

证明 由定理 13.3.1 和定义 12.4.3,我们只需要证明 P_Z 的连续性. 设 $\{A_n\mid n\in\mathbf{N}\}\subseteq\zeta(\mathscr{A})$, $A_n\subseteq A_{n+1}$, 则 $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n\in\zeta(\mathscr{A})$,且

$$\forall w\in\Omega,\ \lim_{n\to+\infty} A_n(w)=\bigvee_{n\in\mathbf{N}}\{A_n(w)\}=\left(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n\right)(w)\leqslant 1$$

故由 Lebesgue 积分的控制收敛定理得

$$\lim_{n\to+\infty} P_Z(A_n)=\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega A_n\mathrm{d}P=\int_\Omega\lim_{n\to+\infty} A_n\mathrm{d}P=\int_\Omega\left(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n\right)(w)\mathrm{d}P=P_Z\left(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n\right)$$

若 $A_n\supseteq A_{n+1}$, 则同理可证. $\square$

定义 13.3.3 设 Fuzzy 事件 $A,B\in\mathscr{F}(\Omega)$,称 A 与 B 是独立的(independent),如果

$$P_Z(A\cap B)=P_Z(A)P_Z(B)\tag{13.3.6}$$

定义 13.3.4 设 Fuzzy 事件 $A,B\in\mathscr{F}(\Omega)$,若 $P_Z(B)>0$, 则称

$$P_Z(A\mid B)=\frac{P_Z(A\cap B)}{P_Z(B)}\tag{13.3.7}$$

为 A 在 B 下的条件概率(conditional probability). 若 A 与 B 独立,则

$$P_Z(A\mid B)=P_Z(A)\tag{13.3.8}$$

定理 13.3.4 (乘法公式) 设 n 个 Fuzzy 事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n\in\mathscr{F}(\Omega)$,且 $P_Z(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n)>0$, 则

$$P_Z(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n)=P_Z(A_1)P_Z(A_2\mid A_1)\cdots P_Z(A_n\mid A_1\cap\cdots\cap A_{n-1})\tag{13.3.9}$$

证明 因 $P_Z(A_1)\geqslant P_Z(A_1\cap A_2)\geqslant\cdots\geqslant P_Z(A_1\cap\cdots\cap A_{n-1})\geqslant P_Z(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n)$, 故公式右端的条件概率都有意义.

当 $n=2$ 时,按定义 13.3.4,公式成立.

设当 $n=k$ 时公式成立，则当 $n=k+1$ 时，有

$$P_Z(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_k\cap A_{k+1})=P_Z(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_k)P_Z(A_{k+1}\mid A_1\cap\cdots\cap A_k)$$
$$=P_Z(A_1)P_Z(A_2\mid A_1)\cdots P_Z(A_k\mid A_1\cap\cdots\cap A_{k-1})P_Z(A_{k+1}\mid A_1\cap\cdots\cap A_k)$$

从而由数学归纳法知公式成立. □

定理 13.3.5 （全概率公式）设 $A_1,A_2,\cdots,A_n\in\mathscr{F}(\Omega)$ 是 n 个两两不相容的 Fuzzy 事件且 $P_Z(A_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$，则对于任意 $A\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}A_i$，$A\in\mathscr{F}(\Omega)$，有

$$P_Z(A)=\sum_{i=1}^{n}P_Z(A_i)P_Z(A\mid A_i)\tag{13.3.10}$$

证明 由定理 13.3.2 可知

$$P_Z(A)=P_Z\left(A\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)\right)=P_Z\left(\bigcup_{i=1}^{n}(A\cap A_i)\right)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}P_Z(A\cap A_i)=\sum_{i=1}^{n}P_Z(A_i)P_Z(A\mid A_i).$$ □

定理 13.3.6 （Bayes 公式）设 $A_1,A_2,\cdots,A_n\in\mathscr{F}(\Omega)$ 是 n 个两两不相容的 Fuzzy 事件且 $P_Z(A_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$，则对于任意 $A\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}A_i$，$A\in\mathscr{F}(\Omega)$ 且 $P_Z(A)>0$，有

$$P_Z(A_i\mid A)=\frac{P_Z(A_i)P_Z(A\mid A_i)}{\sum_{j=1}^{n}P_Z(A_j)P_Z(A\mid A_j)}\tag{13.3.11}$$

证明 由定义 13.3.4、定理 13.3.4 与定理 13.3.5 即得. □

定义 13.3.5 设 (Ω,A,P) 是概率空间，而 $h\in\mathscr{F}(\Omega)$ 且 $h\in\zeta(\mathscr{A})$，记

$$E_f(h)=(S)\int_{\Omega}h(w)\mathrm{d}P\tag{13.3.12}$$

则称 $E_f(h)$ 是 h 的 Fuzzy 期望(fuzzy expectation).

定理 13.3.7 设 $h,h_1,h_2,h_t\in\zeta(\mathscr{A})\ (t\in T)$，其中 T 是任意指标集，而 $a\in[0,1]$ 是常数，则：

(1) $E_f(a)=a$，且 $h_1\subseteq h_2\Rightarrow E_f(h_1)\leqslant E_f(h_2)$；

(2) $E_f(h_1\cup h_2)\geqslant E_f(h_1)\vee E_f(h_2)$，$E_f(h_1\cap h_2)\leqslant E_f(h_1)\wedge E_f(h_2)$；

(3) $E_f\left(\bigcup_{t\in T}h_t\right)\geqslant\bigvee_{t\in T}E_f(h_t)$，$E_f\left(\bigcap_{t\in T}h_t\right)\leqslant\bigwedge_{t\in T}E_f(h_t)$；

(4) $E_f(a\vee h)=a\vee E_f(h)$.

证明 只证(3)，其他由定理 12.3.3 易证.

$$(3)\ E_f\Big(\bigcup_{t\in T} h_t\Big) = (S)\int_\Omega \Big(\bigvee_{t\in T}\{h_t(x)\}\Big)\mathrm{d}P \qquad (\text{由定义 } 13.3.5)$$

$$= \bigvee_{\alpha\in[0,1]}\Big\{\alpha \wedge P\Big(\Big(\bigcup_{t\in T} h_t\Big)_{\bar{\alpha}}\Big)\Big\} \quad (\text{由定理 } 12.3.11)$$

$$= \bigvee_{\alpha\in[0,1]}\Big\{\alpha \wedge P\Big(\bigcup_{t\in T}(h_t)_{\bar{\alpha}}\Big)\Big\} \quad (\text{由定理 } 2.1.5(2))$$

$$\geqslant \bigvee_{\alpha\in[0,1]}\Big\{\alpha \wedge \Big(\bigvee_{t\in T} P((h_t)_{\bar{\alpha}}\Big\} \quad (\text{由定理 } 12.1.2(2))$$

$$= \bigvee_{\alpha\in[0,1]}\Big\{\bigvee_{t\in T}\{\alpha \wedge P((h_t)_{\bar{\alpha}}\}\Big\} = \bigvee_{t\in T}\bigvee_{\alpha\in[0,1]}\{\alpha \wedge P((h_t)_{\bar{\alpha}}\}$$

$$= \bigvee_{t\in T}\int_\Omega h_t\mathrm{d}P = \bigvee_{t\in T} E_f(h_t)$$

即(3)的第一式成立. 同理可证(3)的第二式，只需注意由定理 2.1.5(2)有

$$\bigvee_{\alpha\in[0,1]}\Big\{\alpha \wedge P\Big(\Big(\bigcap_{t\in T} h_t\Big)_{\bar{\alpha}}\Big)\Big\} \leqslant \bigvee_{\alpha\in[0,1]}\Big\{\alpha \wedge P\Big(\bigcap_{t\in T}(h_t)_{\bar{\alpha}}\Big)\Big\}.$$ □

注：由于 $(S)\int_\Omega (a \wedge h(x))\mathrm{d}P = a \wedge (S)\int_\Omega h(x)\mathrm{d}P$ 不一定成立(见定理 12.3.3的注 2)，所以 $E_f(a \wedge h) = a \wedge E_f(h)$ 也不一定成立. 看下面的例子.

例 13.3.5　设 $\Omega=\{w_1,w_2,\cdots,w_m,w_{m+1},\cdots,w_{m+n}\}(m,n\in\mathbf{N})$ 是由 $m+n$ 个人组成的集合，$A=\mathscr{P}(\Omega)$，而 P 是 A 上的计数测度，即

$$\forall A\in A,\ P(A)=\frac{|A|}{m+n}\ (|A| \text{ 是 } A \text{ 中元素的个数})$$

而 $h:\Omega\to[0,1]$ 表示 Fuzzy 概念“高个子”，定义如下

$$h(w_i)=\begin{cases}0.8, & 1\leqslant i\leqslant m\\ 0.6, & m+1\leqslant i\leqslant m+n\end{cases}$$

显然 $h\in\zeta(\mathscr{A})$. 由于对 $\alpha\in[0,1]$，有

$$h_\alpha=\begin{cases}\Omega, & 0\leqslant\alpha\leqslant 0.6\\ \{w_1,w_2,\cdots,w_m\}, & 0.6<\alpha\leqslant 0.8\\ \varnothing, & 0.8<\alpha\leqslant 1\end{cases}$$

从而

$$E_f(h)=\bigvee_{\alpha\in[0,1]}\{\alpha\wedge P(h_\alpha)\}=0.6\vee\Big(0.8\wedge\frac{m}{m+n}\Big)$$

$E_f(h)$ 表示的实际含义是，Ω 中全体人员的平均高度属于“高个子”的隶属度.

又设 $a\in[0,1]$，则

$$(a\wedge h)_\alpha=\begin{cases}h_\alpha, & a\geqslant\alpha\\ \varnothing, & a<\alpha\end{cases}$$

从而　$E_f(a\wedge h)=\bigvee_{\alpha\in[0,1]}\{\alpha\wedge P((a\wedge h)_\alpha)\}=\bigvee_{\alpha\in[0,a]}\{\alpha\wedge P(h_\alpha)\}$

$$=\begin{cases}0.6, & 0 \leqslant a \leqslant 0.6 \\ 0.6 \vee \left(0.8 \wedge \dfrac{m}{m+n}\right), & 0.6 < a \leqslant 1\end{cases}$$

但
$$a \wedge E_f(h)=\begin{cases}0.6 \vee \left(0.8 \wedge \dfrac{m}{m+n}\right), & 0 \leqslant a \leqslant 0.6 \\ a \vee \left(0.8 \wedge \dfrac{m}{m+n}\right), & 0.6 < a \leqslant 1\end{cases}$$

由此得到 $E_f(a \wedge h)=a \wedge E_f(h) \Leftrightarrow 3n=2m(m,n \in \mathbf{N})$. □

最后我们给出 Fuzzy 期望与经典期望之间的差别估计.

定理 13.3.8 设 $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ 为概率测度空间，$h \in \zeta(\mathscr{A})$，而经典期望 $E(h)=\int_\Omega h(w)\mathrm{d}P$，则有

$$|E_f(h)-E(h)| \leqslant \frac{1}{4} \tag{13.3.13}$$

证明 记 $ht(h)=\bigvee_{w\in\Omega}\{h(w)\}$，$lt(h)=\bigwedge_{w\in\Omega}\{h(w)\}$ (参见定义 1.4.10). 给定 $\alpha \in [0,1]$，易验证

$$\begin{aligned}E(h) &=\int_\Omega h(w)\mathrm{d}P=\int_{\Omega\backslash h_\alpha} h(w)\mathrm{d}P+\int_{h_\alpha} h(w)\mathrm{d}P \\ &\leqslant \int_{\Omega\backslash h_\alpha} \alpha \mathrm{d}P+\int_{h_\alpha} ht(h)\mathrm{d}P \\ &=\alpha(1-P(h_\alpha))+ht(h)P(h_\alpha)=\alpha+P(h_\alpha)(ht(h)-\alpha)\end{aligned}$$

同理可证

$$E(h)=\int_\Omega h(w)\mathrm{d}P \geqslant lt(h)+P(h_\alpha)(\alpha-lt(h))$$

设 $\beta=E_f(h)$，即 $\beta=\bigvee_{\alpha\in[0,1]}(\alpha \wedge P(h_\alpha)$. 可以证明

$$\beta \leqslant \beta \wedge P(h_\beta) \Rightarrow \beta \leqslant P(h_\beta)$$

且 $\forall \alpha > \beta$，$\beta \geqslant P(h_\alpha)$. 这样 $\forall \alpha \in [0,1]$，当 $\alpha > \beta$ 时，有

$$E(h)-E_f(h) \leqslant \alpha+P(h_\alpha)(ht(h)-\alpha)-\beta=P(h_\alpha)(ht(h)-\alpha)+\alpha-\beta$$

以及

$$E(h)-E_f(h) \geqslant lt(h)+P(h_\beta)(\beta-lt(h))-\beta=(1-P(h_\beta))(lt(h)-\beta)$$

即有

$$(1-P(h_\beta))(lt(h)-\beta) \leqslant E(h)-E_f(h) \leqslant P(h_\alpha)(ht(h)-\alpha)+\alpha-\beta$$

考虑到 $0 \leqslant lt(h) \leqslant \beta \leqslant ht(h) \leqslant 1$ 和 $P(h_\beta) \geqslant \beta$，则

$$\beta(\beta-1) \leqslant (1-\beta)(lt(h)-\beta) \leqslant E(h)-E_f(h) \leqslant \beta(1-\beta)+(\alpha-\beta)$$

所以令 $\alpha \to \beta$，即得

$$|E(h) - E_f(h)| \leqslant \beta(1-\beta) \leqslant \frac{1}{4}$$

定理得证. □

Yager(1979,1984)认为将 α 水平集的概率定义为 $P(A_\alpha) = \sum_{x \in A_\alpha} P(x)$ 是相当自然的. 在此基础上,Yager 定义 Fuzzy 事件的概率如下:

定义 13.3.6 (Yager, 1984) 设 A 是概率测度空间 $(\Omega, \mathscr{A}, P)$上的一个 Fuzzy 事件,若

$$P_Y(A) \triangleq \{(P(A_\alpha), \alpha) \mid \alpha \in [0,1]\} \qquad (13.3.14)$$

则称 $P_Y(A)$ 是 Fuzzy 事件 A 的概率(probability of a fuzzy event A).

P_Y 中的下标 Y 表示 P_Y 是 Yager 意义下的概率,有别于 Zadeh 意义下的概率. $P_Y(A)$可以解释为"满足条件 A 的程度至少为 α 的概率", $P_Y(A)$ 是一个 Fuzzy 集.

Yager 还给出了 Fuzzy 事件概率的另一定义:

定义 13.3.7 (Yager, 1984) 设 A 是概率测度空间 $(\Omega, \mathscr{A}, P)$上的一个 Fuzzy 事件,则 Fuzzy 集"Fuzzy 事件 A 的概率至少为 w"定义为 $P_Y^*(A)$,其中

$$P_Y^*(A)(w) = \bigvee_\alpha \{\alpha \mid P(A) \geqslant w\}, w \in [0,1] \qquad (13.3.15)$$

定义 13.3.8 (Yager, 1984) 设 A 是概率测度空间 $(\Omega, \mathscr{A}, P)$上的一个 Fuzzy 事件,则称 $\overline{P}_Y(A)$ 是 Fuzzy 事件 A 的概率,其中

$$\overline{P}_Y(A)(w) = \min\{P_Y^*(A)(w), \overline{P}_Y^*(A)(w)\}, \ w \in [0,1] \qquad (13.3.16)$$

这里

$$\overline{P}_Y^*(A) = 1 - P_Y^*(A^c).$$

例 13.3.6 设 $\Omega = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $A = P(\Omega)$, $A = \frac{1}{x_1} + \frac{0.7}{x_2} + \frac{0.6}{x_3} + \frac{0.2}{x_4}$,并且

$$P(\{x_1\}) = 0.1, \quad P(\{x_2\}) = 0.4, \quad P(\{x_3\}) = 0.3, \quad P(\{x_4\}) = 0.2$$

则 $P_Y(A)$, $P_Y^*(A)$与 $\overline{P}_Y^*(A)$ 如表 13.3.1 和表 13.3.2 所示.

表 13.3.1

α	A_α	$P(A_\alpha)$	w	$P_Y^*(A)$
[0, 0.2]	$\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$	1.0	(0.8, 1.0]	0.2
(0.2, 0.6]	$\{x_1, x_2, x_3\}$	0.8	(0.5, 0.8]	0.6
(0.6, 0.7]	$\{x_1, x_2\}$	0.5	(0.1, 0.5]	0.7
(0.7, 1]	$\{x_1\}$	0.1	[0, 0.1]	1.0

表 13.3.2

α	$(A^c)_\alpha$	$P((A^c)_\alpha)$	w	$P_Y^*(A^c)$	$\overline{P}_Y^*(A)=1-P_Y^*(A^c)$
0	$\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$	1.0	(0.9, 1.0]	0	1
(0, 0.3]	$\{x_2,x_3,x_4\}$	0.9	(0.5, 0.9]	0.3	0.7
(0.3, 0.4]	$\{x_3,x_4\}$	0.5	(0.2, 0.5]	0.4	0.6
(0.4, 0.8]	$\{x_4\}$	0.2	(0, 0.2]	0.8	0.2
(0.8, 1.0]	$\varnothing$	0	0	1	0

于是由定义 13.3.8 得到 Fuzzy 事件 A 的概率 $\overline{P}_Y(A)$，其中

$$\overline{P}_Y(A)(w)=\begin{cases}0, & w=0\\ 0.2, & w\in[0,0.2]\\ 0.6, & w\in[0.2,0.8]\\ 0.2, & w\in[0.8,1]\end{cases}.$$ □

§13.4 事件的 Fuzzy 概率

上述讨论的是 Fuzzy 事件的概率，但对有些问题，事件是明确的，而相应的概率确是模糊的. 例如甲、乙两队进行比赛，问“甲队获胜的可能性有多大?”这时事件“甲队获胜”是一个分明集，但我们很难给出一个确切的数值答案，却习惯用“很大”、“很小”、“不大”、“极小”等模糊概念来描述. 譬如说“甲队获胜的可能性为 0.9”比“甲队获胜的可能性很大”更符合实际.

这样，“明确事件”的 Fuzzy 概率，不是像经典概率用[0,1]中的数值表示，而是用 Fuzzy 语言表示. 所以，我们称事件的 Fuzzy 概率为 Fuzzy 语言概率(fuzzy language probability)，简称语言概率.

因概率 $p\in[0,1]$，所以语言概率是以[0,1]为论域的 Fuzzy 集. 设 Ω 是论域，$\mathscr{A}$ 是 Ω 上的 σ-代数，则

$$\text{经典概率 } P:\mathscr{A}\to[0,1]$$
$$\text{语言概率 } P:\mathscr{A}\to\mathscr{F}([0,1])$$

下面的几个 Fuzzy 集是原始单词：

(1)“p”($p\in[0,1]$)

$$p(x)=\begin{cases}1, & x=p\\ 0, & x\neq p\end{cases} \tag{13.4.1}$$

(2)“很可能”

$$\text{“很可能”}(p) \triangleq \begin{cases} 0, & 0 \leqslant p \leqslant a \\ 2\left(\dfrac{p-a}{1-a}\right)^2, & a < p \leqslant \dfrac{a+1}{2}, \left(\text{参数 } a > \dfrac{1}{2}\right) \\ 1-2\left(\dfrac{p-1}{1-a}\right)^2, & \dfrac{a+1}{2} < p \leqslant 1 \end{cases} \tag{13.4.2}$$

(3)“很不可能”

“很不可能”(p)≙“很可能”(1－p)

$$= \begin{cases} 0, & 0 \leqslant 1-p \leqslant a \\ 2\left(\dfrac{1-p-a}{1-a}\right)^2, & a < 1-p \leqslant \dfrac{a+1}{2} \\ 1-2\left(\dfrac{1-p-1}{1-a}\right)^2, & \dfrac{a+1}{2} < 1-p \leqslant 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1-2\left(\dfrac{1-p-1}{1-a}\right)^2, & 0 \leqslant p \leqslant \dfrac{1-a}{2} \\ 2\left(\dfrac{1-p-a}{1-a}\right)^2, & \dfrac{1-a}{2} < p \leqslant 1-a \\ 0, & 1-a < p \leqslant 1 \end{cases} \tag{13.4.3}$$

Fuzzy 概率的论域是[0,1]，在实际问题中，为了更方便起见我们常常考虑离散的情况，这时可以将[0,1]换为论域 V，通常取

$$V=\{0,0.1,0.2,0.3,0.4,0.5,0.6,0.7,0.8,0.9,1\}$$

在论域 V 上，可以定义

$$\text{“很可能”}=\frac{0.5}{0.6}+\frac{0.7}{0.7}+\frac{0.9}{0.8}+\frac{1}{0.9}+\frac{1}{1}$$

$$\text{“很不可能”}=\frac{0.5}{1-0.6}+\frac{0.7}{1-0.7}+\frac{0.9}{1-0.8}+\frac{1}{1-0.9}+\frac{1}{1-1}$$

$$=\frac{1}{0}+\frac{1}{0.1}+\frac{0.9}{0.2}+\frac{0.7}{0.3}+\frac{0.5}{0.4}$$

“很可能”(0.7)中的 0.7 是 Fuzzy 集“很可能”的元素，也是被模糊化的经典概率.

将逻辑运算与 Fuzzy 语言算子(见 §10.2)运算施于这些原始单词时，得到一系列概率语言值.

例 13.4.1　逻辑运算与语言算子的例子.

$$\text{“不很可能”}(p)=(\text{“很可能”})^c(p)$$

$$(\text{“很可能”或“很不可能”})(p)=(\text{“很可能”})(p) \vee (\text{“很不可能”})(p)$$

"有点可能"(p)=("很可能"$(p))^{\frac{1}{2}}$

$$=\begin{cases}0, & 0\leqslant p\leqslant a\\ \sqrt{2}\left(\dfrac{p-a}{1-a}\right), & a<p\leqslant \dfrac{a+1}{2}\\ \sqrt{1-2\left(\dfrac{p-1}{1-a}\right)^2}, & \dfrac{a+1}{2}<p\leqslant 1\end{cases}$$

"非常可能"(p)=("很可能"$(p))^2$

$$=\begin{cases}0, & 0\leqslant p\leqslant a\\ 4\left(\dfrac{p-a}{1-a}\right)^4, & a<p\leqslant \dfrac{a+1}{2}\\ \left(1-2\left(\dfrac{p-1}{1-a}\right)^2\right)^2, & \dfrac{a+1}{2}<p\leqslant 1\end{cases}$$

"很可能"、"不很可能"与"很不可能"如图 13.4.1 所示.

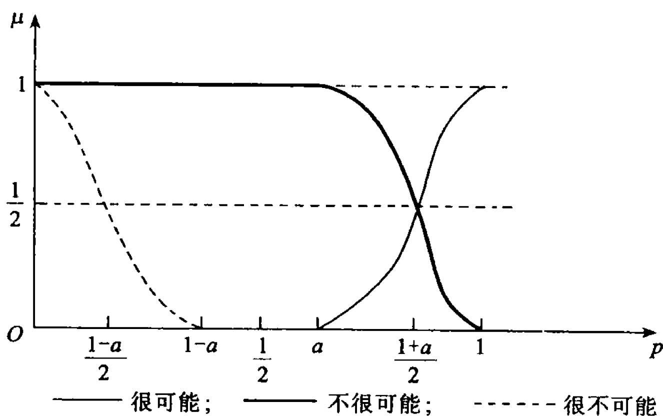


图 13.4.1

例 13.4.2 Fuzzy 化算子的例子.

"差不多是 p"$(x)=F^{(R)}(p)(x)=\begin{cases}e^{-(x-p)^2}, & |x-p|\leqslant\delta\\ 0, & |x-p|>\delta\end{cases}, x\in[0,1]$

"差不多是 0"="几乎不可能(发生)"

"差不多是 1"="几乎一定(发生)". □

例 13.4.3 判定化算子的例子.

"倾向很可能"$(p)=d^{(0.5)}$["很可能"(p)]

$$=\begin{cases}1, & p \geqslant \dfrac{1+a}{2} \\ 0, & p < \dfrac{1+a}{2}\end{cases}$$

$$\text{“倾向很不可能”}(p)=d^{(0.5)}[\text{“很不可能”}(p)]$$

$$=\begin{cases}1, & p < \dfrac{1+a}{2} \\ 0, & p \geqslant \dfrac{1+a}{2}\end{cases}.$$ □

因为概率语言值的支集应限制在[0,1]内,但是按第 10 章中介绍的语言值的四则运算,不能满足要求.

例 13.4.4　设

$$\text{“很可能”}=\frac{0.5}{0.6}+\frac{0.7}{0.7}+\frac{0.9}{0.8}+\frac{1}{0.9}+\frac{1}{1}$$

$$\text{“很不可能”}=\frac{1}{0}+\frac{1}{0.1}+\frac{0.9}{0.2}+\frac{0.7}{0.3}+\frac{0.5}{0.4}$$

则按语言值的四则运算,有

$$\text{“很可能”}+\text{“很不可能”}=\frac{0.5}{0.6}+\frac{0.7}{0.7}+\frac{0.9}{0.8}+\frac{1}{0.9}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.1}+\frac{0.9}{1.2}+\frac{0.7}{1.3}+\frac{0.5}{1.4}$$

其中 1.1,1.2,1.3,1.4 $\overline{\in}$ [0,1],故“很可能”+“很不可能”不再是概率语言值.

□

为了解决这一问题,我们给出下面的概率语言值运算法则.

定义 13.4.1　设 π_i 为语言值, $a_i \in [0,1]$, $i=1,2,\cdots,n$, 则

$$(a_1\pi_1+a_2\pi_2+\cdots+a_n\pi_n)(p) \triangleq \bigvee_{\substack{a_1p_1+a_2p_2+\cdots+a_np_n=p \\ p_1+p_2+\cdots+p_n=1}} \{\pi_1(p_1) \wedge \cdots \wedge \pi_n(p_n)\} \tag{13.4.4}$$

称为 $\{\pi_i\}$ 的线性组合.

不难证明 $p_i \in [0,1] \Rightarrow p=\sum_{i=1}^{n} a_ip_i \in [0,1]$. 并且当 $p>1$ 时,对应空集,则 $\vee \varnothing = 0$. 特别地当 $a_1=a_2=\cdots=a_n=a \in [0,1]$ 时

$$(a\pi_1+a\pi_2+\cdots+a\pi_n)(p)=\begin{cases}\bigvee\limits_{p_1+p_2+\cdots+p_n=1} \{\pi_1(p_1) \wedge \cdots \wedge \pi_n(p_n)\}, & p=a \\ 0, & p \neq a\end{cases} \tag{13.4.5}$$

例 13.4.5　设 $V=\{0,0.1,0.2,\cdots,0.9,1\}$

$$\pi_1 = \text{“}0.2\text{”} = \frac{0.7}{0.1} + \frac{1}{0.2} + \frac{0.6}{0.3}$$

$$\pi_2 = \text{“}0.8\text{”} = \frac{0.7}{0.7} + \frac{1}{0.8} + \frac{0.6}{0.9}$$

令 $\pi = a_1\pi_1 + a_2\pi_2$，$a_1, a_2 \in [0,1]$. 按定义 13.4.1，$\pi$ 的元素 p 应满足

$$a_1 p_1 + a_2 p_2 = p, \quad p_1 + p_2 = 1$$

所以，π 的元素 p 为

$$0.1a_1 + 0.9a_2, \quad 0.2a_1 + 0.8a_2, \quad 0.3a_1 + 0.7a_2$$

于是，当 $a_1 \neq a_2$ 时

$$\begin{aligned}\pi &= \frac{0.7 \wedge 0.6}{0.1a_1 + 0.9a_2} + \frac{1 \wedge 1}{0.2a_1 + 0.8a_2} + \frac{0.6 \wedge 0.7}{0.3a_1 + 0.7a_2} \\ &= \frac{0.6}{0.1a_1 + 0.9a_2} + \frac{1}{0.2a_1 + 0.8a_2} + \frac{0.6}{0.3a_1 + 0.7a_2}\end{aligned}$$

即

$$\pi = \begin{cases} \dfrac{0.6}{0.1a_1 + 0.9a_2} + \dfrac{1}{0.2a_1 + 0.8a_2} + \dfrac{0.6}{0.3a_1 + 0.7a_2}, & a_1 \neq a_2,\ a_1, a_2 \in [0,1] \\ \dfrac{1}{a}, & a_1 = a_2 = a \in [0,1] \end{cases}$$

□

例 13.4.6 设 π_1＝“很可能”，π_2＝“很不可能”，则对于任意 $p \in [0,1]$，$\pi_1(p) = \pi_2(1-p)$，于是，对任意 $a_1 \neq a_2$，有

$$\begin{aligned}(a_1\pi_1 + a_2\pi_2)(p) &= \bigvee_{\substack{a_1p_1 + a_2p_2 = p \\ p_1 + p_2 = 1}} (\pi_1(p_1) \wedge \pi_2(p_2)) \\ &= \bigvee_{a_1p_1 + a_2(1-p_1) = p} (\pi_1(p_1) \wedge \pi_2(1-p_1)) \\ &= \bigvee_{a_1p_1 + a_2(1-p_1) = p} (\pi_1(p_1) \wedge \pi_1(p_1)) \\ &= \bigvee_{p_1 = \frac{p-a_2}{a_1-a_2}} \pi_1(p_1) \\ &= \begin{cases} \pi_1\left(\dfrac{p-a_2}{a_1-a_2}\right), & a_1 \leqslant p \leqslant a_2 (\text{或 } a_2 \leqslant p \leqslant a_1) \\ 0, & \text{其他} \end{cases}\end{aligned}$$

不妨取 $a = 0.6$，则

$$\pi_1(p)=\begin{cases}0, & 0\leqslant p\leqslant 0.6\\ 2\left(\dfrac{p-0.6}{0.4}\right)^2, & 0.6<p\leqslant 0.8\\ 1-2\left(\dfrac{p-1}{0.4}\right)^2, & 0.8<p\leqslant 1\end{cases}$$

设 $a_1=0.8$, $a_2=0.2$，则当 $0.2\leqslant p\leqslant 0.8$ 时，有

$$(0.8\pi_1+0.2\pi_2)(p)=\pi_1\left(\frac{p-0.2}{0.6}\right)$$

$$=\begin{cases}0, & 0\leqslant \dfrac{p-0.2}{0.6}\leqslant 0.6\\ 2\left(\left(\dfrac{p-0.2}{0.6}-0.6\right)\Big/0.4\right)^2, & 0.6<\dfrac{p-0.2}{0.6}\leqslant 0.8\\ 1-2\left(\left(\dfrac{p-0.2}{0.6}-1\right)\Big/0.4\right)^2, & 0.8<\dfrac{p-0.2}{0.6}\leqslant 1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0, & 0.2\leqslant p\leqslant 0.56\\ 2\left(\dfrac{p-0.56}{0.24}\right)^2, & 0.56<p\leqslant 0.68\\ 1-2\left(\dfrac{p-0.8}{0.24}\right)^2, & 0.68<\dfrac{p-0.2}{0.6}\leqslant 0.8\end{cases}$$

当 $0\leqslant p<0.2$ 或 $0.8<p\leqslant 1$ 时

$$(0.8\pi_1+0.2\pi_2)(p)=0.$$ □

按定义 13.4.1 求线性组合语言值，实际上是在线性约束条件

$$a_1p_1+a_2p_2+\cdots+a_np_n=p,\ p_1+p_2+\cdots+p_n=1$$

下求函数

$$\pi_1(p_1)\wedge\pi_2(p_2)\wedge\cdots\wedge\pi_n(p_n)$$

极大化的非线性规划问题.

定义 13.4.2 设 $L([0,1])\subseteq\mathscr{F}([0,1])$，$L([0,1])$ 满足下列条件：

(1) $p\in L([0,1])$ ($p\in[0,1]$)，"很可能" $\in L([0,1])$，"很不可能" $\in L([0,1])$；

(2) $\pi\in L([0,1])\Rightarrow H^{(\lambda)}(\pi)\in L([0,1]), F^{(R)}(\pi)\in L([0,1]), P^{(a)}(\pi)\in L([0,1])$；

(3) $\pi_i\in L([0,1])\ (i=1,2,\cdots,n)\Rightarrow\forall a_i\in[0,1], a_1\pi_1+a_2\pi_2+\cdots+a_n\pi_n\in L([0,1])$.

则称 $L([0,1])$ 为语言概率的值空间(range space of language probability).

设 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$ 为有限集，$\pi_i=p(\omega_i)\in L([0,1])$，$i=1,2,\cdots,n$，且满足

$$\pi_1 + \pi_2 + \cdots + \pi_n = 1 \qquad (13.4.6)$$

则对任意事件 $A \in \mathscr{A}$，令

$$p(A) = \sum_{\omega_i \in A} \pi_i \qquad (13.4.7)$$

定义 13.4.3 称 $(\Omega, \mathscr{A}, L([0,1]), P)$ 为一个语言概率空间(language probability space). p 称为语言概率(language probability)，或 Fuzzy 概率.

容易验证事件的语言概率有如下性质：

(1) 正规性 $P(\Omega) = 1$；

(2) 有限可加性 $\forall A, B \in \mathscr{A}$，且 A 与 B 不相容(即 $A \cap B = \varnothing$)，则

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \qquad (13.4.8)$$

这里 $P(A) + P(B)$ 的意思是：若

$$P(A) = a_1\pi_1 + a_2\pi_2 + \cdots + a_n\pi_n,\ a_i = \chi_A(\omega_i)$$

$$P(B) = b_1\pi_1 + b_2\pi_2 + \cdots + b_n\pi_n,\ b_i = \chi_B(\omega_i)$$

则

$$P(A) + P(B) = (a_1 + b_1)\pi_1 + (a_2 + b_2)\pi_2 + \cdots + (a_n + b_n)\pi_n \qquad (13.4.9)$$

§13.5 Fuzzy 事件的语言概率

前面讨论了 Fuzzy 事件的概率和事件的 Fuzzy 概率(即语言概率). 但有时事件与概率都是模糊的，如“明天下大雨的可能性很大”.

定义 13.5.1 设 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$ 为有限集，在语言概率空间 $(\Omega, \mathscr{A}, L([0,1]), P)$ 上，A 是一个 Fuzzy 事件，设 $P(\omega_i) = \pi_i$，$i = 1, 2, \cdots, n$，则定义

$$P(A) \triangleq A(\omega_1)\pi_1 + A(\omega_2)\pi_2 + \cdots + A(\omega_n)\pi_n \qquad (13.5.1)$$

为 Fuzzy 事件 A 的 Fuzzy 概率(fuzzy probability of fuzzy event A).

例 13.5.1 $\Omega = \{a, b, c\}$

$$A = \frac{0.8}{a} + \frac{1}{b} + \frac{0.3}{c}$$

$$\pi_a = \text{“接近 0.3”} = \frac{0.6}{0.2} + \frac{1}{0.3} + \frac{0.6}{0.4}$$

$$\pi_b = \text{“接近 0.5”} = \frac{0.6}{0.4} + \frac{1}{0.5} + \frac{0.6}{0.6}$$

$$\pi_c = \text{“接近 0.2”} = \frac{0.6}{0.1} + \frac{1}{0.2} + \frac{0.6}{0.3}$$

则 Fuzzy 事件 A 的 Fuzzy 概率为

$$P(A)=0.8\pi_a+1\pi_b+0.3\pi_c$$

$$=0.8\left(\frac{0.6}{0.2}+\frac{1}{0.3}+\frac{0.6}{0.4}\right)+1\left(\frac{0.6}{0.4}+\frac{1}{0.5}+\frac{0.6}{0.6}\right)+0.3\left(\frac{0.6}{0.1}+\frac{1}{0.2}+\frac{0.6}{0.3}\right)$$

按上一节的语言值线性组合的定义，上式运算应满足

$$0.8p_1+p_2+0.3p_3=p,\ p_1+p_2+p_3=1$$

$p_1,p_2,p_3\in\{0.1,0.2,0.3,0.4,0.5,0.6\}$，于是

$$P(A)=\frac{0.6\wedge0.6\wedge1}{0.8\times0.2+1\times0.6+0.3\times0.2}+\frac{0.6\wedge1\wedge0.6}{0.8\times0.2+1\times0.5+0.3\times0.3}+$$

$$\frac{1\wedge0.6\wedge0.6}{0.8\times0.3+1\times0.4+0.3\times0.3}+\frac{1\wedge1\wedge1}{0.8\times0.3+1\times0.5+0.3\times0.2}+$$

$$\frac{1\wedge0.6\wedge0.6}{0.8\times0.3+1\times0.6+0.3\times0.1}+\frac{0.6\wedge0.6\wedge1}{0.8\times0.4+1\times0.4+0.3\times0.2}+$$

$$\frac{0.6\wedge1\wedge0.6}{0.8\times0.4+1\times0.5+0.3\times0.1}$$

$$=\frac{0.6}{0.73}+\frac{0.6}{0.75}+\frac{0.6}{0.78}+\frac{1}{0.8}+\frac{0.6}{0.82}+\frac{0.6}{0.85}+\frac{0.6}{0.87}.$$ □

Fuzzy 集理论，可能性理论与概率论是不能相互替代的，但是它们可以相互补充. 可能性理论与 Fuzzy 集结合(Coletti, Vantaggi, 2006; Dubois, 2006; Dubois, Prade, 1997; 2009)，得到了广泛的应用，如决策理论(Dubois, Prade, et al., 2001; Giang, Shenoy, 2005; Kickert, 1978; Zimmermann, 1987)、风险分析(Schmucker, 1984)、模式识别(Bezdek, 1981; Kandel, 1982; Pal, Majumder, 1986)、数据分析(Bandemer, 1987; Tanaka, Hayashi, 1989)、系统分析(Negoita, 1981; Zadeh, 1973b)等.

第 14 章 Fuzzy 预测与 Fuzzy 决策

"凡事预则立，不预则废"，预测是决策的依据. 预测就是根据过去和现在预言未来，根据历史经验、客观资料和逻辑推断，寻找事物的发展规律和未来趋势. 决策一般是指事件、对策和效果的总和. 解决某个事件采用何种对策，其效果如何，是决策问题的实质. 然而在许多预测与决策问题中，其目标、任务、对象和需要处理的信息往往具有模糊性. 面对这些模糊性，传统的预测与决策方法就失去了作用. 本章介绍两种模糊预测方法，Fuzzy 时间序列预测和 Fuzzy 回归预测，基于 Fuzzy 聚类分析的预测、Fuzzy 逻辑与 Fuzzy 推理的预测方法等可以查阅相关文献. 决策一般包括多目标规划与多属性决策两类，多目标规划问题在第 9 章中已作了介绍，下面主要讨论多属性决策，包括建立在因素空间基础上的 Fuzzy 决策方法、变权分析与多因素 Fuzzy 决策.

§14.1 Fuzzy 时间序列预测法

14.1.1 Fuzzy 平均值方法

Song 和 Chissom (1993a)在 1993 年首次引入 Fuzzy 时间序列的定义，并且随后他们(1993b,1994)提出了 Fuzzy 时间序列预测模型.

用 $X(t)$ 表示一个普通的时间序列，其中 t 是时间变量，取等时间间隔的有限点 $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$，记 $X(t)$ 为

$$X(t): x(t_1), x(t_2), \cdots, x(t_n)$$

或简记为

$$X(t): x_1, x_2, \cdots, x_n$$

x_i 称为第 i 时刻或第 i 周期的观测值(实数)，$i=1,2,\cdots,n$.

定义 14.1.1 设有时间序列 $X(t): x_1, x_2, \cdots, x_n$，记 $T=\{t_1, t_2, \cdots, t_n\}$，并且 M 是 T 上的一个非空 Fuzzy 集，即 $M \in \mathscr{F}(T) \setminus \{\varnothing\}$. 则称

$$\overline{x}_f = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i M(t_i)}{\sum_{i=1}^{n} M(t_i)} \tag{14.1.1}$$

为时间序列 $X(t)$ 在 Fuzzy 约束 M 上的 Fuzzy 平均值(fuzzy average model).

定义 14.1.2 (Song, Chissom, 1993a) 设 $Y(t_i) \subseteq \mathbf{R}$ $(i=1,2,\cdots,n)$, $\widetilde{x}_i = \widetilde{x}(t_i) \in \mathscr{F}(Y(t_i))$, 则

$$\widetilde{X}(t): \widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \cdots, \widetilde{x}_n$$

称为一个 Fuzzy 时间序列(fuzzy time series).

下面我们取 $\widetilde{x}_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$为 $\mathbf{R}$ 上的三角 Fuzzy 数(参见 § 2.6).

定义 14.1.3 设 Fuzzy 时间序列 $\widetilde{X}(t): \widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \cdots, \widetilde{x}_n$, 其中 $\widetilde{x}_i = \langle \alpha_i, x_i, \beta_i \rangle$ $(i=1,2,\cdots,n)$, $T=\{t_1, t_2, \cdots, t_n\}$, $M \in \mathscr{F}(T) \setminus \{\varnothing\}$. 则称

$$\overline{x}_f = \frac{\sum_{i=1}^{n} M(t_i) \cdot \widetilde{x}_i}{\sum_{i=1}^{n} M(t_i)} \tag{14.1.2}$$

为 Fuzzy 时间序列 $\widetilde{X}(t)$ 在 Fuzzy 约束 M 上的 Fuzzy 平均值.

由推论 2.6.2 得到 $\widetilde{X}(t)$ 在 Fuzzy 约束 M 上的 Fuzzy 平均值为

$$\overline{x}_f = \left\langle \frac{\sum_{i=1}^{n} M(t_i)\alpha_i}{\sum_{i=1}^{n} M(t_i)}, \frac{\sum_{i=1}^{n} M(t_i)x_i}{\sum_{i=1}^{n} M(t_i)}, \frac{\sum_{i=1}^{n} M(t_i)\beta_i}{\sum_{i=1}^{n} M(t_i)} \right\rangle \tag{14.1.3}$$

特别地当 $M=T$ 时,则

$$\overline{x}_f = \langle \overline{\alpha}, \overline{x}, \overline{\beta} \rangle \tag{14.1.4}$$

其中 $$\overline{\alpha} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \alpha_i, \quad \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad \overline{\beta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \beta_i.$$

我们可以利用 Fuzzy 时间序列的平均值对下一时刻序列值 $\widetilde{x}_{n+1}$ 进行预测.

例 14.1.1 设有一 Fuzzy 时间序列(如表 14.1.1 所示). 对于任何 i $(i=1, 2,\cdots,n)$, $\widetilde{x}_i$ 是对称三角 Fuzzy 数 $\widetilde{x}_i = \langle x_i, c_i \rangle$.

表 14.1.1

t_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	10	10.5	10.8	10.6	10.7	10.9	10.3	11.2	10.9	11
c_i	0.1	0.2	0.25	0.2	0.15	0.3	0.15	0.25	0.35	0.1

设时间论域 $T=\{1,2,\cdots,10\}$ 上,“近期”概念对应的 Fuzzy 集为

$$J=\frac{0.2}{5}+\frac{0.4}{6}+\frac{0.6}{7}+\frac{0.8}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}$$

则
$$\sum_{i=1}^{10}J(t_i)=4,$$

且
$$\hat{x}_{11}=\overline{x}_f=\frac{\sum_{i=1}^{10}J(t_i)\widetilde{x}_i}{\sum_{i=1}^{10}J(t_i)}=\left\langle\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{10}J(t_i)x_i,\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{10}J(t_i)c_i\right\rangle$$
$$=\langle 10.885,0.2225\rangle.$$
□

14.1.2 Fuzzy 滑动平均方法

滑动平均法(也称移动平均法)是一种最简单的趋势外推方法. 为引入 Fuzzy 滑动方法,先介绍传统的滑动平均方法.

设普通的时间序列为 $X(t):x_1,x_2,\cdots,x_n$,称新的时间序列 $X_l^{(1)}(t):x_l^{(1)}$, $x_{l+1}^{(1)},\cdots,x_n^{(1)}$ 为 $X(t)$ 的一次滑动平均序列,其中

$$x_i^{(1)}=\frac{x_i+x_{i-1}+\cdots+x_{i-l+1}}{l},\quad i=l,l+1,\cdots,n \tag{14.1.5}$$

$l\ (1\leqslant l\leqslant n)$称为滑动步长.

特别地当 $l=1$ 时,$X(t)$ 的一次滑动平均序列就是 $X(t)$ 自身;当 $l=n$ 时,$X(t)$ 的一次滑动平均就是其平均值. 滑动平均在一定程度上起到了削弱数据随机波动的影响、平滑数据以及描述序列变化趋势的作用. 但是,当数据波动较大时,往往一次平滑不能很好地消除波动. 因此,可以在一次滑动平均序列的基础上再进行一次滑动平均,相应的序列 $X^{(2)}(t)$ 称为 $X(t)$ 的二次滑动平均序列. 类似地可以得到 N 次滑动平均序列 $X^{(N)}(t)$.

利用二次滑动平均,可以建立序列外推的线性预测模型

$$\hat{x}_{n+k}=a_n+b_nk \tag{14.1.6}$$

其中 k 为正整数,称为外推步长或外推周期. 而

$$a_n=2x_n^{(1)}-x_n^{(2)}$$

$$b_n=\frac{2}{l-1}(x_n^{(1)}-x_n^{(2)})$$

$l\ (1<l<n)$称为滑动步长.

经典滑动平均预测中,滑动步长 l 的选取是个关键. 但是,无法兼顾对波动消除以及使新数据反应都达到最优. 另外,在求任何部分数据均值时,都是只考虑前期效应,即仅仅利用了某时刻之前的数据. 这也是使得滑动平均序列产生

滞后偏差的主要原因.

假定时间序列 $X(t):x_1,x_2,\cdots,x_n$ 仅存在着随机波动，而没有周期变化. 我们可以借助滑动平均的思想，并在求均值过程中考虑到数据前期与后期(即某时刻左右)的影响，给出 Fuzzy 滑动预测法(fuzzy moving-average model).

定义 14.1.4 设有时间序列 $X(t):x_1,x_2,\cdots,x_n$ 及 $T=\{t_1,t_2,\cdots,t_n\}$ 上的非空正规 Fuzzy 集 $M\in\mathscr{F}(T)\backslash\{\varnothing\}$ ($i=1,2,\cdots,n$). 称 $X_M^{(1)}(t):x_1^{(1)}$, $x_2^{(1)},\cdots,x_n^{(1)}$ 为 $X(t)$ 在约束 M_i 下的一次 Fuzzy 滑动平均序列. 其中

$$x_i^{(1)}=\frac{\sum_{j=1}^{n}M_i(t_j)x_i}{\sum_{j=1}^{n}M_i(t_j)},\quad i=1,2,\cdots,n \tag{14.1.7}$$

类似地，对于一次 Fuzzy 滑动平均序列 $X_M^{(1)}(t)$，利用式(14.1.7)可以求出其二次 Fuzzy 滑动平均序列. 同理，可以得到任意 N 次 Fuzzy 滑动平均序列.

例 14.1.2 考虑表 14.1.2 中的数据，取 T 上的 Fuzzy 集 M_i 为对称三角 Fuzzy 数 $\langle i,4\rangle$，即

$$M_i(t)=\begin{cases}1-\dfrac{|t-i|}{4}, & i-4\leqslant t\leqslant i+4\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

则 $X(t)$ 在 M_i 的约束下的一次和二次 Fuzzy 滑动平均序列如表 14.1.2 所示.

表 14.1.2

t_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$X(t)$	10	15	8	20	10	16	18	20	22	22
$X_M^{(1)}(t)$	12.10	12.62	12.87	14.00	14.69	16.12	17.88	19.07	20.46	21.20
$X_M^{(2)}(t)$	12.60	12.93	13.40	14.13	15.14	16.35	17.66	18.71	19.58	20.22

为了对下一时刻序列值 x_{n+1} 进行预测，利用一次 Fuzzy 滑动平均方法，可以取 $\hat{x}_{n+1}=x_n^{(1)}$ 作为 x_{n+1} 的估计值.

我们可以利用二次 Fuzzy 滑动平均序列的平均变化速率作为趋势变化率，即

$$\bar{b}=\frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^{n}(x_i^{(2)}-x_{i-1}^{(2)})$$

但是，当时间序列很长时，上述定义的 $\bar{b}$ 不能反映近期的序列变化趋势. 进而，

我们可以在论域 $T=\{t_1,t_2,\cdots,t_n\}$ 上建立一个表示“近期”概念的 Fuzzy 集 J，其隶属函数为 $J(t)$，则二次 Fuzzy 滑动平均序列的“近期”变化速率平均值为

$$b_J=\frac{\sum_{i=2}^{n}(x_i^{(2)}-x_{i-1}^{(2)})J(t_i)}{\sum_{i=2}^{n}J(t_i)}$$

对于给定的正整数 k（外推周期），取 $x_n^{(1)}$ 作为预测的初始值，则时间序列 x_{n+k} 的预测值为

$$\hat{x}_{n+k}=x_n^{(1)}+b_Jk \tag{14.1.8}$$

例 14.1.3 续用例 14.1.2 及表 14.1.2 中的数据，并设时间论域 $T=\{1,2,\cdots,10\}$ 上的“近期”概念对应的 Fuzzy 集为

$$J=\frac{0.2}{5}+\frac{0.4}{6}+\frac{0.6}{7}+\frac{0.8}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}$$

则 $\sum_{i=2}^{10}J(t_i)=4$，二次 Fuzzy 滑动平均序列的“近期”变化速率平均值为

$$b_J=\frac{1}{4}[(15.14-14.13)\times 0.2+(16.35-15.14)\times 0.4+(17.66-16.35)\times 0.6+(18.71-17.66)\times 0.8+(19.58-18.71)+(20.22-19.58)]=0.9555$$

又 $x_{10}^{(1)}=21.20$，由式(14.1.8)得

$$\hat{x}_{11}=21.20+0.9555\times 1=22.1555$$
$$\hat{x}_{12}=21.20+0.9555\times 2=23.111.$$ □

§14.2 Fuzzy 回归预测

Fuzzy 回归首先是由 Tanaka, Uejima 和 Asai 在 1982 年提出的. 以后国内外一些研究者在此基础上建立了一些 Fuzzy 线性回归方法并由此建立预测模型(Heshmaty, Kandel, 1985 等).

定义 14.2.1 设 $\tilde{a}_0,\tilde{a}_i,\tilde{x}_i,\tilde{y}\in\tilde{\mathbf{R}}\ (i=1,2,\cdots,n)$，则称线性关系

$$\tilde{y}=\tilde{a}_0+\tilde{a}_1\tilde{x}_1+\tilde{a}_2\tilde{x}_2+\cdots+\tilde{a}_n\tilde{x}_n \tag{14.2.1}$$

为多重线性 Fuzzy 回归方程(fuzzy linear regression equation).

特别地，有

$$\tilde{y}=\tilde{a}_0+\tilde{a}_1x_1+\tilde{a}_2x_2+\cdots+\tilde{a}_nx_n \tag{14.2.2}$$

或

$$\tilde{y}=\beta_0+\beta_1\tilde{x}_1+\beta_2\tilde{x}_2+\cdots+\beta_n\tilde{x}_n \tag{14.2.3}$$

其中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为 n 个自变量，$\beta_0,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 是实参数.

值得注意的是，由定理 2.6.10 和定理 2.6.11 知定义 14.2.1 中的方程式是有意义的.

在 Fuzzy 线性回归方程中一般考虑特殊的 Fuzzy 数，如 LR 型 Fuzzy 数(Yang, Liu, 2003)、对称 Fuzzy 数(Nasrabadi, et al., 2004)、Gaussian Fuzzy 数(Hong, Hwang, et al., 2004)和(对称)三角 Fuzzy 数(Tanaka, Uejima, et al., 1982)等，这些 Fuzzy 数的概念见 § 2.6.

14.2.1　对称三角 Fuzzy 数线性回归模型

设 $A,B\in \widetilde{\mathbf{R}}$，则 A 与 B 的内积 $A\circ B=\bigvee_{x\in \mathbf{R}}\{A(x)\wedge B(x)\}$ (见定义1.4.9)称为 A 对 B 的拟合度(the degree of the fitness)，Dubois, Prade(1983)将其记为 $Pos(A=B)$.

定理 14.2.1　设 $\tilde{a}=\langle a,\alpha\rangle$ 和 $\tilde{b}=\langle b,\beta\rangle$ 为对称三角 Fuzzy 数，则

$$\tilde{a}\circ\tilde{b}=L\left(\frac{a-b}{\alpha+\beta}\right)\tag{14.2.4}$$

其中

$$L(x)=\max\{0,1-|x|\}.$$

证明　不妨设 $a<b$.

(1) 当 $a+\alpha\leqslant b-\beta$ 时，$\tilde{a}\circ\tilde{b}=\bigvee_{x\in \mathbf{R}}\{\tilde{a}(x)\wedge\tilde{b}(x)\}=0$，这时

$$\frac{a-b}{\alpha+\beta}\leqslant -1,\quad L\left(\frac{a-b}{\alpha+\beta}\right)=0.$$

(2) 当 $a+\alpha>b-\beta$ 时，由 $L\left(\frac{x-a}{\alpha}\right)=L\left(\frac{b-x}{\beta}\right)$ 得 $x=\frac{a\beta+\alpha b}{\alpha+\beta}$，则

$$\tilde{a}\circ\tilde{b}=\bigvee_{x\in \mathbf{R}}\{\tilde{a}(x)\wedge\tilde{b}(x)\}=L\left[\frac{\frac{a\beta+b\alpha}{\alpha+\beta}-a}{\alpha}\right]=L\left(\frac{b-a}{\alpha+\beta}\right)=L\left(\frac{a-b}{\alpha+\beta}\right)$$

因此

$$\tilde{a}\circ\tilde{b}=L\left(\frac{a-b}{\alpha+\beta}\right).$$ □

设有 m 个样本，样本为

$$(x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{in};y_i)\ (i=1,2,\cdots,m)$$

其中 $(x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{in})$ 为自变量，y_i 为因变量.

设因变量 y_i 对应的 Fuzzy 因变量 $\tilde{y}_i$ 为对称三角 Fuzzy 数 $\langle y_i,e_i\rangle$，e_i 依实际情况确定其值. 假设因变量预测值 $\tilde{y}_i$ 满足下述 Fuzzy 线性回归方程

$$\tilde{y}_i^*=\tilde{a}_0+\tilde{a}_1x_{i1}+\tilde{a}_2x_{i2}+\cdots+\tilde{a}_nx_{in}\tag{14.2.5}$$

其中回归系数 $\tilde{a}_j=\langle a_j,c_j\rangle\ (j=0,1,2,\cdots,n)$ 为对称三角 Fuzzy 数. 则由推论 2.6.5 有：

当 $\sum_{j=0}^{n} c_j |x_{ij}| = 0$ 时 $\tilde{y}_i^*(x) = \begin{cases} 1, & x = \sum_{j=1}^{n} a_j x_{ij} \\ 0, & x \neq \sum_{j=1}^{n} a_j x_{ij} \end{cases}$

当 $\sum_{j=0}^{n} c_j |x_{ij}| \neq 0$ 时

$$\tilde{y}_i^*(x) = \begin{cases} 1 - \left| x - \sum_{j=0}^{n} a_j x_{ij} \right| \Big/ \sum_{j=0}^{n} c_j |x_{ij}|, & \left| x - \sum_{j=0}^{n} a_j x_{ij} \right| \leqslant \sum_{j=0}^{n} c_j |x_{ij}| \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中 $x_{i0} = 1$, $i = 1, 2, \cdots, m$.

由定理 14.2.1 知，$\tilde{y}_i$ 对 $\tilde{y}_i^*$ 的拟合度为

$$h_i^* \triangleq \tilde{y}_i \circ \tilde{y}_i^* = 1 - \frac{\left| y_i - \sum_{j=0}^{n} a_j x_{ij} \right|}{\sum_{j=0}^{n} c_j |x_{ij}| + e_i}, \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

对任意给定的常数 $h \in [0,1]$，Fuzzy 线性回归问题就是确定 Fuzzy 参数 $\tilde{a}_0, \tilde{a}_i$ 满足 $(\forall i)(h_i^* \geqslant h)$ 并且使得 $\tilde{y}_i^*$ 的模糊度最小($i=1,2,\cdots,m$). 这时问题可以转化为下述线性规划问题求解.

$$\min J = \sum_{i=1}^{m} (c_0 + c_1 |x_{i1}| + c_2 |x_{i2}| + \cdots + c_n |x_{in}|)$$

$$\text{s. t.} \quad \sum_{j=0}^{n} a_j x_{ij} + (1-h) \sum_{j=0}^{n} c_j |x_{ij}| \geqslant y_i - (1-h) e_i, \; i = 1, 2, \cdots, m$$

$$-\sum_{j=0}^{n} a_j x_{ij} + (1-h) \sum_{j=0}^{n} c_j |x_{ij}| \geqslant -y_i - (1-h) e_i, \; i = 1, 2, \cdots, m$$

(14.2.6)

14.2.2 对称 Fuzzy 数线性回归模型 (Nasrabadi et al. ,2004)

下面考虑对称 Fuzzy 数，$\tilde{\mathbf{R}}_L$ 为对称 Fuzzy 数集(参见 § 2.6).

对普通乘法的扩张运算 $(a, \alpha)_L \cdot (b, \beta)_L = (ab, \alpha\beta)_L$ 不一定成立. 例如，对于例 2.7.1 中两个对称三角 Fuzzy 数 A 与 B，$A \cdot B$ 是 Fuzzy 数，但不是对称

Fuzzy 数. 为了在 $\widetilde{\mathbf{R}}_L$ 上讨论一般方程(14.2.1),由此引入下面的定义.

定义 14.2.2　设 $(a,\alpha)_L$, $(b,\beta)_L \in \widetilde{\mathbf{R}}_L$, 则定义

$$(a,\alpha)_L \odot (b,\beta)_L = (ab, \alpha\beta)_L \tag{14.2.7}$$

由定义得到,若 $k=(k,0)_L \in \widetilde{\mathbf{R}}_L$, 即当 $k(x)=\begin{cases}1, & x=k\\ 0, & x\neq k\end{cases}$ 时, $k\odot(a,\alpha)_L = ka$.

这时方程(14.2.1)可以重写为

$$\widetilde{y} = \widetilde{a}_0 + \widetilde{a}_1\odot\widetilde{x}_1 + \widetilde{a}_2\odot\widetilde{x}_2 + \cdots + \widetilde{a}_n\odot\widetilde{x}_n \tag{14.2.8}$$

设有 m 个样本,样本为

$$(x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{in}; y_i)\ (i=1,2,\cdots,m)$$

其中 $(x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{in})$ 为自变量, y_i 为因变量.

设自变量 x 对应的 Fuzzy 自变量 $\widetilde{x}_{ij}$ 为对称 Fuzzy 数 $(x_{ij}, r_{ij})_L$, 因变量 y_i 对应的 Fuzzy 因变量 $\widetilde{y}_i$ 为对称 Fuzzy 数 $(y_i, e_i)_L$, e_i 依实际情况确定其值. 假设因变量预测值 $\widetilde{y}_i$ 满足下述 Fuzzy 线性回归方程

$$\widetilde{y}_i^* = \widetilde{a}_0 + \widetilde{a}_1\odot\widetilde{x}_{i1} + \widetilde{a}_2\odot\widetilde{x}_{i2} + \cdots + \widetilde{a}_n\odot\widetilde{x}_{in} \tag{14.2.9}$$

其中回归系数 $\widetilde{a}_i = (a_i, \alpha_i)_L$ $(i=0,1,2,\cdots,n)$ 为对称 Fuzzy 数. 则

$$\widetilde{y}_i^*(y_i) = \begin{cases} L((y_i - a x_i^{\mathrm{T}})/\alpha r_i^{\mathrm{T}}), & r_i \neq 0 \\ 1, & r_i = 0, y_i = 0, x_i = 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \tag{14.2.10}$$

其中

$$x_i = (1, x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{in})$$
$$r_i = (1, r_{i1}, r_{i2}, \cdots, r_{in})$$
$$a = (a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n)$$
$$\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n).$$

$x_i^{\mathrm{T}}, r_i^{\mathrm{T}}$ 分别为向量 x_i, r_i 的转置.

定理 14.2.1 可以推广到对称 Fuzzy 数,其证明是类似的.

定理 14.2.2　设 $A=(a,\alpha)_L$, $B=(b,\beta)_L \in \widetilde{\mathbf{R}}_L$, 则

$$A\circ B = L\left(\frac{a-b}{\alpha+\beta}\right)$$

$\widetilde{y}_i^*$ 对 $\widetilde{y}_i$ 的拟合度 $\widetilde{y}_i^* \circ \widetilde{y}_i$, 记为 h_i^*; Fuzzy 线性回归模型对所有数据 $\widetilde{y}_1$, $\widetilde{y}_2, \cdots, \widetilde{y}_m$ 的拟合度定义为 $\min\limits_i\{h_i^*\}$.

由定理 14.2.2,我们有

$$h_i^* \triangleq \widetilde{y}_i^* \circ \widetilde{y}_i = L\left(\frac{a x_i^{\mathrm{T}} - y_i}{\alpha r_i^{\mathrm{T}} + e_i}\right) \tag{14.2.11}$$

Fuzzy 线性回归问题就是确定 Fuzzy 参数 $\tilde{a}_0, \tilde{a}_i$ 满足 $(\forall i)(h_i^* \geqslant h)$ 并且使得 $\sum_{i=1}^{m}(\alpha r_i^{\mathrm{T}} - e_i)^2$ 最小. 这时 Fuzzy 线性回归问题可以转化为下述问题求解.

$$\begin{aligned}
&\min D(h) = \sum_{i=1}^{m}(\alpha r_i^{\mathrm{T}} - e_i)^2 \\
&\text{s.t. } \sum_{j=0}^{n} a_j x_{ij} + |L^{-1}(h)| \sum_{j=0}^{n} \alpha_j r_{ij} \geqslant y_i - |L^{-1}(h)| e_i,\ i = 1,2,\cdots,m \\
&\quad -\sum_{j=0}^{n} a_j x_{ij} + |L^{-1}(h)| \sum_{j=0}^{n} \alpha_j r_{ij} \geqslant -y_i - |L^{-1}(h)| e_i,\ i = 1,2,\cdots,m \\
&\quad a_j, \alpha_j \in \mathbf{R},\ j = 1,2,\cdots,n,\ 0 \leqslant h \leqslant 1
\end{aligned} \tag{14.2.12}$$

定理 14.2.3 对于所给数据 $((x_i, r_i)_L, (\tilde{y}_i, e_i)_L)$, $i = 1,2,\cdots,m$, 问题(14.2.12)对 $0 \leqslant h < 1$ 有最优解 $\tilde{a}_j = (a_j, \alpha_j)_L, j = 0,1,2,\cdots,n$.

值得注意的是,如果 $h = 1$, 则 $L^{-1}(h) = 0$, 因此下列方程必然成立

$$y_i = a_0 + a_1 x_{i1} + \cdots + a_n x_{in},\quad i = 1,2,\cdots,m.$$

一般而言,所给数据不一定满足这一方程,这时问题(14.2.12)无解.

定理 14.2.4 如果 $h_1 \geqslant h_2$, 则问题(14.2.12)中的目标函数值有

$$D(h_1) \geqslant D(h_2).$$

证明 只要注意到 $S_1 = \{(a,\alpha)_L \mid$ 问题(14.2.12)中含 h_1 的约束$\} \subseteq S_2 = \{(a,\alpha)_L \mid$ 问题(14.2.12)中含 h_2 的约束$\}$,我们即证. □

为了评价 Fuzzy 回归模型,可以利用观察值与预测值的隶属度的绝对差(Kim, Bishu, 1998)

$$E_i = \int_{\mathrm{Supp}\tilde{y}_i^* \cup \mathrm{Supp}\tilde{y}_i} |\tilde{y}_i^*(y) - \tilde{y}_i(y)|\,\mathrm{d}y \tag{14.2.13}$$

换句话说, E_i 是估计误差, E_i 越小表明 Fuzzy 线性回归模型拟合数据越好.

为了确定 Fuzzy 参数使估计误差最小,现给出如下算法:

(1)置 $h = 0$, $h_L = 0$, $h_U = 1$;

(2)求解问题(14.2.12),其最优目标函数值为 z_0^*;

(3)置 $h = \dfrac{h_L + h_U}{2}$, 并求解问题(14.2.12),其最优目标函数值为 z^*. 更新

h_L 和 h_U 的值如下：如果 $z^* = z_0^*$，则 $h_L = h$，否则 $h_U = h$；

(4)如果两个连续的 h 值之差小于 $\varepsilon > 0$，则算法结束并且 Fuzzy 参数被确定，否则返回(3). 这里 $\varepsilon > 0$ 为事先给定的允许误差.

在下面的例子中，Fuzzy 观察值是对称三角 Fuzzy 数 $(a, \alpha)_L = \langle a, \alpha \rangle$，这时

$$L(x) = \max\{0, 1 - |x|\}.$$

例 14.2.1　5 对观察值如表 14.2.1 所示. 取 $\varepsilon = 0.00001$，利用上面的算法获得 $h = 0.0000076294$ 与 Fuzzy 线性回归模型

$$\tilde{y} = 3.9000 + 2.3000x$$

其估计误差如表 14.2.1 所示.

表 14.2.1　　**数据与估计误差**

i	x_i	$\langle y_i, e_i \rangle$	估计误差
1	1	⟨8.0, 1.8⟩	1.8000
2	2	⟨6.4, 2.4⟩	2.4000
3	3	⟨9.5, 2.6⟩	2.6000
4	4	⟨13.5, 2.6⟩	2.6000
5	5	⟨13.0, 2.4⟩	2.4000
总误差			11.8000

例 14.2.2　8 对观察值如表 14.2.2 所示. 取 $\varepsilon = 0.001$，利用上面的算法获得 $h = 0.00097656$，$D = 0.2321$(目标函数值)与 Fuzzy 线性回归模型

$$\tilde{y} = \langle 0.8008, 0.9553 \rangle + \langle 0.8551, 1.0714 \rangle \odot \tilde{x}$$

其估计误差如表 14.2.2 所示.

表 14.2.2　　**数据与估计误差**

i	x_i	$\langle y_i, e_i \rangle$	估计误差
1	⟨2.0, 0.5⟩	⟨4.5, 0.5⟩	1.9910
2	⟨3.5, 0.5⟩	⟨5.5, 0.5⟩	1.9503

续表

i	x_i	$\langle y_i, e_i\rangle$	估计误差
3	⟨5.5,1.0⟩	⟨7.5,1.0⟩	2.6760
4	⟨7.0,0.5⟩	⟨6.5,0.5⟩	1.0325
5	⟨8.5,0.5⟩	⟨8.5,1.0⟩	0.7950
6	⟨10.5,1.0⟩	⟨8.0,1.0⟩	2.5123
7	⟨11.0,0.5⟩	⟨10.5,0.5⟩	1.0347
8	⟨12.5,0.5⟩	⟨9.5,0.5⟩	1.9910
总误差			13.9828

§14.3 因素空间与 Fuzzy 决策

因素空间理论是一种建立在模糊数学基础上的新型知识信息表示方法，由汪培庄教授提出. 其新颖之处是将可测的自然信息作为知识概念的表现外延，如此可以对概念进行量化描述，从而可以用一系列数学手段进行处理，这就为智能系统的在线自适应提供了基础. 因此，因素空间在故障诊断、优化决策和专家系统自适应方面均有良好的应用前景.

称 $(U,V]$ 为一个左配对，如果 U 与 V 分别是由一些对象和由一些因素组成的集合，并且对任意的 $u\in U$，一切与 u 有关的因素都在 V 中. 设 $R\in\mathscr{P}(U\times V)$，记

$$D_R(f)\triangleq\{u\in U|R(u,f)=1\} \tag{14.3.1}$$

$$V_R(u)\triangleq\{f\in V|R(u,f)=1\} \tag{14.3.2}$$

因素 $f\in V$ 可以视为一个映射，作用在一定的对象 $u\in U$ 上可以获得一定的状态 $f(u)$

$$f:D_R(f)\to X(f),u\mapsto f(u)$$

这里 $X(f)\triangleq\{f(u)|u\in U\}$ 称为 f 的状态空间，$X(f)$ 中任何一个元素称为 f 的一个状态.

定义 14.3.1 给定论域 U，$F=\{f|f:U\to X(f)\}$ 是 U 上的一族映射，称 $\{X(f)\}_{(f\in F)}$ 为 U 上的一个因素空间(factor space)，如果满足公理：

(F1) $F=(F,\vee,\wedge,c,0,1)$ 构成一个完全的布尔代数；

(F2) $\forall T\subset F$，若 $(\forall s,t\in T)(s\wedge t=0)$，则

$$\bigvee_{f\in T} f = \prod_{f\in T} f \tag{14.3.3}$$

这里“$\prod$”表示映射的直积. F 称为因素集，$f \in F$ 称为因素，$X(f)$ 称为 f 的状态空间，0 称为零因素，1 称为全因素，$X(1)$ 称为全空间.

显然，$0=\bigvee_{f\in\varnothing} f$. 对于 $T\subset F$，若 T 满足公理(F2)，则 $\bigvee_{f\in T} f: U \to \prod_{f\in T} X(f)$，从而

$$X(\bigvee_{f\in T} f) = \prod_{f\in T} X(f) \tag{14.3.4}$$

特别地，对于零因素 0，有

$$X(0) = \prod_{f\in\varnothing} X(f) = \{\theta \mid \theta:\varnothing \to \varnothing\} \tag{14.3.5}$$

称 θ 为空状态. 实际上，$\theta=\varnothing$.

不难看出，对于任何 $f\in F$，有

$$X(0)\times X(f) = X(f)\times X(0) = \prod_{g\in\varnothing\cup\{f\}} X(g) = X(f) \tag{14.3.6}$$

现代控制论中的状态空间，模式识别的特征空间和参数空间，现代物理学中的相空间，医疗诊断中的症候空间等都是因素空间的特殊情形.

由定义可以推出下列性质.

定理 14.3.1 设 $\{X(f)\}_{(f\in F)}$ 为 U 上的一个因素空间，则：

(1) 对任意 $f,g\in F$，$f\geqslant g \Rightarrow f=g\times(f-g)$，$g\wedge(f-g)=0$；

(2) 对任意 $f\in F$，$1=f\times f^c$；

(3) 对任意 $f,g\in F$，$X(f\vee g)=X(f-g)\times X(f\wedge g)\times X(g-f)$

其中，$f-g=f\wedge g^c$.

证明 (1) 对任意 $f,g\in F$，如果 $f\geqslant g$，则

$$f=f\vee g=g\vee(f-g),\ g\wedge(f-g)=g\wedge(f\wedge g^c)=0;$$

(2) 对任意 $f\in F$，$1=f\vee f^c$；

(3) 对任意 $f,g\in F$，$f\vee g=(f-g)\vee(f\wedge g)\vee(g-f)$. □

假定要讨论一组概念 $\mathscr{C}=\{\alpha,\beta,\gamma,\cdots\}$，它们的论域记为 U. 取因素族 V 使 U 与 V 组成一个左配对 $(U,V]$. 再取因素集 $F\subset V$，使 F 对 U 是充足的，即满足条件

$$(\forall u_1,u_2\in U)(\exists f\in F)(f(u_1)\neq f(u_2))$$

这时，称三元组$(U,\mathscr{C},F)$或$(U,\mathscr{C},\{X(f)\}_{(f\in F)})$为 $\mathscr{B}$ 的一个描述空间(description space).

定理 14.3.2 设$(U,\mathscr{C},F)$为 $\mathscr{B}$ 的一个描述空间，则全因素 1 是一个

单射.

证明 因为$(U,\mathscr{C},F)$为$\mathscr{B}$的一个描述空间，所以对于任意$u_1,u_2\in U$，存在一个因素$f\in F$，使得$f(u_1)\neq f(u_2)$. 再由定理14.3.1(2)，我们有

$$1(u_1)=(f(u_1),f^c(u_1))\neq(f(u_2),f^c(u_2))=1(u_2).$$

这说明1是一个单射. □

给定一个描述空间$(U,\mathscr{C},F)$，任取一个概念$\alpha\in\mathscr{C}$，α在U中的外延是U上的一个Fuzzy集$A\in\mathscr{F}(U)$. 对于$\mathscr{C}$，每个状态空间$X(f)$都称为表现论域，$X(1)$称为完全表现论域. 实际上，U上的一个因素空间$\{X(f)\}_{(f\in F)}$就是B的表现论域族.

根据扩张原理I(参见定义2.4.1)，我们给出定义：

定义 14.3.2 给定描述空间$(U,\mathscr{C},F)$，取$\alpha\in\mathscr{C}$，其外延为$A\in\mathscr{F}(U)$，$\forall f\in F$，记

$$f(A):X(f)\to[0,1]$$

$$x\mapsto f(A)(x)\triangleq\bigvee_{f(u)=x}A(u) \tag{14.3.7}$$

$f(A)$是表现论域$X(f)$的Fuzzy集，即$f(A)\in\mathscr{F}((X(f))$，称之为概念$\alpha$在表现论域$X(f)$中的表现外延(representation extension).

定义 14.3.3 给定描述空间$(U,\mathscr{C},F)$，$\alpha\in\mathscr{C}$，$f\in F$. 已知概念α在表现论域$X(f)$中的表现外延$B(f)$，记

$$f^{-1}(B(f)):U\to[0,1]$$

$$u\mapsto f^{-1}(B(f))(u)\triangleq B(f)(f(u)) \tag{14.3.8}$$

$f^{-1}(B(f))\in F(U)$，称为概念α关于因素f的反馈外延(feedback extension).

定理 14.3.3 (1)给定描述空间$(U,\mathscr{C},F)$，取$\alpha\in\mathscr{C}$，其外延为$A\in\mathscr{F}(U)$，$\forall f\in F$，我们有

$$f^{-1}(f(A))\supseteq A \tag{14.3.9}$$

当f是单射时，上式等号成立.

(2) 给定描述空间$(U,\mathscr{C},F)$，$\alpha\in\mathscr{C}$，$f\in F$. 已知概念α在表现论域$X(f)$中的表现外延$B(f)$，那么

$$f(f^{-1}(B(f)))\subseteq B(f) \tag{14.3.10}$$

当f是满射时，上式等号成立.

证明 由定理2.4.10直接得到. □

定理 14.3.4 给定描述空间$(U,\mathscr{C},F)$，$\alpha\in\mathscr{C}$，其外延为$A\in\mathscr{F}(U)$，则

(1) $1^{-1}(1(A))=A$;

(2) $0^{-1}(0(A))(u)\equiv ht(A)$ ($ht(A)$是A的峰值，参见定义1.4.10).

证明 (1) 这是定理 14.3.2 和定理 14.3.3 的直接结果.

(2) 对任意 $u \in U$,

$$0^{-1}(0(A))(u) = 0(A)(0(u)) = \bigvee_{0(u')=0(u)} A(u') = \bigvee_{u' \in U} A(u') = ht(A). \quad \square$$

定义 14.3.4 给定描述$(U, \mathscr{C}, F)$空间, $\alpha \in \mathscr{C}$, A 为α 的外延, $G \subset F$, G 中因素相互独立,记

$$A[G] \triangleq \bigcap_{f \in G} f^{-1}(f(A)) \tag{14.3.11}$$

称 $A[G]$ 为 A 的G 反馈外延包络,简记 G-包络;特别地,当 F 为原子因素集时,称 $A[\pi]$ 为 A 的原子反馈外延闭包,简称 π-闭包.

赋予描述空间$(U, \mathscr{C}, F)$实际含义:

U ——一组策略,称为策略集;

$\mathscr{C}$ ——与策略有关的概念,即策略的分类命名,如“上策”、“中策”、“下策”等名称;

F ——与策略有关的因素集.

决策问题相当于在描述空间中寻找 $\mathscr{C}$ 中概念的外延. 要想求出这些外延,只需求出它们的反馈外延. 而这些反馈外延又可以由 G-包络(或 π-闭包)来实现. 我们称这样的决策方法为基础反馈外延的决策方法,简称为 DFE 决策方法.

DFE 决策方法可以细分为三种类型.

类型 1:排序型 DFE 决策(Orderable)

这时, $\mathscr{C} = \{\alpha\}$ 为单点集,比如 α=“优策略”. 若求出 G-包络 $A[G]$(或 π-闭包 $A[\pi]$),则 $A[G]: U \to [0,1]$(或 $A[\pi]: U \to [0,1]$)便把 U 中诸策略在 $[0,1]$ 中作全序排列,从而确定最优策略.

类型 2:竞争型 DFE 决策(Competitive)

此时, $U = \{u\}$ 为单点集, $\mathscr{C}$至少包含两个概念,比如 $\mathscr{C} = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k\}$, $k \geqslant 2$, 其外延分别为 A_i, $1 \leqslant i \leqslant k$. 若求出 G-包络 $A_i[G]$, $1 \leqslant i \leqslant k$, (或 π-闭包 $A_i[\pi]$, $1 \leqslant i \leqslant k$),则可以用最大隶属原则判断对象 u 相对隶属于 $A_i (1 \leqslant i \leqslant k)$中的某一个.

类型 3:竞争排序型 DFE 决策(Competitive/Orderable)

此时, U 与 B 均非单点集,比如 $U = \{u_1, u_2, \cdots, u_m\}$, $m \geqslant 2$, $B = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k\}$, $k \geqslant 2$. 先用“竞争”法将 U 分类,如 $u_{i_1}, u_{i_2}, \cdots, u_{i_p}$, $p \leqslant m$, 归属概念 α_q, $q \leqslant k$. 再将 $u_{i_1}, u_{i_2}, \cdots, u_{i_p}$ 用G-包络 $A_q[G]$(或 π-闭包 $A_q[\pi]$)排序,确定关于 α_q 的最佳策略. 如此,对每个概念 α_j, $1 \leqslant j \leqslant k$, 均有一个最佳策略,根据需要选择其中之一,或其中某几个策略.

关于 DFE 决策的实际操作，我们总结出以下几个步骤，为了叙述上的简便，以类型 1 为例加以说明：

(1)设定策略集 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_m\}$，根据实际情况，U 可以是一组策略，也可以是一类具有某种含义的对象.

(2)确定 $\mathscr{C}=\{\alpha\}$ 中的概念 α，即给其命名，如“优策略”，该概念以 U 为论域.

(3)选定与 U 有关的原子因素族 $\pi=\{f_1,f_2,\cdots,f_n\}$，并且确定它们的状态空间 $X(f_j)$，$j=1,2,\cdots,n$.

(4)置 $F=\mathscr{P}(\pi)$，$\vee\triangleq\bigcup$，$\wedge\triangleq\bigcap$，$c\triangleq\backslash$，$0\triangleq\varnothing$，$1\triangleq\pi$，则 $(F,\vee,\wedge,c,0,1)$ 构成一个完全的布尔代数，从而 $(U,\mathscr{C},F)$ 构成一个描述空间.

(5)采用一定的方法(如集值统计)作出 α 在诸表现论域 $X(f_j)$ $(j=1,2,\cdots,n)$ 中的表现外延 $B(f_j)$，$j=1,2,\cdots,n$.

(6)取适当的 n 维 t-模 $T_n\in\mathscr{T}(n)$(参见 § 1.3.4)，由 T_n 和诸 $B(f_j)$ 来构筑全因素表现论域(即全空间) $X(1)$ 中的表现外延 $B(1)$

$$B(1)(x_1,x_2,\cdots,x_n)\triangleq T_n(B(f_1)(x_1),\cdots,B(f_n)(x_n)).$$

(7)对每个原子因素 f_j，$j=1,2,\cdots,n$，确定关于诸策略的状态

$$f_j(u_i),\ i=1,2,\cdots,m,\ j=1,2,\cdots,n$$

于是便得到全因素 1 关于诸策略的状态

$$1(u_i)=(f_1(u_i),f_2(u_i),\cdots,f_n(u_i)),\ i=1,2,\cdots,m$$

1 是个向量值映射.

(8)确定概念 α 的反馈外延 $1^{-1}(B(1))$，将 α 的外延近似地取为 $1^{-1}(B(1))$，于是对任何 $u_i\in U$，便有

$$\begin{aligned}A(u_i)&\approx(1^{-1}(B(1)))(u_i)=B(1)(1(u_i))\\&=B(1)(f_1(u_i),f_2(u_i),\cdots,f_n(u_i))\\&=T_n(B(f_1)(f_1(u_i)),B(f_2)(f_2(u_i)),\cdots,B(f_n)(f_n(u_i)))\end{aligned}$$

然后，按最大隶属原则找出最优策略(或最佳对象) u_{i_0}.

例 14.3.1 人才优选问题. 考虑在三个“优秀学生”候选人张三、李四、王五中决定最后的中选者.

(1)取 $u_1=$张三，$u_2=$李四，$u_3=$王五，于是 $U=\{u_1,u_2,u_3\}$；

(2)设 $\alpha=$“优秀学生”，则 $B=\{\alpha\}=\{$优秀学生$\}$；

(3)设 $f_1=$数学，$f_2=$物理，$f_3=$化学，$f_4=$外语，取 $\pi=\{f_1,f_2,f_3,f_4\}$；令 $X(f_j)=[0,100]$，$j=1,2,3,4$；

(4)置 $F=\mathscr{P}(\pi)$，$(U,\mathscr{C},F)$ 构成一个描述空间；

(5)对于 $j=1,2,3,4$，取

$$B(f_j)(x)=\begin{cases}1, & 90\leqslant x\leqslant 100\\ \dfrac{x-80}{10}, & 80\leqslant x<90\\ 0, & 0\leqslant x<80\end{cases}$$

(6)取 4 维 t-模为乘法算子 Π(参见 § 1.3)即

$$\Pi\ (x_1,x_2,x_3,x_4)=\prod_{j=1}^{4}x_j=x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4$$

从而有

$$\begin{aligned}B(1)(x_1,x_2,x_3,x_4)&=\Pi\ (B(f_1)(x_1),B(f_2)(x_2),B(f_3)(x_3),B(f_4)(x_4))\\&=B(f_1)(x_1)\cdot B(f_2)(x_2)\cdot B(f_3)(x_3)\cdot B(f_4)(x_4)\end{aligned}$$

(7)假定 u_1，u_2，u_3 的学习成绩如表 14.3.1 所示.

表 14.3.1

	数 学	物 理	化 学	外 语
张三	85	91	96	92
李四	97	89	94	90
王五	90	93	87	98

由表 14.3.1 不难得到隶属函数 $B(f_j)(f_j(u_i))$ 如表 14.3.2 所示.

表 14.3.2

	f_1	f_2	f_3	f_4
u_1	0.5	1	1	1
u_2	1	0.9	1	1
u_3	1	1	0.7	1

再根据表 14.3.2 我们得到

$$1(u_1)=(0.5,1,1,1)$$
$$1(u_2)=(1,0.9,1,1)$$
$$1(u_3)=(1,1,0.7,1)$$

(8)计算 $A(u_i)$，$i=1,2,3$

$$A(u_1)\approx B(1)(1(u_1))=B(1)(f_1(u_1),f_2(u_1),f_3(u_1),f_4(u_1))$$

$=\prod(B(f_1)(f_1(u_1)),B(f_2)(f_2(u_1)),B(f_3)(f_3(u_1)),B(f_4)(f_4(u_1)))$

$=B(f_1)(f_1(u_1))\cdot B(f_2)(f_2(u_1))\cdot B(f_3)(f_3(u_1))\cdot B(f_4)(f_4(u_1))$

$=0.5\times1\times1\times1=0.5$

类似地有 $A(u_2)\approx0.9$, $A(u_3)\approx0.7$. 因此 u_2(即李四)为最后选中的优秀学生. □

§14.4 变权分析与多因素 Fuzzy 决策

所谓决策是针对某些既定的目标将多种可能采取的策略加以比较,选定最优策略。在实际问题中,大部分决策问题都是多目标决策(Multiple Objectives Decision-Making). 事实上,目标在一定意义下就是准则或判据,故这样的决策常常称为多判据决策(Multiple Criteria Decision-Making). 多判据决策大致可以分为两类,一类是多目标规划(Multiple Objectives Programming);另一类是多属性决策(Multiple Attributes Decision-Making),简记为 MADM. 前者的决策变量连续且蕴涵于约束条件所决定的区域内,多用于优化设计;后者的特点是其策略集有限,多用于方案择优. 按因素空间的观点,上述所有的决策问题均是多因素决策,下面给出其一般模型.

设 U 为策略集或称备择方案集,$f_1,f_2,\cdots,f_n$ 是与 U 有关的基本因素,假定它们相互独立,它们的状态空间为 $X(f_j)$ $(j=1,2,\cdots,n)$. 令

$$\pi\triangleq\{f_1,f_2,\cdots,f_n\} \tag{14.4.1}$$

视 π 为原子因素族,置 $F\triangleq\mathscr{P}(\pi)$,再令

$$\vee\triangleq\cup,\ \wedge\triangleq\cap,\ -=\backslash,0=\varnothing,1=\pi \tag{14.4.2}$$

则 $(F,\vee,\wedge,c,0,1)$ 为一个完备的布尔代数. 因 F 是一个原子格,故对任何因素 $f\in F$, 一定存在因素族 $\{f_{j_k}\}_{(1\leqslant k\leqslant r)}\subseteq\pi$, $1\leqslant r\leqslant n$, 使得 $f=\bigvee_{k=1}^{r}f_{j_k}$. 因此可以规定

$$X(f)=\prod_{k=1}^{r}X(f_{j_k}) \tag{14.4.3}$$

于是 $\{X(f)\}_{(f\in F)}$ 便构成一个因素空间,其全空间为

$$X(1)=\prod_{j=1}^{n}X(f_j) \tag{14.4.4}$$

对于每个策略 $u\in U$, u 由状态

$$1(u)=(f_1(u),f_2(u),\cdots,f_n(u))$$

完全确定. $1(u)$ 称为决策变量. 这时,状态空间(全空间) $X(1)=\prod_{j=1}^{m}X(f_j)$ 称为决策变量空间. 每个因素 $f\in F$ 称为一个目标(或准则、判据);特别地当 $f\in\pi$ 时,称之为基本目标(或基本准则、基本判据);1 称为全(总)目标(或全(总)准则、全(总)判据).

对每个基本目标 f_j,应有一个基本目标函数

$$\varphi_j:X(f)\to\mathbf{R}^+=\{\text{全体非负实数}\}\tag{14.4.5}$$

实际上 $\mathbf{R}^+$ 可以变换为 $[0,1]$,故我们认为

$$\varphi_j:X(f)\to[0,1]$$

于是便有全目标函数

$$\varphi:X(1)=\prod_{j=1}^{n}X(f_j)\to[0,1]^n$$

$$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mapsto\varphi(x)=(\varphi_1(x_1),\varphi_2(x_2),\cdots,\varphi_n(x_n))\tag{14.4.6}$$

$\varphi(x)$ 是一个向量值函数.

这样,决策问题就变成在 $(\varphi\circ 1)(U)$ 中的寻优问题. 然而 $\varphi(1(u))(u\in U)$ 在 U 中不是全序,这给排序带来了困难,因此要将其全序化,最直接的方法是使用 Fuzzy 综合函数(参见 § 6.3)将 $\varphi(1(u))$ 向$[0,1]$中投影. 如图 14.4.1 所示,由 $1,\varphi,M\in\mathcal{U}_n$ 可以确定一个决策函数 D_n

$$D_n\triangleq M\circ\varphi\circ 1:U\to[0,1]$$

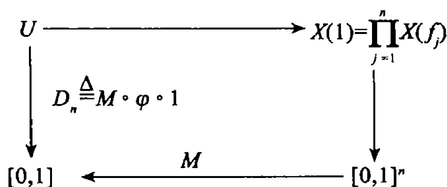


图 14.4.1

如果策略 $u_0\in U$ 满足条件

$$D_n(u_0)=\max\{D_n(u)\mid u\in U\}\tag{14.4.7}$$

则 u_0 便是所求的最优方案.

在 § 6.3 中所介绍的 Fuzzy 综合函数中权重是常数,在某些实际问题中会出现不合理现象.

例 14.4.1　考虑某项工程设计方案,该方案是否可以实施与两个重要因素有关:f_1=可行性,f_2=必要性. 假定这两个因素同等重要,则它们的权向量为

$$W=(w_1,w_2)=(0.5,0.5)$$

于是,加权平均型 Fuzzy 综合函数为

$$f_{\sum}(x_1,x_2)=0.5x_1+0.5x_2$$

对于状态 $X=(0.1,0.9)\in X(f_1)\times X(f_2)$ 和状态 $X=(0.5,0.5)\in X(f_1)\times X(f_2)$,按常识状态 X 的 Fuzzy 综合值远小于状态 X' 的 Fuzzy 综合值,但按上面的常权综合有

$$f_{\sum}(X)=0.5\times(0.1+0.9)=0.5=f_{\sum}(X')=0.5\times(0.5+0.5)$$

这与实际相悖. □

为了克服常权的缺点,汪培庄(1985)提出了变权的思想. 下面给出变权的公理化定义.

定义 14.4.1 所谓一组(n 维)变权(variable weights)是下述 n 个映射($j=1,2,\cdots,n$)

$$w_j:[0,1]^n\to[0,1]$$

$$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mapsto w_j(X)=w_j(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

满足三条公理:

(W.1)归一性:$\sum\limits_{j=1}^{n}w_j(x_1,x_2,\cdots,x_n)=1$;

(W.2)连续性:$w_j(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 关于每个变元连续,$j=1,2,\cdots,n$;

(W.3)惩罚性:$w_j(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 关于 x_j 单调下降,$j=1,2,\cdots,n$,且

$$f_{\sum}(X)=\sum_{j=1}^{n}w_j(x_1,x_2,\cdots,x_n)x_j \tag{14.4.8}$$

关于每一个变元是单调增加的.

由定义 6.3.1 易知 $f_{\sum}(X)=\sum\limits_{j=1}^{n}w_j(x_1,x_2,\cdots,x_n)x_j$ 是 n 元 Fuzzy 综合函数,即 $f_{\sum}(X)\in\mathscr{U}_n$.

例 14.4.2 设 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 是既定的归一化常权向量,置

$$w_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{\dfrac{a_1}{x_1}}{\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{a_j}{x_j}}$$

$$w_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{\dfrac{a_2}{x_2}}{\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{a_j}{x_j}}$$

$$\vdots$$

$$w_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{\frac{a_n}{x_n}}{\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j}{x_j}}$$

不难验证 $\{w_j(x_1,x_2,\cdots,x_n)\}$ $(j=1,2,\cdots,n)$满足变权公理(W.1),(W.2),(W.3). □

例 14.4.3　如果将例 14.4.2 中 $\{w_j(x_1,x_2,\cdots,x_n)\}$ $(j=1,2,\cdots,n)$改为

$$w_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{\frac{a_1}{x_1^2}}{\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j}{x_j^2}}$$

$$w_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{\frac{a_2}{x_2^2}}{\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j}{x_j^2}}$$

$$\vdots$$

$$w_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{\frac{a_n}{x_n^2}}{\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j}{x_j^2}}$$

不难验证 $\{w_j(x_1,x_2,\cdots,x_n)\}$ $(j=1,2,\cdots,n)$满足变权公理(W.1),(W.2)且 $w_j(x_1,x_2,\cdots,x_n)$关于 x_j 单调下降,但 $f_{\Sigma}(X)=\sum_{j=1}^{n}w_j(x_1,x_2,\cdots,x_n)x_j$ 关于每一个变元不一定单调增加. 如取 $n=2$, $a_1=a_2=\frac{1}{2}$, 则 $f_{\Sigma}(x_1,x_2)=\frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}}{\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}}$, 虽然 $0.5<0.8$, 但

$$f_{\Sigma}(0.5,0.2)=\frac{7}{29}>\frac{4}{17}=f_{\Sigma}(0.8,0.2).$$ □

下面讨论变权的计算.

设对总体而言,涉及 n 个因素 $A_1,A_2,\cdots,A_n$, 分别获得单因素评估指标为 $x_1,x_1,\cdots,x_n$. x_i 可以被解释为对总体而言因素 A_i $(i=1,2,\cdots,n)$的功能完善程度,并约定 x_i 值越高 A_i 越好(相反的情形可以类似地讨论). 不妨设 $x_i\in[0,1]$(若不然可以作相应的变换),当 $x_i=1$ 时,说明因素 A_i 十分完善;当 $x_i=0$ 时,说明 A_i 已完全失去了应有的作用.

设 A_i 相对总体而言的权重为

$$w_i = w_i(x_1, x_2, \cdots, x_n), \quad i=1,2,\cdots,n$$

记

$$w_i^{(m)} = w_i(1,1,\cdots,1), \quad i=1,2,\cdots,n \tag{14.4.9}$$

$w_i^{(m)}$ 表示总体功能十分完善时因素 A_i 所占的权重，并称为基础权重，$w_i^{(m)}$ 可以通过层次分析法等方法而得到. 又令

$$w_i^{(0)} = w_i(1,\cdots,1,0,1,\cdots,1), \quad i=1,2,\cdots,n \tag{14.4.10}$$

$w_i^{(0)}$ 表示 A_i 的功能完全丧失，其他功能则十分完善时 A_i 所占的权重. $w_i^{(0)}$ 可以由专家评定或按下式计算

$$w_i^{(0)} = \frac{w_i^{(m)}}{\min\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\{w_j^{(m)}\} + \max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\{w_j^{(m)}\}}, \quad i=1,2,\cdots,n \tag{14.4.11}$$

为了能简单且比较直观地获得 $w_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，再引入函数 $\lambda_i(x)$ $(i=1,2,\cdots,n)$，使之满足条件：

(1) $\lambda_i(x)$ 在 $[0,1]$ 上非负有界；

(2) $\lambda_i(x)$ 是定义在 $[0,1]$ 上不增的可微函数，即 $\lambda'_i(x)\leqslant 0(x\in[0,1])$；

(3)记 $\lambda_i(0)=\lambda_i^{(0)}$，$\lambda_i(1)=\lambda_i^{(m)}$，$\lambda_i^{(0)}$ 和 $\lambda_i^{(m)}$ 分别是 $\lambda_i(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值和最小值.

现设对于给定的一组单因素评估值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，已经找到了 $\lambda_i(x_i)$ $(i=1,2,\cdots,n)$，则令

$$w_i(x_1,x_2,\cdots,x_n) = \frac{\lambda_i(x_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_j(x_j)}, \quad i=1,2,\cdots,n \tag{14.4.12}$$

下面给出计算 $\lambda_i(x)$ 的三种方法：

设对于某个问题，已经给出了基础权重 $(w_1^{(m)},w_2^{(m)},\cdots,w_n^{(m)})$ 和 $(w_1^{(0)},w_2^{(0)},\cdots,w_n^{(0)})$，则先令

$$\lambda_i^{(m)} = w_i^{(m)}, \quad i=1,2,\cdots,n \tag{14.4.13}$$

再由 $w_i^{(0)}$ 和 $w_i^{(m)}$ 的定义及式(14.4.12)、式(14.4.13)可得

$$w_i^{(0)} = \frac{\lambda_i^{(0)}}{\lambda_i^{(0)} + \sum\limits_{j\neq i} w_i^{(m)}}, \quad i=1,2,\cdots,n$$

故

$$\lambda_i^{(0)} = \frac{w_i^{(0)}\sum\limits_{j\neq i} w_j^{(m)}}{1-w_i^{(0)}}, \quad i=1,2,\cdots,n \tag{14.4.14}$$

令

$$\lambda_{*i} = \sum_{j\neq i} w_j^{(m)}, \quad \lambda_{\cdot i}^{*} = \sum_{j\neq i} \lambda_j^{(0)}$$

(1)
$$\lambda_i(x) = \frac{\lambda_{\cdot i}^{*}\lambda_i^{(0)}}{\lambda^{*}\exp\left(\frac{1}{1-k_i}x^{1-k_i}\right)}, \quad i=1,2,\cdots,n \tag{14.4.15}$$

其中
$$\lambda^{*} = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{(0)}$$

$$k_i = 1 - \frac{1}{\ln\frac{\lambda_i^{(0)}(\lambda_{\cdot i}^{*}+w_i^{(m)})}{\lambda^{*}w_i^{(m)}}}.$$

(2)
$$\lambda_i(x) = \frac{\lambda_{*i}\lambda_i^{(0)}}{(\lambda_i^{(0)}+\lambda_{*i})\exp\left(\frac{\lambda_{*i}}{\lambda_{\cdot i}^{*}}\frac{1}{1-k_i}x^{1-k_i}\right)-\lambda_i^{(0)}}, \quad i=1,2,\cdots,n \tag{14.4.16}$$

其中

$$k_i = 1 - \frac{\lambda_{*i}}{\lambda_{\cdot i}^{*}\ln\frac{\lambda_i^{(0)}}{w_i^{(m)}(\lambda_i^{(0)}+\lambda_{*i})}}, \quad i=1,2,\cdots,n.$$

(3)
$$\lambda_i(x) = \lambda_i^{(0)}\exp\left(-\frac{1}{(1-k_i)\lambda_{\cdot i}^{*}}x^{1-k_i}\right), \quad i=1,2,\cdots,n \tag{14.4.17}$$

其中

$$k_i = 1 - \frac{1}{\lambda_{\cdot i}^{*}\ln\frac{w_i^{(m)}}{\lambda_i^{(0)}}}, \quad i=1,2,\cdots,n.$$

现在讨论多因素的 Fuzzy 决策方法.

设有某项工程,涉及因素 $A_1, A_2, \cdots, A_n$,并有 $P_1, P_2, \cdots, P_m$(人或单位)参与决策. 现提出 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_l$ 共 l 个方案,希望能对这 l 个方案进行排序,以便找到合理的方案.

先设第 i 个决策者 P_i 对第 k 个方案 Q_k 所涉及的第 j 个因素 A_j 的评价为

$$(u_{ij}^{(k)}, v_{ij}^{(k)}], i=1,2,\cdots,m, j=1,2,\cdots,n, k=1,2,\cdots,l$$

其中 $u_{ij}^{(k)}, v_{ij}^{(k)} \in [0,1]$,且 $u_{ij}^{(k)} < v_{ij}^{(k)}$,上述评价表明决策者 P_i 认为方案 Q_k 涉及因素 A_j 的优越程度介于 $u_{ij}^{(k)}$ 与 $v_{ij}^{(k)}$ 之间. 又记

$$\chi_{ij}^{(k)}(x) = \begin{cases} 1, & x \in (u_{ij}^{(k)}, v_{ij}^{(k)}] \\ 0, & x \notin (u_{ij}^{(k)}, v_{ij}^{(k)}] \end{cases}$$

其中 $x \in [0,1]$,再令

$$\mu_{\cdot j}^{(k)}(x)=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\chi_{ij}^{(k)}(x) \tag{14.4.18}$$

$$x_{\cdot j}^{(k)}=\frac{\int_0^1 x\mu_{\cdot j}^{(k)}(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 \mu_{\cdot j}^{(k)}(x)\mathrm{d}x} \tag{14.4.19}$$

总假设

$$\int_0^1 \mu_{\cdot j}^{(k)}(x)\mathrm{d}x\neq 0.$$

由此得到评估向量

$$\boldsymbol{X}^{(k)}=(x_{\cdot 1}^{(k)},x_{\cdot 2}^{(k)},\cdots,x_{\cdot n}^{(k)}),\quad k=1,2,\cdots,l$$

使用变权法，并记

$$w_{\cdot j}^{(k)}=w_{\cdot j}^{(k)}(x_{\cdot 1}^{(k)},x_{\cdot 2}^{(k)},\cdots,x_{\cdot n}^{(k)}),\quad j=1,2,\cdots,n,\ k=1,2,\cdots,l$$

得

$$D^{(k)}=\sum_{j=1}^{n}w_{\cdot j}^{(k)}x_{\cdot j}^{(k)},\quad k=1,2,\cdots,l$$

将 $\{D^{(k)}\}$ 按大小顺序排列，即可得 l 个方案的排序.

例 14.4.4 设有某项工程，由（P_1,P_2,P_3,P_4,P_5）5 个单位对已提出的（Q_1,Q_2,Q_3）3 个方案的节省投资 A_1，缩短工期 A_2，优雅美观 A_3 等 3 个方面进行了评估，具体结果列于表 14.4.1.

表 14.4.1

		P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
Q_1	A_1	(0.85,1.00]	(0.95,1.00]	(0.85,0.95]	(0.90,0.95]	(0.85,1.00]
	A_2	(0.60,0.65]	(0.55,0.65]	(0.55,0.60]	(0.50,0.60]	(0.50,0.55]
	A_3	(0.20,0.25]	(0.20,0.30]	(0.20,0.30]	(0.25,0.35]	(0.20,0.25]
Q_2	A_1	(0.10,0.20]	(0.15,0.20]	(0.15,0.25]	(0.15,0.20]	(0.10,0.20]
	A_2	(0.90,1.00]	(0.95,1.00]	(0.85,0.95]	(0.85,1.00]	(0.90,1.00]
	A_3	(0.50,0.65]	(0.50,0.60]	(0.45,0.60]	(0.50,0.60]	(0.45,0.55]
Q_3	A_1	(0.50,0.60]	(0.55,0.65]	(0.45,0.55]	(0.45,0.60]	(0.55,0.60]
	A_2	(0.10,0.15]	(0.10,0.20]	(0.15,0.25]	(0.10,0.15]	(0.10,0.20]
	A_3	(0.90,1.00]	(0.90,0.95]	(0.85,0.95]	(0.90,0.95]	(0.95,1.00]

由式(14.4.18)得

$$\mu_{\cdot 1}^{(1)}(x)=\begin{cases}0 & x\in[0,0.85]\\0.6 & x\in(0.85,0.90]\\0.8 & x\in(0.90,0.95]\\0.6 & x\in(0.95,1.00]\end{cases}\qquad \mu_{\cdot 2}^{(1)}(x)=\begin{cases}0 & x\in[0,0.50]\\0.4 & x\in(0.50,0.55]\\0.6 & x\in(0.55,0.60]\\0.4 & x\in(0.60,0.65]\end{cases}$$

$$\mu_{\cdot 3}^{(1)}(x)=\begin{cases}0 & x\in[0,0.20]\\0.8 & x\in(0.20,0.25]\\0.6 & x\in(0.25,0.30]\\0.2 & x\in(0.30,0.35]\end{cases}\qquad \mu_{\cdot 1}^{(2)}(x)=\begin{cases}0 & x\in[0,0.10]\\0.4 & x\in(0.10,0.15]\\1.0 & x\in(0.15,0.20]\\0.2 & x\in(0.20,0.25]\end{cases}$$

$$\mu_{\cdot 2}^{(2)}(x)=\begin{cases}0 & x\in[0,0.85]\\0.4 & x\in(0.85,0.90]\\0.8 & x\in(0.90,0.95]\\0.8 & x\in(0.95,1.00]\end{cases}\qquad \mu_{\cdot 3}^{(2)}(x)=\begin{cases}0 & x\in[0,0.45]\\0.4 & x\in(0.45,0.50]\\1.0 & x\in(0.50,0.55]\\0.8 & x\in(0.55,0.60]\\0.2 & x\in(0.60,0.65]\end{cases}$$

$$\mu_{\cdot 1}^{(3)}(x)=\begin{cases}0 & x\in[0,0.45]\\0.4 & x\in(0.45,0.50]\\0.6 & x\in(0.50,0.55]\\0.8 & x\in(0.55,0.60]\\0.2 & x\in(0.60,0.65]\end{cases}\qquad \mu_{\cdot 2}^{(3)}(x)=\begin{cases}0 & x\in[0,0.10]\\0.8 & x\in(0.10,0.15]\\0.6 & x\in(0.15,0.20]\\0.2 & x\in(0.20,0.25]\end{cases}$$

$$\mu_{\cdot 3}^{(3)}(x)=\begin{cases}0 & x\in[0,0.85]\\0.2 & x\in(0.85,0.90]\\0.8 & x\in(0.90,0.95]\\0.4 & x\in(0.95,1.00]\end{cases}$$

使用式(14.4.19)，对于任意 k,j，可得 $x_{\cdot j}^{(k)}$，从而得

$$X^{(1)}=(0.9250,0.5750,0.2563)$$

$$X^{(2)}=(0.1688,0.9350,0.5417)$$

$$X^{(3)}=(0.5432,0.1563,0.9321)$$

又若对于因素 A_1,A_2,A_3 已知基础权向量为

$$(w_1^{(m)},w_2^{(m)},w_3^{(m)})=(0.50,0.35,0.15)$$

由式(14.4.11)、式(14.4.14)及 $\lambda_{\cdot i}^*,\lambda_{*i}$ 的定义，分别可以计算出

$$(w_1^{(0)},w_2^{(0)},w_3^{(0)})=(0.769,0.538,0.231)$$

$$(\lambda_1^{(0)},\lambda_2^{(0)},\lambda_3^{(0)})=(1.667,0.758,0.255)$$

$$(\lambda_{\cdot 1}^*,\lambda_{\cdot 2}^*,\lambda_{\cdot 3}^*)=(1.013,1.922,2.425)$$

$$(\lambda_{*1},\lambda_{*2},\lambda_{*3})=(0.50,0.65,0.85)$$

再利用式(14.4.15),即可计算出方案 Q_1,Q_2,Q_3 对因素 A_1,A_2,A_3 的变权值、综合值以及以基础权向量为常权数的“常权综合值”,如表 14.4.2 所示.

表 14.4.2

方案	A_1	A_2	A_3	综合值	常权综合值
Q_1	0.413	0.405	0.182	66.16	70.22
Q_2	0.717	0.179	0.104	34.46	49.29
Q_3	0.522	0.391	0.087	42.95	46.96

由表 14.4.2 可知,按变权法综合值,3 个方案的排序应为 Q_1、Q_3、Q_2;而按常权综合值排序则应为 Q_1、Q_2、Q_3. 因为 Q_2 关于 A_1 的评估值很低,而基础权重则表明我们是特别重视节省投资的,故将 Q_2 排在最后是必然的,也是正确的. □

Fuzzy 时间序列预测方法主要包括普通时间序列的模糊分析与模糊时间序列的分析,这些方法的详细研究可以参考相关文献(Chen,1996; Hong, 2005; Huang, 2001a, b; Hwang, Chen, et al. ,1998; Li, Kuo, et al. , 2009; Singh, 2007, 2008, 2009; Song, Chissom, 1993a, b, 1994; Song, Leland, et al. , 1995; Yu, 2005a). 对于 Fuzzy 时间序列的研究还有 Fuzzy 随机的 Fuzzy 时间序列分析(Song, Leland, et al. , 1997)等. Fuzzy 时间序列分析方法应用于许多方面(Chen, Hwang, 2000; Cheng, Chang, et al. , 2006; Hsu, Tse, et al. , 2003; Huarng, Yu, 2005; Huarng, Yu, 2006a,b; Yu, 2005b). Tanaka 等人(1982,1987,1991,1995)和其他研究者(Kim, Bishu, 1998; Pan, Lin, et al. , 2009; Peters, 1994)在 Fuzzy 回归分析上进行了许多研究,可以查阅他们的论文. Fuzzy 回归模型被应用于许多方面,如预测(Chang, 1997; Chen, Wang, 1999; Heshmaty, Kandel, 1985; Modarres, Nasrabadi, et al. , 2005; Sánchez, 2006; Tsaur, Wang, et al. , 2002; Tseng, Tzeng, 2002)和工程(Chang, Konz, et al. , 1996; Lai, Chang, 1994)等. 基于 Fuzzy 聚类分析的预测和 Fuzzy 逻辑与 Fuzzy 推理的预测方法等可以查阅相关应用文献.

因素空间理论与 Fuzzy 决策(Kandel, Peng, et al. , 1990; Li, Huang et al. , 1993; Li, Phillip Chen, Yen, et al. , 2000; Li, Phillip Chen, Lee, 2000; Li, Wang, et al. , 1998; Li, Yen, et al. , 2000; Luo, 1993; Wang, 1990; Wang, 1993;汪培庄等,1996)和变权分析与 Fuzzy 决策(Li, H. , 1990,1996;

Li, Li, et al., 2004; 李洪兴,1988;汪培庄,1985;汪培庄等,1996)是本章讨论的重点. 关于 Fuzzy 决策的另一类问题——Fuzzy 多目标规划和 Fuzzy 动态规划可以参阅第 9 章和相关文献(Bellman, Zadeh, 1970; Yoshida, 1998). 如果想系统地了解模糊多准则决策理论与应用,可以阅读李荣钧(2002)的专著.

第15章 Fuzzy集理论的若干相关理论

为了处理不确定性问题，Fuzzy集的概念应运而生. 从此以后，围绕不确定性问题提出与Fuzzy集相关的新理论和新方法一直没有间断过. 最具有代表性的有粗糙集理论和可信性理论. 本章简单介绍粗糙集理论、可信性理论和不确定理论的基本思想和方法.

§15.1 粗糙集理论

粗糙集理论作为一种处理不精确(imprecise)、不一致(inconsistent)、不完整(incomplete)等各种不完备信息的有效工具，一方面得益于该理论的数学基础成熟、不需要先验知识；另一方面在于该理论的易用性. 下面先从Pawlak粗糙集开始，对各类粗糙集进行简单的介绍.

15.1.1 Pawlak粗糙集

Fuzzy集的隶属函数可以在[0,1]的闭区间内取值，允许元素部分属于该集合. Zadeh提出Fuzzy集后，不少理论计算机科学家和逻辑学家试图通过这一理论解决G. Frege的含糊概念. 但是，Fuzzy集是不可计算的，没有给出数学公式描述这一含糊概念，故无法计算其边界线上具体的含糊元素数目. 1982年，Pawlak针对这一问题提出了粗糙集的概念.

定义 15.1.1 (Pawlak，1982) 设 X 是一个有限非空论域，并且 R 是 X 上的等价关系，则关系系统 $K=(X,R)$ 称为一个近似空间(approximation space). 如果 $x, y\in X$，并且 $(x, y)\in R$，那么 x 和 y 属于相同的等价类，这时说 x 和 y 在 K 上是不可区分的(indistinguishable)，关系 R 也称为一个不可区分关系(indiscernibility relation). $[x]_R$ 表示 R 包含元素 x 的等价类(也称为 R 或 K 的基本集)，X/R 表示 R 的全体等价类或基本集. 设 $A\subseteq X$，若 A 能表示成为一些 R 的基本集的并，则称 A 为 K 上的精确集或可定义集或 R 可定义集，否则称 A 为 K 上的粗糙集(rough set)或 R 粗糙集.

为了描述粗糙集，Pawlak引进两个精确集：上近似集(upper approximation

set)和下近似集(lower approximation set).

定义 15.1.2　(Pawlak, 1982) 设(X, R)为近似空间，$A \subseteq X$是任一子集，则有

下近似集 $\underline{R}A = \{x \in X \mid [x]_R \subseteq A\}$ 或 $\underline{R}A = \bigcup \{B \in X/R \mid B \subseteq A\}$　(15.1.1)

即根据关系 R 肯定属于 A 的 X 中的元素的集合.

上近似集 $\overline{R}A = \{x \in X \mid [x]_R \cap A \neq \varnothing\}$ 或 $\overline{R}A = \bigcup \{B \in X/R \mid B \cap A \neq \varnothing\}$　(15.1.2)

即根据关系 R 可能属于 A 的 X 中的元素的集合.

集合 $bn_R(A) = \overline{R}A \backslash \underline{R}A$ 称为 A 的 R 边界；$pos_R(A) = \underline{R}A$ 称为 A 的 R 正域；$neg_R(A) = X \backslash \overline{R}A$ 称为 A 的 R 负域.

上近似集、下近似集的形象表示如图 15.1.1 所示.

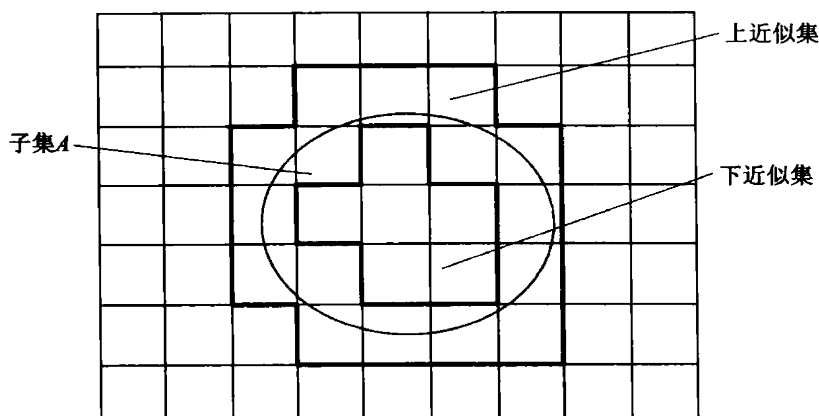


图 15.1.1　A 的上近似集与下近似集

例 15.1.1　给定一玩具积木的集合 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_8\}$，并假设这些积木有不同的颜色(红、黄、蓝)，形状(方、圆、三角)，体积(小，大). 因此，这些积木都可以用颜色、形状、体积这些知识来描述. 例如一块积木可以是红色、小而圆的，或黄色、大而方的等. 如果我们根据某一属性描述这些积木的情况，就可以按颜色、形状、体积分类.

按颜色分类：

x_1, x_3, x_7——红；

x_2, x_4——蓝；

x_5, x_6, x_8——黄.

按形状分类：

x_1, x_5——圆；

x_2, x_6——方；

x_3, x_4, x_7, x_8——三角.

按体积分类：

x_2, x_7, x_8——大；

x_1, x_3, x_4, x_5, x_6——小.

换言之，我们定义三个等价关系(即属性)：颜色 R_1，形状 R_2 和体积 R_3，通过这些等价关系，可以得到下面三个等价类

$$X/R_1 = \{\{x_1, x_3, x_7\}, \{x_2, x_4\}, \{x_5, x_6, x_8\}\}$$
$$X/R_2 = \{\{x_1, x_5\}, \{x_2, x_6\}, \{x_3, x_4, x_7, x_8\}\}$$
$$X/R_3 = \{\{x_2, x_7, x_8\}, \{x_1, x_3, x_4, x_5, x_6\}\}$$

若 $A = \{x_2, x_4, x_6\}$，则

$$\underline{R_1}A = \{x_2, x_4\},\ \overline{R_1}A = \{x_2, x_4, x_5, x_6, x_8\}$$
$$bn_{R_1}(A) = \overline{R_1}A \backslash \underline{R_1}A = \{x_5, x_6, x_8\}$$
$$pos_{R_1}(A) = \underline{R_1}A = \{x_2, x_4\},\ neg_{R_1}(A) = X \backslash \overline{R_1}A = \{x_1, x_3, x_7\}. \qquad \square$$

定理 15.1.1 设 $A \subseteq X$ 是任一子集，R 是 X 上的等价关系，则：

(1) A 是 R 可定义集当且仅当 $\overline{R}A = \underline{R}A$；

(2) A 是 R 粗糙集当且仅当 $\overline{R}A \neq \underline{R}A$.

以上是经典的 Pawlak 意义下的粗糙集. 但由于其核心总在下近似、上近似的概念上讨论，所以我们常常用下近似、上近似构成的偶对 $(\underline{R}(A), \overline{R}(A))$ 称为 A 的粗糙集.

定理 15.1.2 设(X, R)为近似空间，则 $\forall A, B \subseteq X$：

(1) $\underline{R}A \subseteq A \subseteq \overline{R}A$；

(2) $\underline{R}(A^c) = (\overline{R}A)^c$, $\overline{R}(A^c) = (\underline{R}A)^c$；

(3) $\underline{R}\varnothing = \overline{R}\varnothing = \varnothing$, $\underline{R}X = \overline{R}X = X$；

(4) $\overline{R}(A \cup B) = \overline{R}A \cup \overline{R}B$, $\underline{R}(A \cap B) = \underline{R}A \cap \underline{R}B$；

(5) $A \subseteq B \Rightarrow \underline{R}A \subseteq \underline{R}B$, $\overline{R}A \subseteq \overline{R}B$；

(6) $\underline{R}(A \cup B) \supseteq \underline{R}A \cup \underline{R}B$, $\overline{R}(A \cap B) \subseteq \overline{R}A \cap \overline{R}B$；

(7) $\underline{R}(\underline{R}A) = \overline{R}(\underline{R}A) = \underline{R}A$, $\overline{R}(\overline{R}A) = \underline{R}(\overline{R}A) = \overline{R}A$.

证明 (1) $x \in \underline{R}A \Rightarrow x \in [x]_R \subseteq A$. 因此，$\underline{R}A \subseteq A$.

$x \in A \Rightarrow [x]_R \cap A \neq \varnothing \Rightarrow x \in \overline{R}A$. 因此 $A \subseteq \overline{R}A$.

(2) 因为 $x \in \underline{R}A^c \Leftrightarrow [x]_R \subseteq A^c \Leftrightarrow [x]_R \cap A = \varnothing$

$$\Leftrightarrow x \bar{\in} \overline{R}(A) \Leftrightarrow x \in (\overline{R}(A))^c,$$

所以 $\underline{R}A^c = (\overline{R}(A))^c$.

在上式中用 A^c 代替 A,即得 $\overline{R}A^c = (\underline{R}A)^c$.

(3) 由(1)知,$\underline{R}\varnothing \subseteq \varnothing$,所以 $\underline{R}\varnothing = \varnothing$. 假设 $\overline{R}\varnothing \neq \varnothing$,则存在 x 使得 $x \in \overline{R}\varnothing$,即 $[x]_R \cap \varnothing \neq \varnothing$,这是不可能的. 因此,$\overline{R}\varnothing = \varnothing$.

由 $\underline{R}\varnothing = \overline{R}\varnothing = \varnothing$ 与(2)得到 $\underline{R}X = \overline{R}X = X$.

(4) $x \in \overline{R}(A \cup B) \Leftrightarrow [x]_R \cap (A \cup B) \neq \varnothing$

$$\Leftrightarrow ([x]_R \cap A) \cup ([x]_R \cap B) \neq \varnothing$$

$$\Leftrightarrow [x]_R \cap A \neq \varnothing \text{ 或 } [x]_R \cap B \neq \varnothing$$

$$\Leftrightarrow x \in \overline{R}A \text{ 或 } x \in \overline{R}B$$

$$\Leftrightarrow x \in \overline{R}A \cup \overline{R}B$$

因此 $$\overline{R}(A \cup B) = \overline{R}A \cup \overline{R}B.$$

由 $\overline{R}(A \cup B) = \overline{R}A \cup \overline{R}B$ 与(2)得到 $\underline{R}(A \cap B) = \underline{R}A \cap \underline{R}B$.

(5) $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A \Rightarrow \underline{R}(A \cap B) = \underline{R}A$. 由(4)知,$\underline{R}A \cap \underline{R}B = \underline{R}A$,因此

$$\underline{R}A \subseteq \underline{R}B.$$

$A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B \Rightarrow \overline{R}(A \cup B) = \overline{R}B$. 由(4)知,$\overline{R}A \cup \overline{R}B = \overline{R}B$,因此

$$\overline{R}A \subseteq \overline{R}B.$$

(6) $A \subseteq A \cup B, B \subseteq A \cup B \Rightarrow \underline{R}A \subseteq \underline{R}(A \cup B), \underline{R}B \subseteq \underline{R}(A \cup B)$

$$\Rightarrow \underline{R}A \cup \underline{R}B \subseteq \underline{R}(A \cup B).$$

$A \cap B \subseteq A, A \cap B \subseteq B \Rightarrow \overline{R}(A \cap B) \subseteq \overline{R}A, \overline{R}(A \cap B) \subseteq \overline{R}B$

$$\Rightarrow \overline{R}A \cap \overline{R}B \subseteq \overline{R}A \cap \overline{R}B.$$

(7) 由于上近似集、下近似集是精确集,所以结论是直接的. □

15.1.2 Dubois 和 Prade 意义下的粗糙 Fuzzy 集

如果考虑有限非空论域 X 上的 Fuzzy 集,则 Pawlak 意义下的粗糙集可以推广.

定义 15.1.3 (Dubois and Prade, 1990) 设 R 是有限非空论域 X 上的等价关系,对于 Fuzzy 集 $A \in \mathscr{F}(X)$,A 的下近似与上近似分别定义为两个 Fuzzy 集 $\underline{R}(A)$ 和 $\overline{R}(A)$,它们的隶属函数为

$$\underline{R}(A)(x) = \wedge \{A(y) \mid y \in [x]_R\} \quad (15.1.3)$$

$$\overline{R}(A)(x) = \vee \{A(y) \mid y \in [x]_R\} \quad (15.1.4)$$

称 Fuzzy 集偶对 $(\underline{R}(A), \overline{R}(A))$ 为粗糙 Fuzzy 集(rough fuzzy set).

定理 15.1.3 设(X, R)为近似空间,则 $\forall A, B \subseteq X$:

(1) $\underline{R}A \subseteq A \subseteq \overline{R}A$;

(2) $A \subseteq B \Rightarrow \underline{R}A \subseteq \underline{R}B, \overline{R}A \subseteq \overline{R}B$;

(3) $\underline{R}(A^c) = (\overline{R}A)^c, \overline{R}(A^c) = (\underline{R}A)^c$;

(4) $\underline{R}\varnothing = \overline{R}\varnothing = \varnothing, \underline{R}X = \overline{R}X = X$;

(5) $\overline{R}(A \cup B) = \overline{R}A \cup \overline{R}B, \underline{R}(A \cap B) = \underline{R}A \cap \underline{R}B$;

(6) $\underline{R}(A \cup B) \supseteq \underline{R}A \cup \underline{R}B, \overline{R}(A \cap B) \subseteq \overline{R}A \cap \overline{R}B$;

(7) $\underline{R}(\underline{R}A) = \overline{R}(\underline{R}A) = \underline{R}A, \overline{R}(\overline{R}A) = \underline{R}(\overline{R}A) = \overline{R}A$.

证明 (1) $\underline{R}(A)(x) = \wedge \{A(y) | y \in [x]_R\} \leqslant A(x) \leqslant \vee \{A(y) | y \in [x]_R\} = \overline{R}(A)(x)$.

(2) $A \subseteq B \Rightarrow \underline{R}(A)(x) = \wedge \{A(y) | y \in [x]_R\} \leqslant \wedge \{B(y) | y \in [x]_R\} = \underline{R}(B)(x) \Rightarrow \underline{R}A \subseteq \underline{R}B$. 同理 $A \subseteq B \Rightarrow \overline{R}A \subseteq \overline{R}B$.

(3) $\underline{R}(A^c)(x) = \wedge \{A^c(y) | y \in [x]_R\} = 1 - \vee \{A(y) | y \in [x]_R\} = (\overline{R}A)^c(x)$.

$\overline{R}(A^c)(x) = \vee \{A^c(y) | y \in [x]_R\} = 1 - \wedge \{A(y) | y \in [x]_R\} = (\underline{R}A)^c(x)$.

(4) $\underline{R}(\varnothing)(x) = \wedge \{\varnothing(y) | y \in [x]_R\} = 0, \overline{R}(\varnothing)(x) = \vee \{\varnothing(y) | y \in [x]_R\} = 0$.

由 $\underline{R}\varnothing = \overline{R}\varnothing = \varnothing$ 与(2)得到, $\underline{R}X = \overline{R}X = X$.

(5) $\overline{R}(A \cup B)(x) = \vee \{(A \cup B)(y) | y \in [x]_R\} = \vee \{A(y) \vee B(y) | y \in [x]_R\} = (\overline{R}A \cup \overline{R}B)(x)$.

由 $\overline{R}(A \cup B) = \overline{R}A \cup \overline{R}B$ 与(3)得到 $\underline{R}(A \cap B) = \underline{R}A \cap \underline{R}B$.

(6) 由(2)直接得到.

(7) 注意由 $y \in [x]_R$ 可知 $[x]_R = [y]_R$,于是由式(15.1.3)、式(15.1.4)得到

$$
\begin{aligned}
\underline{R}(\underline{R}A)(x) &= \wedge \{ \wedge \{A(z) | z \in [y]_R\} | y \in [x]_R\} \\
&= \wedge \{A(x) | z \in [x]_R\} = \underline{R}A(x).
\end{aligned}
$$

即 $\underline{R}(\underline{R}A) = \underline{R}A$, 同理可证 $\overline{R}(\underline{R}A) = \underline{R}A$ 和 $\overline{R}(\overline{R}A) = \underline{R}(\overline{R}A) = \overline{R}A$. □

定理 15.1.4 设(X, R)为近似空间, $(\underline{R}(A), \overline{R}(A))$ 为 A 的粗糙 Fuzzy 集,那么我们有下列 α-水平性质, $\forall \alpha \in [0,1]$.

(1) $\underline{R}(A_\alpha) = (\underline{R}(A))_\alpha, \underline{R}(A_{\bar{\alpha}}) = (\underline{R}(A))_{\bar{\alpha}}$;

(2) $\overline{R}(A_\alpha) = (\overline{R}(A))_\alpha, \overline{R}(A_{\bar{\alpha}}) = (\overline{R}(A))_{\bar{\alpha}}$.

证明 (1) $\forall \alpha \in [0,1], x \in (\underline{R}(A))_\alpha \Leftrightarrow \wedge \{A(y) \mid y \in [x]_R\} \geqslant \alpha$

$$\Leftrightarrow (\forall y \in [x]_R)(A(y) \geqslant \alpha)$$
$$\Leftrightarrow (\forall y \in [x]_R)(A_\alpha(y) = 1)$$
$$\Leftrightarrow \wedge \{A_\alpha(y) \mid y \in [x]_R\} = 1$$
$$\Leftrightarrow x \in \underline{R}(A_\alpha).$$

(2) $\forall \alpha \in [0,1], x \in (\overline{R}(A))_\alpha \Leftrightarrow \vee \{A(y) \mid y \in [x]_R\} \geqslant \alpha$

$$\Leftrightarrow (\exists y \in [x]_R)(A(y) \geqslant \alpha)$$
$$\Leftrightarrow (\exists y \in [x]_R)(A_\alpha(y) = 1)$$
$$\Leftrightarrow \vee \{A_\alpha(y) \mid y \in [x]_R\} = 1 \text{（注意 } X \text{ 是有限集）}$$
$$\Leftrightarrow x \in \overline{R}(A_\alpha).$$

(1)和(2)中的第二个等式可以用类似的方法证明. 但我们必须注意 $A_{\bar{1}} = \varnothing$ 和

$$\underline{R}(\varnothing) = \overline{R}(\varnothing) = \varnothing.$$ □

推论 15.1.1 设(X, R)为近似空间，$(\underline{R}(A), \overline{R}(A))$ 为 A 的粗糙 Fuzzy 集. 则：

(1) $\underline{R}(A) = \bigcup\limits_{\alpha \in [0,1]} \alpha \underline{R}(A_\alpha) = \bigcup\limits_{\alpha \in [0,1]} \alpha \underline{R}(A_{\bar{\alpha}})$；

(2) $\overline{R}(A) = \bigcup\limits_{\alpha \in [0,1]} \alpha \overline{R}(A_\alpha) = \bigcup\limits_{\alpha \in [0,1]} \alpha \overline{R}(A_{\bar{\alpha}})$.

15.1.3 Dubois 和 Prade 意义下的 Fuzzy 粗糙集

如果还考虑有限非空论域上的 Fuzzy 等价关系，则粗糙 Fuzzy 集可以推广.

定义 15.1.4 (Dubois and Prade, 1990) 设 R 是有限论域 X 上的 Fuzzy 等价关系，则 $K=(X, R)$称为一个 Fuzzy 近似空间(fuzzy approximation space). 如果 A 是 X 上的 Fuzzy 集，定义 X 上的两个 Fuzzy 集 $\underline{R}(A)$ 和 $\overline{R}(A)$ 并且

$$\underline{R}(A)(x) = A \hat{\circ} R^c(x) = \bigwedge_{y \in X} \{A(y) \vee (1 - R(x,y))\}, x \in X \tag{15.1.5}$$

$$\overline{R}(A)(x) = A \circ R(x) = \bigvee_{y \in X} \{A(y) \wedge R(x,y)\}, x \in X \tag{15.1.6}$$

则 $\underline{R}(A)$ 和 $\overline{R}(A)$ 分别称为 Fuzzy 集 A 的下近似和上近似(lower and upper approximation)，$(\underline{R}(A), \overline{R}(A))$ 称为 Fuzzy 粗糙集(fuzzy rough set).

例 15.1.2 (Pawlak, 1982) 如果 R 是有限论域 X 上的经典等价关系(crisp equivalence relation) 并且 $A \subseteq X$，则

$$\underline{R}(A)(x) = 1 \Leftrightarrow \forall y \in X, A(y) \vee (1 - R(x,y)) = 1$$
$$\Leftrightarrow \forall y \in X, (R(x,y) = 1 \Rightarrow A(x) = 1)$$

$$\Leftrightarrow [x]_R \subseteq A$$

$$\overline{R}(A)(x)=1 \Leftrightarrow \exists y \in X, A(y) \wedge R(x,y)=1$$

$$\Leftrightarrow [x]_R \cap A \neq \varnothing$$

于是

$$\underline{R}(A)=\{x \in X \mid [x]_R \subseteq A\}$$

$$\overline{R}(A)=\{x \in X \mid [x]_R \cap A \neq \varnothing\}$$

$(\underline{R}(A), \overline{R}(A))$ 即为定义 15.1.2 中的 Pawlak 粗糙集. □

例 15.1.3 (Dubois and Prade, 1990) 如果 R 是有限论域 X 上的经典等价关系(crisp equivalence relation)并且 $A \in \mathscr{F}(X)$，则

$$\underline{R}(A)(x)=\wedge \{A(y) \mid y \in [x]_R\}$$

$$\overline{R}(A)(x)=\vee \{A(y) \mid y \in [x]_R\}$$

Fuzzy 集偶对 $(\underline{R}(A), \overline{R}(A))$ 即为定义 15.1.3 中讨论的粗糙 Fuzzy 集. □

例 15.1.4 (Dubois and Prade, 1990) 如果 R 是有限论域 X 上的 Fuzzy 等价关系并且 $A \subseteq X$，则

$$\underline{R}(A)(x)=\bigwedge_{y \notin A} \{1-R(x,y)\}$$

$$\overline{R}(A)(x)=\bigvee_{y \in A} \{R(x,y)\}.$$

□

下面讨论 Fuzzy 粗糙集的性质.

定理 15.1.5 在 Fuzzy 近似空间 (X,R) 中，$(\underline{R}(A), \overline{R}(A))$ 为式(15.1.5)、式(15.1.6)所定义的 Fuzzy 粗糙集，对任意 $A,B \in \mathscr{F}(X)$，有下列性质：

(1) $\underline{R}(A) \subseteq A \subseteq \overline{R}(A)$；

(2) $A \subseteq B \Rightarrow \underline{R}(A) \subseteq \underline{R}(B)$, $\overline{R}(A) \subseteq \overline{R}(B)$；

(3) $\underline{R}(A^c)=(\overline{R}(A))^c$, $\overline{R}(A^c)=(\underline{R}(A))^c$；

(4) $\underline{R}(\varnothing)=\overline{R}(\varnothing)=\varnothing$, $\underline{R}(X)=\overline{R}(X)=X$；

(5) $\underline{R}(A \cup B) \supseteq \underline{R}(A) \cup \underline{R}(B)$, $\underline{R}(A \cap B)=\underline{R}(A) \cap \underline{R}(B)$；

(6) $\overline{R}(A \cup B)=\overline{R}(A) \cup \overline{R}(B)$, $\overline{R}(A \cap B) \subseteq \overline{R}(A) \cap \overline{R}(B)$.

证明 (1) $\forall x \in X$, $\underline{R}(A)(x)=\bigwedge_{y \in X} \{A(y) \vee (1-R(x,y))\} \leqslant A(x) \vee (1-R(x,x))=A(x)$,

$$\overline{R}(A)(x)=\bigvee_{y \in X} \{A(y) \wedge R(x,y)\} \geqslant A(x) \wedge R(x,x)=A(x).$$

(2) 由定义直接得到.

(3) $\underline{R}(A^c)(x)=\bigwedge_{y \in X} \{(1-A(y)) \vee (1-R(x,y))\}=1-\bigvee_{y \in X} \{A(y) \wedge R(x,$

$y)\} = (\overline{R}(A))^c(x)$.

在 $\underline{R}(A^c) = (\overline{R}(A))^c$ 中 A 用 A^c 代替即得 $\overline{R}(A^c) = (\underline{R}(A))^c$.

(4) 由(1)知, $\underline{R}(\varnothing) \subseteq \varnothing \subseteq \overline{R}(\varnothing)$. 又 $\overline{R}(\varnothing)(x) = \bigvee_{y\in X} \{\varnothing(y) \wedge R(x, y)\} = 0$. 因此(4)中第一式成立,又由 $\underline{R}(\varnothing) = \overline{R}(\varnothing) = \varnothing$ 与(3)得到

$$\underline{R}(X) = \overline{R}(X) = X.$$

(5) $\forall x \in X$, $\underline{R}(A \cup B)(x) = \bigwedge_{y\in X} \{A(y) \vee B(y) \vee (1 - R(x,y))\}$

$$= \bigwedge_{y\in X} \{(A(y) \vee (1 - R(x,y))) \vee (B(y) \vee (1 - R(x,y)))\}$$

$$\geqslant \bigwedge_{y\in X} \{A(y) \vee (1 - R(x,y))\} \vee \bigwedge_{y\in X} \{B(y) \vee (1 - R(x,y))\}$$

$$= (\underline{R}(A) \cup \underline{R}(B))(x)$$

$$\underline{R}(A \cap B)(x) = \bigwedge_{y\in X} \{(A(y) \wedge B(y)) \vee (1 - R(x,y))\}$$

$$= \bigwedge_{y\in X} \{(A(y) \vee (1 - R(x,y))) \wedge (B(y) \vee (1 - R(x,y)))\}$$

$$= \bigwedge_{y\in X} \{A(y) \vee (1 - R(x,y))\} \wedge \left(\bigwedge_{y\in X} \{B(y) \vee (1 - R(x,y))\}\right)$$

$$= (\underline{R}(A) \cap \underline{R}(B))(x).$$

(6)由(5)与(3)直接得到. □

定理 15.1.6 (Hu, Xian, 2006) 设 $(\underline{R}(A), \overline{R}(A))$ 是 Fuzzy 近似空间 (X, R) 中的 Fuzzy 粗糙集, 则对任意 $\alpha \in [0,1]$ 都有下列等式成立.

(1) $\underline{R_{\overline{1-\alpha}}}(A_\alpha) = (\underline{R}(A))_\alpha$, $\underline{R_{1-\alpha}}(A_{\bar{\alpha}}) = (\underline{R}(A))_{\bar{\alpha}}$;

(2) $\overline{R_{\bar{\alpha}}}(A_{\bar{\alpha}}) = (\overline{R}(A))_{\bar{\alpha}}$, $\overline{R_\alpha}(A_\alpha) = (\overline{R}(A))_\alpha$.

证明　(1) 对任意$\alpha \in [0,1]$, $x \in \underline{R_{\overline{1-\alpha}}}(A_\alpha) \Leftrightarrow \underline{R_{\overline{1-\alpha}}}(A_\alpha)(x) = 1$

$$\Leftrightarrow \bigwedge_{y\in X} \{A_\alpha(y) \vee (1 - R_{\overline{1-\alpha}}(x,y))\} = 1$$

$$\Leftrightarrow (\forall y \in X)(A_\alpha(y) = 1 \text{ 或 } 1 - R_{\overline{1-\alpha}}(x,y) = 1)$$

$$\Leftrightarrow (\forall y \in X)(A(y) \geqslant \alpha \text{ 或} R(x,y) \leqslant 1 - \alpha)$$

$$\Leftrightarrow (\forall y \in X)(A(y) \vee (1 - R(x,y)) \geqslant \alpha)$$

$$\Leftrightarrow \bigwedge_{y\in X} \{A(y) \vee (1 - R(x,y))\} \geqslant \alpha$$

$$\Leftrightarrow x \in (\underline{R}(A))_\alpha.$$

即, $\underline{R_{\overline{1-\alpha}}}(A_\alpha) = (\underline{R}(A))_\alpha$. 第二个等式类似可证.

(2) 对任意 $\alpha \in [0,1]$, 由(1)我们有 $\underline{R_{\bar{\alpha}}}((A^c)_{1-\alpha}) = (\underline{R}(A^c))_{1-\alpha}$. 再由 Fuzzy 集的截集与补集的关系和定理 15.1.5(3)得到 $(\overline{R_{\bar{\alpha}}}(A_{\bar{\alpha}}))^c = ((\overline{R}(A))_{\bar{\alpha}})^c$. 因此 $\overline{R_{\bar{\alpha}}}(A_{\bar{\alpha}}) = (\overline{R}(A))_{\bar{\alpha}}$. 第二式同理可证. □

由 Fuzzy 集的分解定理立即可得下面的推论.

推论 15.1.2 (Hu, Xian, 2006) 设 $(\underline{R}(A),\overline{R}(A))$ 是 Fuzzy 近似空间 (X,R) 中的 Fuzzy 粗糙集，则

(1) $\underline{R}(A)=\bigcup\limits_{\alpha\in[0,1]}\alpha\underline{R_{\overline{1-\alpha}}}(A_\alpha)=\bigcup\limits_{\alpha\in[0,1]}\alpha\underline{R_{1-\alpha}}(A_{\bar{\alpha}})$;

(2) $\overline{R}(A)=\bigcup\limits_{\alpha\in[0,1]}\alpha\overline{R_\alpha}(A_\alpha)=\bigcup\limits_{\alpha\in[0,1]}\alpha\overline{R_{\bar{\alpha}}}(A_{\bar{\alpha}})$.

定理 15.1.7 (Hu, Xian, 2006) 设 $(\underline{R}(A),\overline{R}(A))$ 是 Fuzzy 近似空间 (X,R) 中的 Fuzzy 粗糙集，则

(1) $\underline{R}(A)=\bigcup\limits_{\alpha\in[0,1]}\alpha\underline{R}(A_\alpha)=\bigcup\limits_{\alpha\in[0,1]}\alpha\underline{R}(A_{\bar{\alpha}})$;

(2) $\overline{R}(A)=\bigcup\limits_{\alpha\in[0,1]}\alpha\overline{R}(A_\alpha)=\bigcup\limits_{\alpha\in[0,1]}\alpha\overline{R}(A_{\bar{\alpha}})$.

证明 对所有 $x\in X$，我们有

$$
\begin{aligned}
\Big(\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\alpha\underline{R}(A_\alpha)\Big)(x)&=\bigvee_{\alpha\in[0,1]}(\alpha\wedge\underline{R}(A_\alpha)(x))\\
&=\bigvee_{\alpha\in[0,1]}\Big(\alpha\wedge\Big(\bigwedge_{y\in X}(A_\alpha(y)\vee(1-R(x,y)))\Big)\Big)\\
&=\bigwedge_{y\in X}\Big\{\Big(\bigvee_{\alpha\in[0,1]}(\alpha\wedge A_\alpha(y))\Big)\vee\Big(\bigvee_{\alpha\in[0,1]}(\alpha\wedge(1-R(x,y)))\Big)\Big\}\\
&\qquad\qquad(\text{注意 } X \text{ 是有限的})\\
&=\bigwedge_{y\in X}\{A(y)\vee(1-R(x,y))\}=\underline{R}(A)(x).
\end{aligned}
$$

即 $\underline{R}(A)=\bigcup\limits_{\alpha\in[0,1]}\alpha\underline{R}(A_\alpha)$. 类似可证其他等式. □

上述概念还可以推广到 Fuzzy 相似关系、自反关系和一般 Fuzzy 关系(包括不同区域).

15.1.4 广义粗糙 Fuzzy 集

如果考虑两个论域上的一般关系，则 Pawlak 意义下的粗糙集和 Dubois 与 Prade 意义下的粗糙 Fuzzy 集还可以推广.

定义 15.1.5 (Wu, Mi & Zhang, 2003) 设 X 和 Y 是两个非空论域，R 是 X 到 Y 的任意关系，一个集值函数 $F:X\to\mathscr{P}(Y)$定义为

$$F(x)=\{y\in Y\,|\,(x,y)\in R\},x\in X \tag{15.1.7}$$

对于任意集 $A\in\mathscr{P}(Y)$， 一对下近似与上近似 $\underline{R}(A)$ 与 $\overline{R}(A)$ 分别定义为

$$\underline{R}(A)=\{x\in X\,|\,F(x)\subseteq A\} \tag{15.1.8}$$

$$\overline{R}(A)=\{x\in X\,|\,F(x)\cap A\neq\varnothing\} \tag{15.1.9}$$

偶对 $(\underline{R}(A),\overline{R}(A))$ 被称为广义粗糙集(generalized rough set).

对于任意 Fuzzy 集 $A\in\mathscr{F}(Y)$， 一对下近似 $\underline{R}(A)$ 与上近似 $\overline{R}(A)$ 分别定

义为

$$\underline{R}(A)(x) = \wedge \{A(y) \mid y \in F(x)\} \tag{15.1.10}$$

$$\overline{R}(A)(x) = \vee \{A(y) \mid y \in F(x)\} \tag{15.1.11}$$

偶对 $(\underline{R}(A), \overline{R}(A))$ 被称为广义粗糙 Fuzzy 集(generalized rough fuzzy set).

15.1.5 广义 Fuzzy 粗糙集

1. 基于 Fuzzy 粗糙的广义 Fuzzy 粗糙集

定义 15.1.6 (Wu and Zhang, 2004) 设 X 和 Y 是两个有限非空论域，R 是 X 到 Y 的 Fuzzy 关系. 对于 Fuzzy 集 $A \in \mathscr{F}(Y)$，A 的下近似 $\underline{R}(A)$ 和上近似 $\overline{R}(A)$ 是 X 的 Fuzzy 集，其隶属函数为

$$\underline{R}(A)(x) = \wedge \{A(y) \vee (1 - R(x,y)) \mid y \in Y\} \tag{15.1.12}$$

$$\overline{R}(A)(x) = \vee \{A(y) \wedge R(x,y) \mid y \in Y\} \tag{15.1.13}$$

三元组 (X,Y,R) 被称为广义 Fuzzy 近似空间，并且偶对 $(\underline{R}(A), \overline{R}(A))$ 被称为广义 Fuzzy 粗糙集.

特别地，当 $X=Y$ 和 R 为 X 的 Fuzzy 等价关系，则 $(\underline{R}(A), \overline{R}(A))$ 是一个 Fuzzy 粗糙集(Dubois and Prade, 1990; Radzikowska and Kerre, 2002; Wu, Mi and Zhang, 2003).

定理 15.1.8 在广义 Fuzzy 近似空间 (X,Y,R) 中，对任意 $A, B \in \mathscr{F}(Y)$，有下列性质：

(1) $\overline{R}(\varnothing) = \varnothing$, $\underline{R}(Y) = X$;

(2) $A \subseteq B \Rightarrow \underline{R}(A) \subseteq \underline{R}(B)$, $\overline{R}(A) \subseteq \overline{R}(B)$;

(3) $\underline{R}(A^c) = (\overline{R}(A))^c$, $\overline{R}(A^c) = (\underline{R}(A))^c$;

(4) $\underline{R}(A \cup B) \supseteq \underline{R}(A) \cup \underline{R}(B)$, $\underline{R}(A \cap B) = \underline{R}(A) \cap \underline{R}(B)$;

(5) $\overline{R}(A \cup B) = \overline{R}(A) \cup \overline{R}(B)$, $\overline{R}(A \cap B) \subseteq \overline{R}(A) \cap \overline{R}(B)$.

证明 类似定理 15.1.5 的证明可证. □

定理 15.1.9 (Hu, Xian, 2006) 设 $(\underline{R}(A), \overline{R}(A))$ 是关于广义 Fuzzy 近似空间 (X,Y,R) 在式(15.1.12)、式(15.1.13)中定义的任意广义 Fuzzy 粗糙集. 则有下列等式，$\forall \alpha \in [0,1]$.

(1) $\underline{R_{\overline{1-\alpha}}}(A_\alpha) = (\underline{R}(A))_\alpha$, $\underline{R_{1-\alpha}}(A_{\bar{\alpha}}) = (\underline{R}(A))_{\bar{\alpha}}$;

(2) $\overline{R_{\bar{\alpha}}}(A_{\bar{\alpha}}) = (\overline{R}(A))_{\bar{\alpha}}$, $\overline{R_\alpha}(A_\alpha) = (\overline{R}(A))_\alpha$.

证明 类似定理 15.1.6 可证，只需要注意证明中 $y \in Y$. □

推论 15.1.3 (Hu, Xian, 2006) 设 $(\underline{R}(A), \overline{R}(A))$ 是关于广义 Fuzzy 近似空间 (X,Y,R) 在式(15.1.12)、式(15.1.13)中定义的任意广义 fuzzy 粗糙集. 则有下列等式.

(1) $\underline{R}(A)=\bigcup\limits_{\alpha\in[0,1]}\alpha\underline{R_{\overline{1-\alpha}}}(A_\alpha)=\bigcup\limits_{\alpha\in[0,1]}\alpha\underline{R_{1-\alpha}}(A_{\bar{\alpha}})$;

(2) $\overline{R}(A)=\bigcup\limits_{\alpha\in[0,1]}\alpha\overline{R_\alpha}(A_\alpha)=\bigcup\limits_{\alpha\in[0,1]}\alpha\overline{R_{\bar{\alpha}}}(A_{\bar{\alpha}})$.

定理 15.1.10 (Hu, Xian, 2006) 设 $(\underline{R}(A),\overline{R}(A))$ 是关于广义 Fuzzy 近似空间 (X,Y,R) 在式(15.1.12)、式(15.1.13)中定义的任意广义 Fuzzy 粗糙集. 则有下列等式.

(1) $\underline{R}(A)=\bigcup\limits_{\alpha\in[0,1]}\alpha\underline{R}(A_\alpha)=\bigcup\limits_{\alpha\in[0,1]}\alpha\underline{R}(A_{\bar{\alpha}})$;

(2) $\overline{R}(A)=\bigcup\limits_{\alpha\in[0,1]}\alpha\overline{R}(A_\alpha)=\bigcup\limits_{\alpha\in[0,1]}\alpha\overline{R}(A_{\bar{\alpha}})$.

证明 类似定理 15.1.7 可证. □

2. 基于分解定理的广义 Fuzzy 粗糙集

设 R 是 X 到 Y 的任意 Fuzzy 关系. 定义映射 $F: X\to\mathscr{F}(Y)$

$$F(x)(y)=R(x,y),\ (x,y)\in X\times Y.$$

$\forall\alpha\in[0,1]$, 映射 $F_\alpha: X\to\mathscr{P}(Y)$ 被定义为

$$F_\alpha(x)=\{y\in Y\mid F(x)(y)\geqslant\alpha\},\ x\in X.$$

则 F_α 诱导出一个 Crisp 近似空间 (X,Y,F_α).

对于任意 $A\in\mathscr{P}(Y)$, 关于 (X,Y,F_α) 的上近似、下近似定义为

$$\underline{F_\alpha}(A)=\{x\in X\mid F_\alpha(x)\subseteq A\}\tag{15.1.14}$$

$$\overline{F_\alpha}(A)=\{x\in X\mid F_\alpha(x)\cap A\neq\varnothing\}\tag{15.1.15}$$

很容易验证

$$\underline{F_\alpha}(A^c)=(\overline{F_\alpha}(A))^c,\quad(\overline{F_\alpha}(A^c))=(\underline{F_\alpha}(A))^c.$$

定义 15.1.7 (Wu, Mi & Zhang, 2003) 设 $R\in\mathscr{F}(X\times Y)$是 Fuzzy 关系. 三元组 (X,Y,R) 称为广义 Fuzzy 近似空间. 对于 Fuzzy 集 $A\in\mathscr{F}(Y)$, 关于 (X,Y,R) 的上、下广义 Fuzzy 近似算子 $\underline{R}$ 和 $\overline{R}$ 分别定义为

$$\underline{R}(A)=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}(\alpha\underline{F_{1-\alpha}}(A_{\bar{\alpha}}))\tag{15.1.16}$$

$$\overline{R}(A)=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}(\alpha\overline{F_\alpha}(A_\alpha))\tag{15.1.17}$$

很容易证明 $\underline{R}(A)=\bigcup\limits_{\alpha\in[0,1]}(\alpha\underline{F_{1-\alpha}}(A_{\bar{\alpha}}))=\bigcup\limits_{\alpha\in[0,1]}(\alpha\underline{F_{1-\alpha}}(A_\alpha))$

和

$$\overline{R}(A)=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}(\alpha\overline{F_\alpha}(A_\alpha))=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}(\alpha\overline{F_\alpha}(A_{\bar{\alpha}}))$$

并且还很容易验证(参见分解定理)

$$\underline{R}(A)(x)=\bigwedge_{\alpha\in[0,1]}(\alpha\vee\underline{F_{1-\alpha}}(A_{\bar{\alpha}})(x))\tag{15.1.18}$$

$$\overline{R}(A)(x)=\bigwedge_{\alpha\in[0,1]}(\alpha\vee\overline{F_\alpha}(A_\alpha)(x))\tag{15.1.19}$$

Fuzzy 集偶对 $(\underline{R}(A),\overline{R}(A))$ 称为广义 Fuzzy 粗糙集.

定理 15.1.11 (Wu, Mi & Zhang, 2003)在广义 Fuzzy 近似空间(X, Y, R)中，对任意 $A,B\in\mathscr{F}(Y)$ 有下列性质：

(1) $\overline{R}(\varnothing)=\varnothing$, $\underline{R}(Y)=X$;

(2) $\underline{R}(A^c)=(\overline{R}(A))^c$, $\overline{R}(A^c)=(\underline{R}(A))^c$;

(3) $\overline{R}(A\cup B)=\overline{R}(A)\cup\overline{R}(B)$, $\underline{R}(A\cap B)=\underline{R}(A)\cap\underline{R}(B)$;

(4) $A\subseteq B\Rightarrow\underline{R}(A)\subseteq\underline{R}(B)$, $\overline{R}(A)\subseteq\overline{R}(B)$;

(5) $\overline{R}(A\cap B)\subseteq\overline{R}(A)\cap\overline{R}(B)$, $\underline{R}(A\cup B)\supseteq\underline{R}(A)\cup\underline{R}(B)$.

证明 (1) 由式(15.1.14)、式(15.1.15)和式(15.1.16)、式(15.1.17)直接得到.

$$\begin{aligned}(2)\ (\underline{R}(A^c))^c(x)&=\Big(\bigvee_{\alpha\in[0,1]}(\alpha\wedge\underline{F_{1-\alpha}}((A^c)_{\bar{\alpha}})(x))\Big)^c\\&=\bigwedge_{\alpha\in[0,1]}((1-\alpha)\vee(\underline{F_{1-\alpha}}((A_{1-\alpha})^c))^c(x))\\&\qquad(\text{注意定理 2.1.6(2)},\ (A^c)_{\bar{\alpha}}=(A_{1-\alpha})^c\ )\\&=\bigwedge_{\alpha\in[0,1]}((1-\alpha)\vee(\overline{F_{1-\alpha}}(A_{1-\alpha})(x)))\\&=\bigwedge_{\alpha\in[0,1]}(\alpha\vee(\overline{F_\alpha}(A_\alpha)(x)))\\&=\bigvee_{\alpha\in[0,1]}(\alpha\wedge(\overline{F_\alpha}(A_\alpha)(x)))\\&=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}(\alpha\overline{F_\alpha}(A_\alpha))(x)=\overline{R}(A)(x)\end{aligned}$$

即 $\underline{R}(A^c)=(\overline{R}(A))^c$. 在此式中 A 用 A^c 代替得到 $\overline{R}(A^c)=(\underline{R}(A))^c$.

$$\begin{aligned}(3)\ \overline{R}(A\cup B)&=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}(\alpha\overline{F_\alpha}((A\cup B)_\alpha))\\&=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}(\alpha\overline{F_\alpha}(A_\alpha\cup B_\alpha))\\&=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}(\alpha(\overline{F_\alpha}(A_\alpha)\cup\overline{F_\alpha}(B_\alpha)))\\&=\Big(\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\alpha\overline{F_\alpha}(A_\alpha)\Big)\cup\Big(\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\overline{F_\alpha}(B_\alpha)\Big)\\&=\overline{R}(A)\cup\overline{R}(B)\end{aligned}$$

由(2)进一步可以得到 $\underline{R}(A\cap B)=\underline{R}(A)\cap\underline{R}(B)$.

(4) 由式(15.1.16)、式(15.1.17)直接而得.

(5) 由(4)直接推出. □

3. 基于逻辑算子的广义 Fuzzy 粗糙集

定义 15.1.8 (Mi & Zhang, 2004) 设 X 和 Y 是两个有限非空论域，R 是

X 到 Y 的 Fuzzy 关系. 对于 Fuzzy 集 $A\in\mathscr{F}(Y)$, A 的下近似 $\underline{R}(A)$ 和上近似 $\overline{R}(A)$ 是 X 的 Fuzzy 集,其隶属函数为

$$\underline{R}(A)(x)=\bigwedge_{y\in Y}\theta(R(x,y),A(y)) \tag{15.1.20}$$

$$\overline{R}(A)(x)=\bigvee_{y\in Y}\sigma(1-R(x,y),A(y)) \tag{15.1.21}$$

(X, Y, R) 称为广义 Fuzzy 近似空间并且 Fuzzy 集对 $(\underline{R}(A),\overline{R}(A))$ 称为广义 Fuzzy 粗糙集. 其中 $\theta(x,y)=\sup\{\lambda\in[0,1]\mid \top(x,\lambda)\leqslant y\}$, $\sigma(x,y)=\inf\{\lambda\in[0,1]\mid \bot(x,\lambda)\geqslant y\}$ 和 $\bot(x,y)=1-\top(1-x,1-y)$. $\top$ 和 $\bot$ 分别是$[0,1]$上的 t-模和 t-余模.

定理 15.1.12 (Hu, Xian, 2006) 在广义 Fuzzy 近似空间(X, Y, R)中,对式(15.1.20)、式(15.1.21)定义的近似算子有下列性质, $\forall A,B\in\mathscr{F}(Y)$:

(1) $\overline{R}(\varnothing)=\varnothing$, $\underline{R}(Y)=X$;

(2) $A\subseteq B\Rightarrow\underline{R}(A)\subseteq\underline{R}(B)$, $\overline{R}(A)\subseteq\overline{R}(B)$;

(3) $\underline{R}(A^c)=(\overline{R}(A))^c$, $\overline{R}(A^c)=(\underline{R}(A))^c$;

(4) $\underline{R}(A\cup B)\supseteq\underline{R}(A)\cup\underline{R}(B)$, $\underline{R}(A\cap B)=\underline{R}(A)\cap\underline{R}(B)$;

(5) $\overline{R}(A\cup B)=\overline{R}(A)\cup\overline{R}(B)$, $\overline{R}(A\cap B)\subseteq\overline{R}(A)\cap\overline{R}(B)$;

(6)R 是 Serial (即 $\forall x\in X$, $\exists y\in Y$, 使得 $R(x,y)=1$) $\Leftrightarrow\underline{R}(A)\subseteq\overline{R}(A)$ $\Rightarrow\underline{R}(\varnothing)=\varnothing\Leftrightarrow\overline{R}(Y)=X$.

证明 性质(1), (2)和(3) 直接由式(15.1.20) 、式(15.1.21)得到.

(4) $\forall x\in X$, $\underline{R}(A\cup B)(x)=\bigwedge_{y\in Y}\theta(R(x,y),(A\cup B)(y))$

$$\begin{aligned}
&=\bigwedge_{y\in Y}\theta(R(x,y),A(y)\vee B(y))\\
&=\bigwedge_{y\in Y}\sup\{\lambda\in[0,1]\mid \top(R(x,y),\lambda)\leqslant A(y)\vee B(y)\}\\
&=\bigwedge_{y\in Y}\sup(\{\lambda\in[0,1]\mid \top(R(x,y),\lambda)\leqslant A(y)\}\vee\sup\{\lambda\in[0,1]\mid\\
&\quad\top(R(x,y),\lambda)\leqslant B(y)\})\\
&=\bigwedge_{y\in Y}(\theta(R(x,y),A(y))\vee\theta(R(x,y),B(y)))\\
&\geqslant\Big(\bigwedge_{y\in Y}\theta(R(x,y),A(y))\Big)\vee\Big(\bigwedge_{y\in Y}\theta(R(x,y),B(y))\Big)\\
&=\underline{R}(A)(x)\vee\underline{R}(B)(x)=(\underline{R}(A)\cup\underline{R}(B))(x)
\end{aligned}$$

所以

$$\underline{R}(A\cup B\supseteq\underline{R}(A)\cup\underline{R}(B).$$

$$\begin{aligned}
\underline{R}(A\cap B)&=\bigwedge_{y\in Y}\theta(R(x,y),(A\cap B)(y))\\
&=\bigwedge_{y\in Y}\sup\{\lambda\in[0,1]\mid \top(R(x,y),\lambda)\leqslant(A\cap B)(y)\}\\
&=\bigwedge_{y\in Y}\sup\{\lambda\in[0,1]\mid \top(R(x,y),\lambda)\leqslant A(y)\wedge B(y)\}
\end{aligned}$$

$$=\bigwedge_{y\in Y}\sup(\{\lambda\in[0,1]\mid \top(R(x,y),\lambda)\leqslant A(y)\}\wedge\sup\{\lambda\in[0,1]\mid$$
$$\top(R(x,y),\lambda)\leqslant B(y)\})$$
$$=\bigwedge_{y\in Y}(\theta(R(x,y),A(y))\wedge\theta(R(x,y),B(y)))$$
$$=\left(\bigwedge_{y\in Y}\theta(R(x,y),A(y))\right)\wedge\left(\bigwedge_{y\in Y}\theta(R(x,y),B(y))\right)$$
$$=\underline{R}(A)(x)\wedge\underline{R}(B)(x)=(\underline{R}(A)\cap\underline{R}(B))(x)$$

所以
$$\underline{R}(A\cap B)=\underline{R}(A)\cap\underline{R}(B).$$

(5) 类似可证.

(6) 由(3)可得 $\underline{R}(\varnothing)=\varnothing\Leftrightarrow\overline{R}(Y)=X$.

下面我们将证明 R 是 Serial $\Leftrightarrow\underline{R}(A)\subseteq\overline{R}(A)$, $\forall A\in\mathscr{F}(Y)$.

R 是 Serial $\Leftrightarrow\forall x\in X$, $\exists y\in Y$, 使得 $R(x,y)=1$

$$\Rightarrow\forall x\in X,\underline{R}(A)(x)\leqslant\theta(R(x,y),A(y))=A(y)$$
$$=\sigma(1-R(x,y),A(y))\leqslant\overline{R}(A)(x),\forall A\in\mathscr{F}(Y)$$
$$\Rightarrow\underline{\mathrm{R}}(\mathrm{A})\subseteq\overline{\mathrm{R}}(\mathrm{A}),\ \forall\,\mathrm{A}\in\mathscr{F}(Y),$$

R 不是 Serial $\Rightarrow\exists x\in X,\forall y\in Y$, 使得 $0\leqslant R(x,y)<1$

$\Rightarrow$ 对 $A\in\mathscr{F}(Y)$满足 $0<A(y)\leqslant1-R(x,y),y\in Y$,

$\underline{R}(A)(x)=\bigwedge_{y\in Y}\theta(R(x,y),A(y))\geqslant\bigwedge_{y\in Y}A(y)>0$ 并且 $\overline{R}(A)(x)=\bigvee_{y\in Y}\sigma(1-R(x,y),A(y))=0$

$\Rightarrow$ 存在 $A\in\mathscr{F}(Y)$ 使得 $\underline{R}(A)\subseteq\overline{R}(A)$ 不成立.

下面证明 $\underline{R}(A)\subseteq\overline{R}(A)$, $\forall A\in\mathscr{F}(Y)$

$$\Rightarrow\forall x\in X,\underline{R}(\varnothing)(x)\leqslant\overline{R}(\varnothing)(x)=\bigvee_{y\in Y}\{\sigma(1-R(x,y),\varnothing(y))\}=0$$
$$\Rightarrow\underline{R}(\varnothing)=\varnothing.$$
□

$\underline{R}(A)\subseteq\overline{R}(A)$, $\forall A\in\mathscr{F}(Y)$ 不能由 $\underline{R}(\varnothing)=\varnothing$ 得到. 下面的例子可以说明这一点.

例 15.1.5 设

$$X=Y=\{1,2,3\},\ R=\begin{pmatrix}0&0.6&0.1\\0.7&0.9&0.1\\0.2&0.3&1\end{pmatrix},\ A=(0.5,0.6,0.8).$$

$\top=\min$, $\bot=\max$. 则

$$\underline{R}(A)(1)=\theta(0,0.5)\wedge\theta(0.6,0.6)\wedge\theta(0.1,0.8)=1$$
$$\underline{R}(A)(1)=\sigma(0,0.5)\vee\sigma(0.6,0.6)\vee\sigma(0.1,0.8)=0.8$$

于是 $\underline{R}(A)\subseteq\overline{R}(A)$ 不成立. 但 $\underline{R}(\varnothing)=\varnothing$. □

定理 15.1.13 (Hu, Xian, 2006) 在广义 Fuzzy 近似空间(X, Y, R)中，对于式(15.1.20)、式(15.1.21)中的近似算子具有下列性质，$\forall A,B \in \mathscr{F}(Y)$.

(1) $\underline{R}(A) \supseteq \bigcup_{\alpha\in[0,1]} \alpha\underline{R}(A_\alpha)$，$\underline{R}(A) \supseteq \bigcup_{\alpha\in[0,1]} \alpha\underline{R}(A_{\bar{\alpha}})$；

(2) $\overline{R}(A_\alpha) \supseteq (\overline{R}(A))_\alpha$，$\overline{R}(A_{\bar{\alpha}}) \supseteq (\overline{R}(A))_{\bar{\alpha}}$.

证明 (1) $\forall x \in X$，

$$\begin{aligned}\bigcup_{\alpha\in[0,1]} \alpha\underline{R}(A_\alpha)(x) &= \bigvee_{\alpha\in[0,1]} (\alpha \wedge \underline{R}(A_\alpha)(x))\\
&= \bigvee_{\alpha\in[0,1]} \left(\alpha \wedge \left(\bigwedge_{y\in Y} \theta(R(x,y),A_\alpha(y))\right)\right)\\
&= \bigwedge_{y\in Y} \left(\bigvee_{\alpha\in[0,1]} (\alpha \wedge \theta(R(x,y),A_\alpha(y)))\right) \text{（注意 } Y \text{ 是有限集）}\\
&\leqslant \bigwedge_{y\in Y} \left(\bigvee_{\alpha\in[0,1]} (\theta(R(x,y),\alpha) \wedge \theta(R(x,y),A_\alpha(y)))\right)\\
&= \bigwedge_{y\in Y} \left(\bigvee_{\alpha\in[0,1]} (\theta(R(x,y),\alpha \wedge A_\alpha(y)))\right)\\
&\leqslant \bigwedge_{y\in Y} \left(\theta(R(x,y), \bigvee_{\alpha\in[0,1]} \alpha \wedge A_\alpha(y))\right)\\
&= \bigwedge_{y\in Y} (\theta(R(x,y),A(y))) = \underline{R}(A)(x)\end{aligned}$$

由此得 $\underline{R}(A) \supseteq \bigcup_{\alpha\in[0,1]} \alpha\underline{R}(A_\alpha)$. 类似可以证明另一式成立.

(2) $\forall x \in X$，

$$\begin{aligned}\bigcup_{\alpha\in[0,1]} \alpha\overline{R}(A_\alpha)(x) &= \bigvee_{\alpha\in[0,1]} (\alpha \wedge \overline{R}(A_\alpha)(x))\\
&= \bigvee_{\alpha\in[0,1]} \left(\alpha \wedge \left(\bigvee_{y\in Y} \sigma(R(x,y),A_\alpha(y))\right)\right)\\
&= \bigvee_{y\in Y} \left(\bigvee_{\alpha\in[0,1]} (\alpha \wedge \sigma(R(x,y),A_\alpha(y)))\right)\\
&\geqslant \bigvee_{y\in Y} \left(\bigvee_{\alpha\in[0,1]} (\sigma(R(x,y),\alpha) \wedge \sigma(R(x,y),A_\alpha(y)))\right)\\
&= \bigvee_{y\in Y} \left(\bigvee_{\alpha\in[0,1]} (\sigma(R(x,y),\alpha \wedge A_\alpha(y)))\right)\\
&= \bigvee_{y\in Y} \left(\sigma(R(x,y), \bigvee_{\alpha\in[0,1]} (\alpha \wedge A_\alpha(y)))\right)\\
&= \bigvee_{y\in Y} (\sigma(R(x,y),A(y))) = \overline{R}(A)(x)\end{aligned}$$

因此 $\overline{R}(A) \subseteq \bigcup_{\alpha\in[0,1]} \alpha\overline{R}(A_\alpha)$. 类似可以证明另一式成立. □

15.1.6 $(\perp, \top)$-广义 Fuzzy 粗糙集

对于从 X 到 Y 的 Fuzzy 关系 R，我们记 $ht_X R(y) = \bigvee_{x\in X} R(x,y)$ 和 $lt_X R(y) = \bigwedge_{x\in X} R(x,y)$，$\forall y \in Y$；$ht_Y R(x) = \bigvee_{y\in Y} R(x,y)$ 和 $lt_Y R(x) = \bigwedge_{y\in Y} R(x,

$y)$, $\forall x \in X$.

如果 $R \in \mathscr{F}(X \times Y)$，$A \in \mathscr{F}(Y)$，那么我们定义 $R \circ_{\top} A(x) = \bigvee_{y \in Y} \{R(x,y) \top A(y)\}$ 和 $R \,\hat{\circ}_{\perp}\, A(x) = \bigwedge_{y \in Y} \{R(x,y) \perp A(y)\}$，$\forall x \in X$.

引理 15.1.1 设 $R \in \mathscr{F}(X \times Y)$，则：

(1) 对于 $A \in \mathscr{F}(Y)$，$(R \circ_{\top} A)^c = R^c \,\hat{\circ}_{\perp}\, A^c$，这里 t-模 $\top$ 和 t-余模 $\perp$ 是对偶的；

(2) 对于 $A \in \mathscr{F}(Y)$，$(R \circ A)_{\bar{\alpha}} = R_{\bar{\alpha}} \circ A_{\bar{\alpha}} \subseteq (R \circ A)_{\alpha} \subseteq R_{\alpha} \circ A_{\alpha}$，

$$(R \,\hat{\circ}\, A)_{\alpha} = R_{\alpha} \,\hat{\circ}\, A_{\alpha} \supseteq (R \,\hat{\circ}\, A)_{\bar{\alpha}} \supseteq R_{\bar{\alpha}} \,\hat{\circ}\, A_{\bar{\alpha}}$$

对所有 $\alpha \in [0,1]$ 成立，并且当 Y 是有限集时，$(R \circ A)_{\alpha} = R_{\alpha} \circ A_{\alpha}$ 和 $(R \,\hat{\circ}\, A)_{\bar{\alpha}} = R_{\bar{\alpha}} \,\hat{\circ}\, A_{\bar{\alpha}}$ 对所有 $\alpha \in [0,1]$ 成立；

(3) 对于 $S \in \mathscr{F}(Y \times Z)$ 和 $A \in \mathscr{F}(Z)$，$R \circ_{\top} (S \circ_{\top} A) = (R \circ_{\top} S) \circ_{\top} A$ 并且 $R \,\hat{\circ}_{\perp}\, (S \,\hat{\circ}_{\perp}\, A) = (R \,\hat{\circ}_{\perp}\, S) \,\hat{\circ}_{\perp}\, A$；

(4) 对于 $S \in \mathscr{F}(Y \times Z)$ 和 $A \in \mathscr{F}(Z)$，Y 或 Z 是有限集，并且 t-模 $\top$ 和 t-余模 $\perp$ 是可分配的. 如果 $ht_Y R = 1$，则 $R \circ_{\top} (S \,\hat{\circ}_{\perp}\, A) = (R \circ_{\top} S) \,\hat{\circ}_{\perp}\, A$. 如果 $hl_Y R = 0$，则 $R \,\hat{\circ}_{\perp}\, (S \circ_{\top} A) = (R \,\hat{\circ}_{\perp}\, S) \circ_{\top} A$；

(5) 对于 $A \in \mathscr{F}(Y)$ 并且 t-模 $\top$ 和 t-余模 $\perp$ 是可分配的，则

$\alpha \top (R \circ_{\top} A) = R \circ_{\top} (\alpha \top A) = (\alpha \top R) \circ_{\top} A$，$\alpha \top (R \,\hat{\circ}_{\perp}\, A) = (\alpha \top R) \,\hat{\circ}_{\perp}\, (\alpha \top A)$

证明 由定义直接得到. □

引理 15.1.2 设 $A^{(\lambda)} \in \mathscr{F}(Y)$（$\lambda \in \Lambda$，$\Lambda$ 是任意指标集）并且 $R \in \mathscr{F}(X \times Y)$，则对于 t-模 $\top$ 和 t-余模 $\perp$：

(1) $R \circ_{\top} \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A^{(\lambda)} \right) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (R \circ_{\top} A^{(\lambda)})$，$R \,\hat{\circ}_{\perp}\, \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A^{(\lambda)} \right) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (R \,\hat{\circ}_{\perp}\, A^{(\lambda)})$；

(2) $R \circ_{\top} \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A^{(\lambda)} \right) \subseteq \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (R \circ_{\top} A^{(\lambda)})$，$R \,\hat{\circ}_{\perp}\, \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A^{(\lambda)} \right) \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (R \,\hat{\circ}_{\perp}\, A^{(\lambda)})$.

当 Y 是一个有限集时，(2)的等式成立.

证明 (1) $\forall x \in X$，

$$\begin{aligned}
\left(R \circ_{\top} \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A^{(\lambda)} \right)\right)(x)
&= \bigvee_{y \in Y} \left(R(x,y) \top \left(\bigvee_{\lambda \in \Lambda} A^{(\lambda)}(y) \right) \right) \\
&= \bigvee_{y \in Y} \left(\bigvee_{\lambda \in \Lambda} (R(x,y) \top A^{(\lambda)}(y)) \right) \\
&= \bigvee_{\lambda \in \Lambda} \left(\bigvee_{y \in Y} (R(x,y) \top A^{(\lambda)}(y)) \right) \\
&= \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} (R \circ_{\top} A^{(\lambda)}) \right)(x).
\end{aligned}$$

(2) $\forall x \in X$, $\left(R \circ_{\top}\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A^{(\lambda)}\right)\right)(x) = \bigvee_{y \in Y}\left(R(x,y) \top \left(\bigwedge_{\lambda \in \Lambda} A^{(\lambda)}(y)\right)\right)$

$$\leqslant \bigwedge_{\lambda \in \Lambda}\left(\bigvee_{y \in Y}(R(x,y) \top A^{(\lambda)}(y))\right) \qquad (*)$$

$$= \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda}(R \circ_{\top} A^{(\lambda)})\right)(x).$$

对于 $\hat{\circ}_{\perp}$ 直接由引理 15.1.1(1)验证得到,并且当 Y 为有限集时式(*)中等式成立. □

下面通过 t-模 $\top$ 和 t-余模 $\perp$ 推广广义 Fuzzy 粗糙集(Hu, Huang, 2009). 在本节的讨论中我们总假设 t-余模 $\perp$ 和 t-模$\top$是对偶的.

定义 15.1.9 (Hu, Huang,2009) 设 X 和 Y 是两个有限非空论域,R 是 X 到 Y 的 Fuzzy 关系. 对于 Fuzzy 集 $A \in \mathscr{F}(Y)$, A 的 $\perp$-下近似和$\top$-上近似, 用 $\underline{R}_{\perp}(A)$ 和 $\overline{R}^{\top}(A)$ 表示, 是 X 的 Fuzzy 集其隶属函数为

$$\underline{R}_{\perp}(A)(x) = \inf\{A(y) \perp (1 - R(x,y)) \mid y \in Y\} \qquad (15.1.22)$$

$$\overline{R}^{\top}(A)(x) = \sup\{A(y) \top R(x,y) \mid y \in Y\} \qquad (15.1.23)$$

三元组 (X, Y, R) 被称为广义 Fuzzy 近似空间并且 Fuzzy 集对 $(\underline{R}_{\perp}(A), \overline{R}^{\top}(A))$ 称为 $(\perp, \top)$-广义 Fuzzy 粗糙集. 特别地,如果 $\perp = \vee$ 和 $\top = \wedge$, $(\underline{R}_{\perp}(A), \overline{R}^{\top}(A))$ 记为 $(\underline{R}(A), \overline{R}(A))$, 即为广义 Fuzzy 粗糙集. 如果 $X = Y$, 那么 $(\underline{R}_{\perp}(A), \overline{R}^{\top}(A))$ 称为$(\perp, \top)$-Fuzzy 粗糙集.

定理 15.1.14 由式(15.1.22)、式(15.1.23)定义的 A 的 $\perp$-下近似和$\top$-上近似 $\underline{R}_{\perp}(A)$ 和 $\overline{R}^{\top}(A)$ 能分别等价地表示为 $\underline{R}_{\perp}(A) = R^c \hat{\circ}_{\perp} A = (R \circ_{\top} A^c)^c$ 和 $\overline{R}^{\top}(A) = R \circ_{\top} A$.

下面的推论可以直接验证.

推论 15.1.4 设 X, Y 和 Z 是三个有限非空论域,R 是 X 到 Y 的 Fuzzy 关系, S 是 Y 到 Z 的 Fuzzy 关系. A 的 $\perp$-下近似和$\top$-上近似由式(15.1.22)、式(15.1.23)定义. 则对于 Fuzzy 集 $A \in \mathscr{F}(Z)$:

(1) $\underline{R \circ_{\top} S}_{\perp}(A) = (R \circ_{\top} S \circ_{\top} A^c)^c$;

(2) $\overline{R \circ_{\top} S}^{\top}(A) = R \circ_{\top} S \circ_{\top} A$.

推论 15.1.5 设 $(\underline{R}(A), \overline{R}(A))$ 是由式(15.1.22)、式(15.1.23)定义的任意广义 Fuzzy 粗糙集,那么有下列等式, $\forall \alpha \in [0,1]$:

(1) $\underline{R_{\overline{1-\alpha}}}(A_{\alpha}) = (\underline{R}(A))_{\alpha}$, $\quad \underline{R_{1-\alpha}}(A_{\bar{\alpha}}) = (\underline{R}(A))_{\bar{\alpha}}$;

(2) $\overline{R_{\alpha}}(A_{\alpha}) = (\overline{R}(A))_{\alpha}$, $\quad \overline{R_{\bar{\alpha}}}(A_{\bar{\alpha}}) = (\overline{R}(A))_{\bar{\alpha}}$.

推论 15.1.6 设 $(\underline{R}(A), \overline{R}(A))$ 是由式(15.1.22)、式(15.1.23)定义的任意广义 Fuzzy 粗糙集,那么有下列等式:

(1) $\underline{R}(A)=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\alpha\top \underline{R_{\overline{1-\alpha}}}(A_\alpha)=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\alpha\top \underline{R_{1-\alpha}}(A_\alpha)$;

(2) $\overline{R}(A)=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\alpha\top \overline{R_\alpha}(A_\alpha)=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\alpha\top \overline{R_{\bar{\alpha}}}(A_{\bar{\alpha}})$.

定理 15.1.15　设 $(\underline{R}_\perp(A),\overline{R}^\top(A))$ 是由式(15.1.22)、式(15.1.23)定义的任意广义 Fuzzy 粗糙集，并且 t-模$\top$和 t-余模 $\perp$ 是可分配的，则有下列等式：

(1) $\underline{R}_\perp(A)\supseteq\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\alpha\top\underline{R}_\perp(A_\alpha)$，$\underline{R}_\perp(A)\supseteq\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\alpha\top\underline{R}_\perp(A_{\bar{\alpha}})$；

(2) $\overline{R}^\top(A)=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\alpha\top\overline{R}^\top(A_\alpha)=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\alpha\top\overline{R}^\top(A_{\bar{\alpha}})$.

证明　(1) $\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\alpha\top\underline{R}_\perp(A_\alpha)=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\alpha\top(R^c\,\hat{\circ}_\perp A_\alpha)$　（定理 15.1.14）

$=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}((\alpha\top(R^c))\,\hat{\circ}_\perp(\alpha\top A_\alpha))$　（引理 15.1.1(5)）

$\subseteq\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\bigcup_{\beta\in[0,1]}(\alpha\top(R^c))\,\hat{\circ}_\perp(\beta\top A_\beta)$

$=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\alpha\top(R^c)\,\hat{\circ}_\perp\left(\bigcup_{\beta\in[0,1]}\beta\top A_\beta\right)$　（注意 Y 是有限集）

$=R^c\,\hat{\circ}_\perp A=\underline{R}_\perp(A)$；　（分解定理 2.2.4）

即 $\underline{R}_\perp(A)\supseteq\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\alpha\top\underline{R}_\perp(A_\alpha)$. 类似得到第二式 $\underline{R}_\perp(A)\supseteq\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\alpha\top\underline{R}_\perp(A_{\bar{\alpha}})$.

(2) $\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\alpha\top\overline{R}^\top(A_\alpha)=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\alpha\top(R\circ_\top A_\alpha)$　（定理 15.1.14）

$=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}(R\circ_\top(\alpha\top A_\alpha))$　（引理 15.1.1(5)）

$=R\circ_\top\left(\bigcup_{\alpha\in[0,1]}(\alpha\top A_\alpha)\right)=R\circ_\top A=\overline{R}^\top(A)$.

（引理 15.1.21(1)、分解定理 2.2.4、定理 15.1.14）　□

定理 15.1.16　设 X 和 Y 是两个有限非空论域，R 和 S 是 X 到 Y 的 Fuzzy 关系. A 的 $\perp$-下近似和$\top$-上近似由式(15.1.22)、式(15.1.23)定义. 则对于 Fuzzy 集 $A\in\mathscr{F}(Z)$：

(1) $\underline{R\cup S}_\perp(A)=\underline{R}_\perp(A)\cap\underline{S}_\perp(A)$，$\underline{R\cap S}_\perp(A)=\underline{R}_\perp(A)\cup\underline{S}_\perp(A)$；

(2) $\overline{R\cup S}^\top(A)=\overline{R}^\top(A)\cup\overline{S}^\top(A)$，$\overline{R\cap S}^\top(A)=\overline{R}^\top(A)\cap\overline{S}^\top(A)$.

证明　$\underline{R\cup S}_\perp(A)=((R\cup S)\circ_\top A^c)^c=((R\circ_\top A^c\cup S\circ_\top A^c))^c$

$=(R\circ_\top A^c)^c\cap(S\circ_\top A^c)^c=\underline{R}_\perp(A)\cap\underline{S}_\perp(A)$；

其他式子类似可证.　□

定理 15.1.17　设 X，Y 和 Z 是三个有限非空论域，R 是 X 到 Y 的 Fuzzy 关系，S 是 Y 到 Z 的 Fuzzy 关系. A 的 $\perp$-下近似和$\top$-上近似由式(15.1.22)、式(15.1.23)定义. 则对于 Fuzzy 集 $A\in\mathscr{F}(Z)$，有下列性质.

(1) $\underline{R}_{\perp}(\underline{S}_{\perp}(A))=\underline{R\circ_{\top}S}_{\perp}(A)$, $\overline{R}^{\top}(\overline{S}^{\top}(A))=\overline{R\circ_{\top}S}^{\top}(A)$;

(2) 设 t-模⊤和 t-余模 ⊥ 是可分配的. 则当 $hl_YR=0$ 时, $\underline{R}(\overline{S}(A))=\overline{R^c\hat{\circ}_{\perp}S}(A)$. 当 $ht_YR=1$ 时, $\overline{R}(\underline{S}(A))=\underline{R^c\hat{\circ}_{\perp}S}(A)$.

证明 (1) $\underline{R}_{\perp}(\underline{S}_{\perp}(A))=(R\circ_{\top}(\underline{S}_{\perp}(A))^c)^c=(R\circ_{\top}(S\circ_{\top}A^c))^c$

$$=((R\circ_{\top}S)\circ_{\top}A^c)^c=\underline{R\circ_{\top}S}_{\perp}(A)$$

$$\overline{R}^{\top}\big(\overline{S}^{\top}(A)\big)=R\circ_{\top}(S\circ_{\top}A)=(R\circ_{\top}S)\circ_{\top}A=\overline{R\circ_{\top}S}^{\top}(A).$$

(2) 如果 $hl_YR=0$, 则

$$\underline{R}_{\perp}(\overline{S}^{\top}(A))=(R\circ_{\top}(S\circ_{\top}A)^c)^c=R^c\hat{\circ}_{\perp}(S\circ_{\top}A)$$

$$=(R^c\hat{\circ}_{\perp}S)\circ_{\top}A\quad[hl_YR=0]$$

$$=\overline{R^c\hat{\circ}_{\perp}S}^{\top}(A)$$

如果 $ht_YR=1$, 则

$$\overline{R}^{\top}(\underline{S}_{\perp}(A))=R\circ_{\top}(S\circ_{\top}A^c)^c=R\circ_{\top}(S^c\hat{\circ}_{\perp}A)$$

$$=(R\circ_{\top}S^c)\hat{\circ}_{\perp}A\quad[ht_YR=1]$$

$$=\underline{R^c\hat{\circ}_{\perp}S}_{\perp}(A).$$

□

推论 15.1.7 设 X 和 Y 是两个有限非空论域, R 是 X 到 Y 的 Fuzzy 关系. 则对于 Fuzzy 集 $A\in\mathscr{F}(Y)$, 有下列性质:

(1) $\underline{R^{-1}}_{\perp}(\underline{R}_{\perp}(A))=\underline{R^{-1}\circ_{\top}R}_{\perp}(A)$, $\overline{R^{-1}}^{\top}(\overline{R}^{\top}(A))=\overline{R^{-1}\circ_{\top}R}^{\top}(A)$;

(2) 设 t-模 ⊤ 和 t-余模 ⊥ 是可分配的. 若 $hl_XR=0$, 则 $\underline{R^{-1}}_{\perp}(\overline{R}^{\top}(A))=\overline{R^{-c}\hat{\circ}_{\perp}R}^{\top}(A)$. 若 $ht_XR=1$, 则 $\overline{R^{-1}}^{\top}(\underline{R}_{\perp}(A))=\underline{R^{-c}\hat{\circ}_{\perp}R}_{\perp}(A)$.

推论 15.1.8 设 X 和 Y 是两个有限非空论域, R 是 X 到 Y 的 Fuzzy 关系. 则对于 Fuzzy 集 $A\in\mathscr{F}(Y)$, 有下列性质:

(1) $\underline{R^{-1}}(\underline{R}(A))=\underline{R^{-1}\circ R}(A)\subseteq A\cup(ht_XR)^c$, $\overline{R^{-1}}(\overline{R}(A))=\overline{R^{-1}\circ R}(A)\supseteq A\cap ht_XR$;

(2) $\underline{R^{-1}}(\overline{R}(A))\supseteq(A\cap lt_XR)\cup lt_XR^c$, $\overline{R^{-1}}(\underline{R}(A))\subseteq(A\cup(ht_XR)^c)\cap lt_XR$.

证明 等式由定理 15.1.14 直接得到. 下面只证明不等式.

(1) $\forall y\in Y$, $\underline{R^{-1}}(\underline{R}(A))(y)=\bigwedge_{x\in X}\{\underline{R}(A)(x)\vee(1-R^{-1}(y,x))\}$

$$=\bigwedge_{x\in X}\left\{\bigwedge_{t\in Y}\{A(t)\vee(1-R(x,t))\}\vee(1-R(x,y))\right\}$$

$$\leqslant\bigwedge_{x\in X}\{A(y)\vee(1-R(x,y))\}$$

$$=A(y)\vee(1-\bigvee_{x\in X}\{R(x,y)\})$$

$$=(A\cup(ht_X R)^c)(y)$$

$$\forall y\in Y,\quad \overline{R^{-1}}(\overline{R}(A))(y)=\bigvee_{x\in X}\{\overline{R}(A)(x)\wedge R^{-1}(y,x)\}$$

$$=\bigvee_{x\in X}\left\{\bigvee_{t\in Y}\{A(t)\wedge R(x,t)\}\wedge R(x,y)\right\}$$

$$\geqslant\bigvee_{x\in X}\{(A(y)\wedge R(x,y))\wedge R(x,y)\}$$

$$=(A\cap ht_X R)(y).$$

(2) $\forall y\in Y,\quad \underline{R^{-1}}(\overline{R}(A))(y)=\bigwedge_{x\in X}\{\overline{R}(A)(x)\vee(1-R^{-1}(y,x))\}$

$$=\bigwedge_{x\in X}\left\{\bigvee_{t\in Y}\{A(t)\wedge R(x,t)\}\vee(1-R(x,y))\right\}$$

$$\geqslant\bigwedge_{x\in X}\{(A(y)\wedge R(x,y))\vee R^c(x,y)\}$$

$$=((A\cap lt_X R)\cup lt_X R^c)(y).$$

$$\forall y\in Y,\ \overline{R^{-1}}(\underline{R}(A))(y)=\bigvee_{x\in X}\{\underline{R}(A)(x)\wedge R^{-1}(y,x)\}$$

$$=\bigvee_{x\in X}\left\{\bigwedge_{t\in Y}\{A(t)\vee(1-R(x,t))\}\wedge R(x,y)\right\}$$

$$\leqslant\bigwedge_{x\in X}\{(A(y)\vee(1-R(x,y)))\wedge R(x,y)\}$$

$$=\left(A(y)\vee\left(1-\bigvee_{x\in X}\{R(x,y)\}\right)\right)\wedge\left(\bigvee_{x\in X}\{R(x,y)\}\right)$$

$$=((A\cup(ht_X R)^c)\cap ht_X R)(y).$$ □

推论 15.1.9　设 X_1, X_2, …, X_n和 X_{n+1}都是非空论域,并且 R_i是从 X_i到 X_{i+1}($i=1,2,\cdots,n$)的 Fuzzy 关系. 对任意 Fuzzy 集 $A\in\mathscr{F}(X_{n+1})$, 有下列性质:

(1) $\underline{R_1}_{\perp}(\underline{R_2}_{\perp}(\cdots(\underline{R_n}_{\perp}(A))))=\underline{R_1\circ_T R_2\circ_T\cdots\circ_T R_n}_{\perp}(A)$;

(2) $\overline{R_1}^{\top}(\overline{R_2}^{\top}(\cdots\overline{R_n}^{\top}(A)))=\overline{R_1\circ_T R_2\circ_T\cdots\circ_T R_n}^{\top}(A)$.

定理 15.1.18　设 X 和 Y 是两个有限非空论域,R 是 X 到 Y 的 Fuzzy 关系. 则对于 Fuzzy 集 $A,B\in\mathscr{F}(Y)$, 有下列性质:

(1) $\underline{R}_{\perp}(A\cup B)\supseteq\underline{R}_{\perp}(A)\cup\underline{R}_{\perp}(B)$, $\underline{R}_{\perp}(A\cap B)=\underline{R}_{\perp}(A)\cap\underline{R}_{\perp}(B)$;

(2) $\overline{R}^{\top}(A\cup B)=\overline{R}^{\top}(A)\cup\overline{R}^{\top}(B)$, $\overline{R}^{\top}(A\cap B)\subseteq\overline{R}^{\top}(A)\cap\overline{R}^{\top}(B)$.

推论 15.1.10　设 X ,Y 和 Z 是三个有限非空论域,R 是 X 到 Y 的 Fuzzy 关系, S_1和 S_2是 Y 到 Z 的 Fuzzy 关系. 则对于 Fuzzy 集 $A\in\mathscr{F}(Z)$, 有下列性质:

(1) $\underline{R\circ_T(S_1\cup S_2)}_{\perp}(A)=\underline{R\circ_T S_1}_{\perp}(A)\cap\underline{R\circ_T S_2}_{\perp}(A)$,

$\underline{R\circ_T(S_1\cap S_2)}_{\perp}(A)\supseteq\underline{R\circ_T S_1}_{\perp}(A)\cup\underline{R\circ_T S_2}_{\perp}(A)$;

(2) $\overline{R\circ_T(S_1\cup S_2)}^{\top}(A)=\overline{R\circ_T S_1}^{\top}(A)\cup\overline{R\circ_T S_2}^{\top}(A)$,

$$\overline{R\circ_{T}(S_1\cap S_2)}^{T}(A)\subseteq\overline{R\circ_{T}S_1}^{T}(A)\cap\overline{R\circ_{T}S_2}^{T}(A).$$

证明 (1) $\underline{R\circ_{T}(S_1\cup S_2)}_{\perp}(A)=\underline{R}_{\perp}(\underline{S_1\cup S_2}_{\perp}(A))$

$=\underline{R}_{\perp}(\underline{S_1}_{\perp}(A)\cap\underline{S_2}_{\perp}(A))$

$=\underline{R}_{\perp}(\underline{S_1}_{\perp}(A))\cap\underline{R}_{\perp}(\underline{S_2}_{\perp}(A))$

$=\underline{R\circ_{T}S_1}_{\perp}(A)\cap\underline{R\circ_{T}S_2}_{\perp}(A)$

$\underline{R\circ_{T}(S_1\cap S_2)}_{\perp}(A)=\underline{R}_{\perp}(\underline{S_1\cap S_2}_{\perp}(A))$

$=\underline{R}_{\perp}(\underline{S_1}_{\perp}(A)\cup\underline{S_2}_{\perp}(A))$

$\supseteq\underline{R}_{\perp}(\underline{S_1}_{\perp}(A))\cup\underline{R}_{\perp}(\underline{S_2}_{\perp}(A))$

$=\underline{R\circ_{T}S_1}_{\perp}(A)\cup\underline{R\circ_{T}S_2}_{\perp}(A)$

(2) 类似(1)可证. □

定理 15.1.19 设 $(\underline{R}_{\perp}(A),\overline{R}^{T}(A))$ 是由式(15.1.22)、式(15.1.23)定义的任意($\perp$, T)-广义 Fuzzy 粗糙集，则有下列性质，$\forall A,B\in\mathscr{F}(Y)$.

(1) $\underline{R}_{\perp}(A)=(\overline{R}^{T}(A^{c}))^{c}$, $\overline{R}^{T}(A)=(\underline{R}_{\perp}(A^{c}))^{c}$;

(2) $A\subseteq B\Rightarrow\underline{R}_{\perp}(A)\subseteq\underline{R}_{\perp}(B)$, $\overline{R}^{T}(A)\subseteq\overline{R}^{T}(B)$;

(3) $\overline{R}^{T}(1_{\{y\}})(x)=R(x,y)$, $\forall(x,y)\in X\times Y$, $\underline{R}_{\perp}(1_{Y\setminus\{y\}})(x)=1-R(x,y)$, $\forall(x,y)\in X\times Y$;

(4) R 是 Serial $\Leftrightarrow\underline{R}_{\perp}(\varnothing)=\varnothing\Leftrightarrow\overline{R}^{T}(Y)=Y\Leftrightarrow\underline{R}_{\perp}(A)\subseteq\overline{R}^{T}(A)$.

证明 (1) $(\overline{R}^{T}(A^{c}))^{c}=(R\circ_{T}A^{c})^{c}=\underline{R}_{\perp}(A)$;

(2) $A\subseteq B\Rightarrow\underline{R}_{\perp}(A)=(R\circ_{T}A^{c})^{c}\subseteq(R\circ_{T}B^{c})^{c}=\underline{R}_{\perp}(B)$;

(3) $\forall(x,y)\in X\times Y$, $\overline{R}^{T}(1_{\{y\}})(x)=\sup\{1_{\{y\}}(t)\,T\,R(x,t)\mid t\in Y\}=R(x,y)$;

(4) 如果 R 是 Serial，则对所有 $x\in X$，存在一个 $y_0\in Y$，使得 $R(x,y_0)=1$. 这时 $\underline{R}_{\perp}(\varnothing)(x)=\inf\{\varnothing(y)\perp(1-R(x,y))\mid y\in Y\}\leqslant 0\perp(1-R(x,y_0))=0$，即 $\underline{R}_{\perp}(\varnothing)=\varnothing$. 如果 $\underline{R}_{\perp}(\varnothing)=\varnothing$，则由(1)的对偶性得到

$$\overline{R}^{T}(Y)=Y.$$

如果 $\overline{R}^{T}(Y)=Y$，则对所有 $x\in X$, $\overline{R}^{T}(Y)(x)=\inf\{Y(y)\,T(1-R(x,y))\mid y\in Y\}=\inf\{1-R(x,y)\mid y\in Y\}=1$. 于是由 Y 的有限性得到存在 $y_0\in Y$，使得 $R(x,y_0)=1$. 因此

$\underline{R}_{\perp}(A)(x)=\inf\{A(y)\perp(1-R(x,y))\mid y\in Y\}$

$\leqslant A(y_0)\perp(1-R(x,y_0))=A(y_0)\,T\,R(x,y_0)$

$\leqslant\sup\{A(y)\,T\,R(x,y)\mid y\in Y\}\subseteq\overline{R}^{T}(A)(x)$

即
$$\underline{R}_{\perp}(A) \subseteq \overline{R}^{\top}(A).$$

如果 $\underline{R}_{\perp}(A) \subseteq \overline{R}^{\top}(A)$ 对任意 $A \in \mathscr{F}(Y)$，那么对所有 $x \in X$，$\underline{R}_{\perp}(\varnothing)(x) = \inf\{\varnothing(y) \perp (1 - R(x,y)) \mid y \in Y\} = \inf\{1 - R(x,y)\} \leqslant \overline{R}^{\top}(\varnothing) = \sup\{\varnothing(y) \top R(x,y) \mid y \in Y\} = 0$. 于是由 Y 的有限性存在 $y_0 \in Y$，使得 $R(x, y_0) = 1$，即 R 是 Serial. □

定理 15.1.20 设 $(\underline{R}_{\perp}(A), \overline{R}^{\top}(A))$ 是由式(15.1.22)、式(15.1.23)定义的任意广义 Fuzzy 粗糙集，则有下列性质：

(1) R 自反 $\Leftrightarrow \underline{R}_{\perp}(A) \subseteq A$，$\forall A \in \mathscr{F}(X)$，

$\Leftrightarrow A \subseteq \overline{R}^{\top}(A)$，$\forall A \in \mathscr{F}(X)$；

(2) R 对称 $\Leftrightarrow \underline{R}_{\perp}(1_{X\setminus\{y\}})(x) = \underline{R}_{\perp}(1_{X\setminus\{x\}})(y)$，$\forall (x,y) \in X \times X$，

$\Leftrightarrow \overline{R}^{\top}(1_{\{x\}})(y) = \overline{R}^{\top}(1_{\{y\}})(x)$，$\forall (x,y) \in X \times X$；(1_A 参见定义 1.1.2)

(3) R 是 max-$\top$ 传递的 $\Leftrightarrow \underline{R}_{\perp}(A) \subseteq \underline{R}_{\perp}(\underline{R}_{\perp}(A))$，$\forall A \in \mathscr{F}(X)$，

$\Leftrightarrow \overline{R}^{\top}(\overline{R}^{\top}(A)) \subseteq \overline{R}^{\top}(A)$，$\forall A \in \mathscr{F}(X)$； (max-$\top$ 传递参见定义 3.6.1)

(4) R 自反和 max-$\top$ 传递 $\Rightarrow \underline{R}_{\perp}(A) = \underline{R}_{\perp}(\underline{R}_{\perp}(A))$，$\overline{R}^{\top}(\overline{R}^{\top}(A)) = \overline{R}^{\top}(A)$，$\forall A \in \mathscr{F}(X)$.

证明 (1) 如果 R 是自反的，则 $\forall A \in \mathscr{F}(X)$，

$$\begin{aligned}\underline{R}_{\perp}(A)(x) &= \inf\{A(y) \perp (1 - R(x,y)) \mid y \in X\} \\ &\leqslant A(x) \perp (1 - R(x,x)) = A(x),\ \forall x \in X\end{aligned}$$

即
$$\underline{R}_{\perp}(A) \subseteq A.$$

如果 $\underline{R}_{\perp}(A) \subseteq A$，$\forall A \in \mathscr{F}(X)$，则 $A \subseteq \overline{R}^{\top}(A)$，$\forall A \in \mathscr{F}(X)$. 如果 $A \subseteq \overline{R}^{\top}(A)$，$\forall A \in \mathscr{F}(X)$，则 $\forall x \in X$，$1 = 1_{\{x\}}(x) \leqslant \overline{R}^{\top}(1_{\{x\}})(x) = R(x,x)$，即 R 是自反的.

(2) $\forall (x,y) \in X \times X$，

$$\underline{R}_{\perp}(1_{X\setminus\{y\}})(x) = \inf\{1_{X\setminus\{y\}}(t) \perp (1 - R(x,t)) \mid t \in X\} = 1 - R(x,y)$$
$$\underline{R}_{\perp}(1_{X\setminus\{x\}})(y) = \inf\{1_{X\setminus\{x\}}(t) \perp (1 - R(y,t)) \mid t \in X\} = 1 - R(y,x)$$

所以 R 是对称的等价于 $\underline{R}_{\perp}(1_{X\setminus\{y\}})(x) = \underline{R}_{\perp}(1_{X\setminus\{x\}})(y)$，$\forall (x,y) \in X \times X$. 类似还等价于 $\overline{R}^{\top}(1_{\{x\}})(y) = \overline{R}^{\top}(1_{\{y\}})(x)$，$\forall (x,y) \in X \times X$.

(3) 如果 R 是 max－$\top$ 传递的，则

$$\begin{aligned}\underline{R}_{\perp}(\underline{R}_{\perp}(A)) &= R^c \,\hat{\circ}_{\perp}\, (R^c \,\hat{\circ}_{\perp}\, A) \\ &= (R^c \,\hat{\circ}_{\perp}\, R^c) \,\hat{\circ}_{\perp}\, A = (R \circ_{\top} R)^c \,\hat{\circ}_{\perp}\, A \supseteq R^c \,\hat{\circ}_{\perp}\, A = \underline{R}_{\perp}(A)\end{aligned}$$

如果 $\underline{R}_{\perp}(A) \subseteq \underline{R}_{\perp}(\underline{R}_{\perp}(A))$，$\forall A \in \mathscr{F}(X)$，则 $\overline{R}^{\top}(\overline{R}^{\top}(A)) \subseteq \overline{R}^{\top}(A)$，$\forall A \in \mathscr{F}(X)$.

如果 $\overline{R}^{T}(\overline{R}^{T}(A))\subseteq\overline{R}^{T}(A)$，$\forall A\in\mathscr{F}(X)$，则对所有 $x,y\in X$，$R\circ_T(R\circ_T 1_{\{y\}})(x)\leqslant(R\circ_T 1_{\{y\}})(x)$，即 $R\circ_T R(x,y)\leqslant R(x,y)$. 于是 R 是 max-T 传递的.

(4)这是(1)和(3)的直接结果. □

15.1.7 区间值粗糙 Fuzzy 集

如果考虑有限非空论域 X 上的区间值 Fuzzy 集，则 Dubois 和 Prade 意义下的粗糙 Fuzzy 集可以推广. 为了不与粗糙集的上近似、下近似符号混淆，本节的区间值 Fuzzy 集 A 用 $[A^-,A^+]$ 表示. 区间值 Fuzzy 集的并 $\cup$、交 $\cap$、补 $\cdot^c$ 与序关系 $\subseteq$ 参见 §1.5.2.

定义 15.1.10 (Gong et al., 2008) 设 R 是有限非空论域 X 上的等价关系，对于区间值 Fuzzy 集 $A\in\mathscr{F}_I(X)$，A 的下近似与上近似分别定义为两个区间值 Fuzzy 集 $\underline{R}(A)$ 和 $\overline{R}(A)$，它们的隶属函数为

$$\begin{aligned}\underline{R}(A)(x)&=\wedge\{A(y)\mid y\in[x]_R\}\\&=[\wedge\{A^-(y)\mid y\in[x]_R\},\ \wedge\{A^+(y)\mid y\in[x]_R\}]\end{aligned}\tag{15.1.24}$$

$$\begin{aligned}\overline{R}(A)(x)&=\vee\{A(y)\mid y\in[x]_R\}\\&=[\vee\{A^-(y)\mid y\in[x]_R\},\ \vee\{A^+(y)\mid y\in[x]_R\}]\end{aligned}\tag{15.1.25}$$

称区间值 Fuzzy 集偶对 $(\underline{R}(A),\overline{R}(A))$ 为区间值粗糙 Fuzzy 集(interval-valued rough fuzzy set).

区间值粗糙 Fuzzy 集有下面的性质.

定理 15.1.21 (Gong Sun, et al., 2008) 设(X,R)为 Pawlak 近似空间，$(\underline{R}(A),\overline{R}(A))$ 为式(15.1.24)、式(15.1.25)所定义的区间值粗糙 fuzzy 集，则 $\forall A,B\in\mathscr{F}_I(X)$：

(1) $\underline{R}A\subseteq A\subseteq\overline{R}A$；

(2) $\underline{R}(A^c)=(\overline{R}A)^c$，$\overline{R}(A^c)=(\underline{R}A)^c$；

(3) $\overline{R}(A\cup B)=\overline{R}A\cup\overline{R}B$，$\underline{R}(A\cap B)=\underline{R}A\cap\underline{R}B$；

(4) $\underline{R}(A\cup B)\supseteq\underline{R}A\cup\underline{R}B$，$\overline{R}(A\cap B)\subseteq\overline{R}A\cap\overline{R}B$；

(5) $\underline{R}(\underline{R}A)=\overline{R}(\underline{R}A)=\underline{R}A$，$\overline{R}(\overline{R}A)=\underline{R}(\overline{R}A)=\overline{R}A$.

证明 (1) 因 $\underline{R}(A)(x)=\wedge\{A(y)\mid y\in[x]_R\}=[\wedge\{A^-(y)\mid y\in[x]_R\},\wedge\{A^+(y)\mid y\in[x]_R\}]$，并且 $A(x)=[A^-(x),A^+(x)]$，我们有

$\wedge\{A^-(y)\mid y\in[x]_R\}\leqslant A^-(x)$

$$\wedge\{A^{+}(y)\mid y\in[x]_R\}\leqslant A^{+}(x)$$

从而 $[\wedge\{A^{-}(y)\mid y\in[x]_R\},\wedge\{A^{+}(y)\mid y\in[x]_R\}]\leqslant_{LR}[A^{-}(x),A^{+}(x)]$（区间序关系 $\leqslant_{LR}$ 参见§2.5.3）.

于是，$\underline{R}A\subseteq A$. 同理可证 $A\subseteq\overline{R}A$.

(2) $\underline{R}(A^c)(x)=[\wedge\{1-A^{+}(y)\mid y\in[x]_R\},\wedge\{1-A^{-}(y)\mid y\in[x]_R\}]$

$$=[1-\vee\{A^{+}(y)\mid y\in[x]_R\},1-\vee\{A^{-}(y)\mid y\in[x]_R\}]$$

$$=1-[\vee\{A^{-}(y)\mid y\in[x]_R\},\vee\{A^{+}(y)\mid y\in[x]_R\}]$$

$$=(\overline{R}A)^c(x)$$

于是 $\underline{R}(A^c)=(\overline{R}A)^c$. 同理可证 $\overline{R}(A^c)=(\underline{R}A)^c$.

(3) $(\overline{R}(A)\cup\overline{R}(B))(x)=[\vee\{A^{-}(y)\mid y\in[x]_R\},\vee\{A^{+}(y)\mid y\in[x]_R\}]\vee[\vee\{B^{-}(y)\mid y\in[x]_R\},\vee\{B^{+}(y)\mid y\in[x]_R\}]$

$$=[(\vee\{A^{-}(y)\mid y\in[x]_R\})\vee(\vee\{B^{-}(y)\mid y\in[x]_R\}),(\vee\{A^{+}(y)\mid y\in[x]_R\})\vee(\vee\{B^{+}(y)\mid y\in[x]_R\})]$$

$$=[\vee\{A^{-}(y)\vee B^{-}(y)\mid y\in[x]_R\},\vee\{A^{+}(y)\vee B^{+}(y)\mid y\in[x]_R\}]=\overline{R}(A\cup B)(x)$$

即 $\overline{R}(A\cup B)=\overline{R}A\cup\overline{R}B$. 交换上面证明中的 $\vee$ 和 $\wedge$ 易证明

$$\underline{R}(A\cap B)=\underline{R}A\cap\underline{R}B.$$

(4) $(\underline{R}(A)\cup\underline{R}(B))(x)=[\wedge\{A^{-}(y)\mid y\in[x]_R\},\wedge\{A^{+}(y)\mid y\in[x]_R\}]\vee[\wedge\{B^{-}(y)\mid y\in[x]_R\},\wedge\{B^{+}(y)\mid y\in[x]_R\}]$

$$=[(\wedge\{A^{-}(y)\mid y\in[x]_R\})\vee(\wedge\{B^{-}(y)\mid y\in[x]_R\}),(\wedge\{A^{+}(y)\mid y\in[x]_R\})\vee(\wedge\{B^{+}(y)\mid y\in[x]_R\})]$$

注意 $(\wedge\{A^{-}(y)\mid y\in[x]_R\})\vee(\wedge\{B^{-}(y)\mid y\in[x]_R\})\leqslant\wedge\{A^{-}(y)\vee B^{-}(y)\mid y\in[x]_R\}$

$$(\wedge\{A^{+}(y)\mid y\in[x]_R\})\vee(\wedge\{B^{+}(y)\mid y\in[x]_R\})\leqslant\wedge\{A^{+}(y)\vee B^{+}(y)\mid y\in[x]_R\}$$

因此 $(\underline{R}(A)\cup\underline{R}(B))(x)\leqslant[\wedge\{A^{-}(y)\vee B^{-}(y)\mid y\in[x]_R\},\wedge\{A^{+}(y)\vee B^{+}(y)\mid y\in[x]_R\}]$

$$=\underline{R}(A\cup B)(x).$$

即 $\underline{R}(A\cup B)\supseteq\underline{R}A\cup\underline{R}B$. 同理可证 $\overline{R}(A\cap B)\subseteq\overline{R}A\cap\overline{R}B$.

(5) 设 $C=\underline{R}(A)$，则

$C(x)=\underline{R}(A)(x)=[\wedge\{A^{-}(y)\mid y\in[x]_R\},\wedge\{A^{+}(y)\mid y\in[x]_R\}]$

$\underline{R}(C)(x)=[\wedge\{\wedge\{A^{-}(u)\mid u\in[y]_R\}\mid y\in[x]_R\},\wedge\{\wedge\{A^{+}(u)\mid u\in$

$[y]_R\}|y\in[x]_R\}]$

$=[\wedge\{A^-(y)|y\in[x]_R\},\wedge\{A^+(y)|y\in[x]_R\}]=C(x)$

$=\underline{R}(A)(x).$

即 $\underline{R}(\underline{R}A)=\underline{R}A$. 同理可证 $\overline{R}(\underline{R}A)=\underline{R}A$, $\overline{R}(\overline{R}A)=\underline{R}(\overline{R}A)=\overline{R}A$. □

15.1.8 区间值 Fuzzy 粗糙集

如果考虑有限非空论域 X 上的区间值 Fuzzy 集和区间值 Fuzzy 关系，则 Dubois 和 Prade 意义下的 Fuzzy 粗糙集可以推广.

定义 15.1.11 (Sun Gong, et al., 2008) 设 R 是有限论域 X 上的区间值 Fuzzy 等价关系，则 $K=(X,R)$ 称为一个区间值 Fuzzy 近似空间(interval-valued fuzzy approximation space). 如果 A 是 X 上的区间值 Fuzzy 集，定义 X 上的两个区间值 Fuzzy 集 $\underline{R}(A)$ 和 $\overline{R}(A)$ 并且 $\forall x\in X$

$$\underline{R}(A)(x)=\bigwedge_{y\in X}\{A(y)\vee(1-R(x,y))\}$$

$$=\left[\bigwedge_{y\in X}\{A^-(y)\vee(1-R^+(x,y))\},\bigwedge_{y\in X}\{A^+(y)\vee(1-R^-(x,y))\}\right]\tag{15.1.26}$$

$$\overline{R}(A)(x)=\bigvee_{y\in X}\{A(y)\wedge R(x,y)\}$$

$$=\left[\bigvee_{y\in X}\{A^-(y)\wedge R^-(x,y)\},\bigvee_{y\in X}\{A^+(y)\wedge R^+(x,y)\}\right]\tag{15.1.27}$$

则 $\underline{R}(A)$ 和 $\overline{R}(A)$ 分别称为区间值 Fuzzy 集 A 的下近似和上近似(lower and upper approximation)，$(\underline{R}(A),\overline{R}(A))$ 称为区间值 Fuzzy 粗糙集(interval-valued fuzzy rough set).

区间值 Fuzzy 粗糙集有下面的性质.

定理 15.1.22 在区间值 Fuzzy 近似空间 (X,R) 中，$(\underline{R}(A),\overline{R}(A))$ 为式(15.1.26)、式(15.1.27)所定义的区间值 Fuzzy 粗糙集，对任意 $A,B\in\mathscr{F}_I(X)$，有下列性质：

(1) $\underline{R}(A)\subseteq A\subseteq\overline{R}(A)$;

(2) $\underline{R}(A^c)=(\overline{R}(A))^c$, $\overline{R}(A^c)=(\underline{R}(A))^c$;

(3) $\overline{R}(A\cup B)=\overline{R}(A)\cup\overline{R}(B)$, $\overline{R}(A\cap B)\subseteq\overline{R}(A)\cap\overline{R}(B)$;

(4) $\underline{R}(A\cup B)\supseteq\underline{R}(A)\cup\underline{R}(B)$, $\underline{R}(A\cap B)=\underline{R}(A)\cap\underline{R}(B)$.

证明 (1) 因 $\underline{R}(A)(x)=\Big[\bigwedge_{y\in X}\{A^-(y)\vee(1-R^+(x,y))\},\bigwedge_{y\in X}\{A^+(y)$

$\vee (1-R^-(x,y))\}\Big]$，并且 $A(x)=[A^-(x),A^+(x)]$，我们有

$$\bigwedge_{y\in X}\{A^-(y)\vee(1-R^+(x,y))\}\leqslant A^-(x)\vee(1-R^+(x,x))=A^-(x)$$

$$\bigwedge_{y\in X}\{A^+(y)\vee(1-R^-(x,y))\}\leqslant A^+(x)\vee(1-R^-(x,x))=A^+(x)$$

从而

$$\left[\bigwedge_{y\in X}\{A^-(y)\vee(1-R^+(x,y))\},\bigwedge_{y\in X}\{A^+(y)\vee(1-R^-(x,y))\}\right]$$
$$\leqslant_{LR}[A^-(x),A^+(x)]$$

于是，$\underline{R}A\subseteq A$. 同理可证 $A\subseteq\overline{R}A$.

(2)
$$\underline{R}(A^c)(x)=\left[\bigwedge_{y\in X}\{(1-A^+(y))\vee(1-R^+(x,y))\},\right.$$
$$\left.\bigwedge_{y\in X}\{(1-A^-(y))\vee(1-R^-(x,y))\}\right]$$
$$=\left[1-\bigvee_{y\in X}\{A^+(y)\wedge R^+(x,y)\},1-\bigvee_{y\in X}\{A^-(y)\wedge R^-(x,y)\}\right]$$
$$=1-\left[\bigvee_{y\in X}\{A^-(y)\wedge R^-(x,y)\},\bigvee_{y\in X}\{A^+(y)\wedge R^+(x,y)\}\right]$$
$$=(\overline{R}A)^c(x)$$

于是 $\underline{R}(A^c)=(\overline{R}A)^c$. 同理可证 $\overline{R}(A^c)=(\underline{R}A)^c$.

(3)
$$(\overline{R}(A)\cup\overline{R}(B))(x)=\left[\bigvee_{y\in X}\{A^-(y)\wedge R^-(x,y)\},\bigvee_{y\in X}\{A^+(y)\wedge\right.$$
$$\left.R^+(x,y)\}\right]\vee\left[\bigvee_{y\in X}\{B^-(y)\wedge R^-(x,y)\},\bigvee_{y\in X}\{B^+(y)\wedge R^+(x,y)\}\right]$$
$$=\left[\left(\bigvee_{y\in X}\{A^-(y)\wedge R^-(x,y)\}\right)\vee\left(\bigvee_{y\in X}\{B^-(y)\wedge R^-(x,y)\}\right),\right.$$
$$\left.\left(\bigvee_{y\in X}\{A^+(y)\wedge R^+(x,y)\}\right)\vee\left(\bigvee_{y\in X}\{B^+(y)\wedge R^+(x,y)\}\right)\right]$$
$$=\left[\bigvee_{y\in X}\{(A^-(y)\vee B^-(y))\wedge R^-(x,y)\},\bigvee_{y\in X}\{(A^+(y)\vee B^+(y))\wedge\right.$$
$$\left.R^+(x,y)\}\right]=\overline{R}(A\cup B)(x).$$

即 $\overline{R}(A\cup B)=\overline{R}A\cup\overline{R}B$. 交换上面证明中的 $\vee$ 和 $\wedge$ 易证明

$$\underline{R}(A\cap B)=\underline{R}A\cap\underline{R}B.$$

(4)
$$(\underline{R}(A)\cup\underline{R}(B))(x)=\left[\bigwedge_{y\in X}\{A^-(y)\vee(1-R^+(x,y))\},\bigwedge_{y\in X}\{A^+(y)\vee(1-\right.$$
$$\left.R^-(x,y))\}\right]$$
$$\vee\left[\bigwedge_{y\in X}\{B^-(y)\vee(1-R^+(x,y))\},\bigwedge_{y\in X}\{B^+(y)\vee(1-R^-(x,y))\}\right]$$

$$= \left[\left(\bigwedge_{y\in X} \{A^-(y) \vee (1-R^+(x,y))\} \right) \vee \left(\bigwedge_{y\in X} \{B^-(y) \vee (1-R^+(x,y))\} \right), \right.$$

$$\left. \left(\bigwedge_{y\in X} \{A^+(y) \vee (1-R^-(x,y))\} \right) \vee \left(\bigwedge_{y\in X} \{B^+(y) \vee (1-R^-(x,y))\} \right) \right]$$

注意 $\left(\bigwedge_{y\in X} \{A^-(y) \vee (1-R^+(x,y))\} \right) \vee \left(\bigwedge_{y\in X} \{B^-(y) \vee (1-R^+(x,y))\} \right)$

$$\leqslant \bigwedge_{y\in X} \{(A^-(y) \vee B^-(y)) \vee (1-R^+(x,y))\},$$

$$\left(\bigwedge_{y\in X} \{A^+(y) \vee (1-R^-(x,y))\} \right) \vee \left(\bigwedge_{y\in X} \{B^+(y) \vee (1-R^-(x,y))\} \right)$$

$$\leqslant \bigwedge_{y\in X} \{A^+(y) \vee B^+(y) \vee (1-R^-(x,y))\}$$

因此 $(\underline{R}(A) \cup \underline{R}(B))(x) \leqslant_{LR} \left[\bigwedge_{y\in X} \{A^-(y) \vee B^-(y) \vee (1-R^+(x,y))\}, \right.$

$$\left. \bigwedge_{y\in X} \{A^+(y) \vee B^+(y) \vee (1-R^-(x,y))\} \right]$$

$$= \underline{R}(A \cup B)(x).$$

即 $\underline{R}(A \cup B) \supseteq \underline{R}A \cup \underline{R}B$. 同理可证 $\overline{R}(A \cap B) \subseteq \overline{R}A \cap \overline{R}B$. □

上面所讨论的粗糙集之间的关系如表 15.1.1 所示.

表 15.1.1 各类粗糙集的关系

粗糙集类型	论　域	关　系	对　象
Pawlak 粗糙集	$X\times X$	等价关系 R	X 的子集 A
粗糙 Fuzzy 集	$X\times X$	等价关系 R	X 的 Fuzzy 子集 A
Fuzzy 粗糙集	$X\times X$	Fuzzy 等价关系 R	X 的 Fuzzy 子集 A
广义粗糙集	$X\times Y$	一般关系 R	Y 的子集 A
广义粗糙 Fuzzy 集	$X\times Y$	一般关系 R	Y 的 Fuzzy 子集 A
广义 Fuzzy 粗糙集	$X\times Y$	Fuzzy 关系 R	Y 的 Fuzzy 子集 A
$(\perp,\top)$-广义 Fuzzy 粗糙集	$X\times Y$	Fuzzy 关系 R	Y 的 Fuzzy 子集 A
区间值粗糙 Fuzzy 集	$X\times X$	等价关系 R	X 的区间值 Fuzzy 子集 A
区间值 Fuzzy 粗糙集	$X\times X$	区间值 Fuzzy 等价关系 R	X 的区间值 Fuzzy 子集 A

§15.2 可信性理论和不确定理论

为了度量 Fuzzy 事件，Zadeh(1978)提出了可能性测度(参见定义 13.1.2). 可能性测度被广泛应用，但刘宝碇认为可能性测度不满足自对偶性，从而提出

了可信性测度和不确定性测度的概念. 可信性理论由刘宝碇于 2004 年建立并在 2007 年重新定义，不确定理论由刘宝碇于 2007 年建立,这一理论是研究模糊现象的一个数学分支.

15.2.1 可信性空间

设 Θ 是非空集,$\mathscr{P}(\Theta)$ 是 Θ 的幂集（即 Θ 的最大 σ-代数）. $\mathscr{P}(\Theta)$ 中每一元素称为一个事件(是可测集,参见定义 12.1.1).

定义 15.2.1 (Liu and Liu, 2002) 映射 $Cr: \mathscr{P}(\Theta) \to [0,1]$ 称为 Θ 上的可信性测度(credibility measure)，如果 Cr 满足下面四条公理：

公理 CR1.（正规性）$Cr(\Theta)=1$.

公理 CR2.（单调性）$Cr(A)\leqslant Cr(B)$，当 $A\subseteq B$.

公理 CR3.（自对偶性）$Cr(A)+Cr(A^c)=1$，对任意事件 A.

公理 CR4.（极大性）$Cr\left(\bigcup_i A_i\right)=\sup_i Cr(A_i)$，对任意满足 $\sup_i Cr(A_i)<0.5$ 的事件族 $\{A_i\}$.

在公理 CR3 下公理 CR4 等价于：

公理 CR5.（极小性）$Cr\left(\bigcap_i A_i\right)=\inf_i Cr(A_i)$，对任意满足 $\inf_i Cr(A_i)>0.5$ 的事件族 $\{A_i\}$.

例 15.2.1 设 $\Theta=\{\theta_1,\theta_2\}$，则 $\mathscr{P}(\Theta)=\{\varnothing,\{\theta_1\},\{\theta_2\},\Theta\}$. 我们定义 $Cr(\varnothing)=0$, $Cr(\theta_1)=a\in[0,1]$, $Cr(\theta_2)=1-a$, $Cr(\Theta)=1$，容易验证 Cr 是一个可信性测度. □

例 15.2.2 设 Θ 是非空集,定义 $Cr(\varnothing)=0$, $Cr(\Theta)=1$，对任意 $A\in\mathscr{P}(\Theta)\backslash\{\varnothing,\Theta\}$, $Cr(A)=0.5$，则 Cr 是一个可信性测度. 特别地，当 $\Theta=\{\theta_1,\theta_2,\cdots\}$ 时，设 $A_i=\{\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_i\}$, $A_i\subseteq A_{i+1}$, $\bigcup_{i\in\mathbf{N}} A_i=\Theta$, $\lim_{i\to\infty} Cr(A_i)=0.5$, $Cr\left(\bigcup_{i\in\mathbf{N}} A_i\right)=Cr(\Theta)=1$. 这说明 Cr 是 Θ 上的可信性测度,但不是 $\mathscr{P}(\Theta)$ 上的 Fuzzy 测度. □

例 15.2.3 设 μ 是 $\mathbf{R}$ 上的非负函数并且满足 $\sup\mu(x)=1$，则集值函数

$$Cr(A)=\frac{1}{2}\left(\sup_{x\in A}\mu(x)+1-\sup_{x\in A^c}\mu(x)\right)$$

是 $\mathbf{R}$ 上的一个可信性测度. □

例 15.2.4 $\mathscr{P}(\Theta)$ 上的 Dirac 测度(见定义 12.2.2)是 Θ 上的可信性测度. □

定理 15.2.1 设 Cr 是 Θ 上的一个可信性测度,则 $Cr(\varnothing)=0$，并且对任意

$A \in \mathscr{P}(\Theta)$，$0 \leqslant Cr(A) \leqslant 1$.

证明 由公理 CR1 和公理 CR3 我们得到 $Cr(\varnothing)=1-Cr(\Theta)=1-1=0$. 对任意 $A \in \mathscr{P}(\Theta)$，因为 $\varnothing \subseteq A \subseteq \Theta$，由公理 CR2 即得 $0 \leqslant Cr(A) \leqslant 1$. □

定理 15.2.2 设 Cr 是 Θ 上的一个可信性测度，则对任意 $A,B \in \mathscr{P}(\Theta)$，我们有：

(1) $Cr(A \cup B)=Cr(A) \vee Cr(B)$，对 $Cr(A \cup B) \leqslant 0.5$；

(2) $Cr(A \cap B)=Cr(A) \wedge Cr(B)$，对 $Cr(A \cap B) \geqslant 0.5$.

上述等式对无穷多个事件也成立.

证明 (1)如果 $Cr(A \cup B) < 0.5$，则由公理 CR2 知 $Cr(A) \vee Cr(B) < 0.5$. 这时由公理 CR4 立即得到(1). 如果 $Cr(A \cup B)=0.5$ 并且(1)不成立，则 $Cr(A) \vee Cr(B) < 0.5$. 这时由公理 CR4 有

$$Cr(A \cup B)=Cr(A) \vee Cr(B) < 0.5$$

这一矛盾导致(1)成立.

(2)因 $Cr(A \cap B) \geqslant 0.5$，由自对偶性知 $Cr(A^c \cup B^c) \leqslant 0.5$. 于是

$$Cr(A \cap B)=1-Cr(A^c \cap B^c)=1-Cr(A^c) \vee Cr(B^c)=Cr(A) \wedge Cr(B).$$

□

定理 15.2.3 设 Cr 是 Θ 上的一个可信性测度，则对任意 $A,B \in \mathscr{P}(\Theta)$，我们有：

(1) $Cr(A \cup B)=Cr(A) \vee Cr(B)$，对 $Cr(A)+Cr(B) < 1$；

(2) $Cr(A \cap B)=Cr(A) \wedge Cr(B)$，对 $Cr(A)+Cr(B) > 1$.

证明 (1) 假设 $Cr(A)+Cr(B) < 1$. 则至少存在一项小于 0.5，比如 $Cr(B) < 0.5$. 如果 $Cr(A) < 0.5$ 也成立，那么由公理 CR4 知(1)成立. 如果 $Cr(A) \geqslant 0.5$，由定理 15.2.2 得到

$$\begin{aligned}Cr(A) &= Cr(A \cup (B \cap B^c))=Cr((A \cup B) \cap (A \cup B^c)) \\ &= Cr(A \cup B) \wedge Cr(A \cup B^c)\end{aligned}$$

另一方面，我们有

$$Cr(A) < 1-Cr(B)=Cr(B^c) \leqslant Cr(A \cup B^c)$$

由此一定有 $\quad Cr(A \cup B)=Cr(A)=Cr(A) \vee Cr(B).$

(2) 假设 $Cr(A)+Cr(B) > 1$. 则 $Cr(A^c)+Cr(B^c) < 1$. 进一步由(1)可以推出

$$\begin{aligned}Cr(A \cap B) &= 1-Cr(A^c \cup B^c)=1-Cr(A^c) \vee Cr(B^c) \\ &= (1-Cr(A^c)) \wedge (1-Cr(B^c))=Cr(A) \wedge Cr(B).\end{aligned}$$

定理证明. □

定理 15.2.4 (Liu，2004，可信性次可加性) 可信性测度 Cr 是次可加的，

即对任意 $A,B\in\mathscr{P}(\Theta)$

$$Cr(A\cup B)\leqslant Cr(A)+Cr(B). \tag{15.2.1}$$

还是无穷可列次可加的.

证明 分下面三种情形讨论.

情形 1: $Cr(A)<0.5,\quad Cr(B)<0.5$

由公理 CR4 得到

$$Cr(A\cup B)=Cr(A)\vee Cr(B)\leqslant Cr(A)+Cr(B).$$

情形 2: $Cr(A)\geqslant 0.5$

对于此情形,由公理 CR3,我们有 $Cr(A^c)\leqslant 0.5$. 于是

$$\begin{aligned}Cr(A^c)&=Cr(A^c\cap(B\cup B^c))=Cr((A^c\cap B)\cup(A^c\cap B^c))\\&=Cr(A^c\cap B)\vee Cr(A^c\cap B^c)\ (\text{定理 } 15.2.2)\\&\leqslant Cr(A^c\cap B)+Cr(A^c\cap B^c)\\&\leqslant Cr(B)+Cr(A^c\cap B^c)\end{aligned}$$

利用这一不等式,我们获得

$$\begin{aligned}Cr(A)+Cr(B)&=1-Cr(A^c)+Cr(B)\\&\geqslant 1-Cr(B)-Cr(A^c\cap B^c)+Cr(B)\\&=1-Cr(A^c\cap B^c)=Cr(A\cup B).\end{aligned}$$

情形 3: $Cr(B)\geqslant 0.5$

类似情形 2 可证. □

定理 15.2.5 设 $\{B_i\}_{i\in\mathbf{N}}\subseteq\mathscr{P}(\Theta)$, 并且 $\lim\limits_{i\to\infty}Cr\{B_i\}=0$, 则 $\forall A\in\mathscr{P}(\Theta)$

$$\lim_{i\to\infty}Cr(A\cup B_i)=\lim_{i\to\infty}Cr(A\backslash B_i)=Cr(A) \tag{15.2.2}$$

证明 由单调性公理 CR2 和次可加定理得到

$$Cr(A)\leqslant Cr(A\cup B_i)\leqslant Cr(A)+Cr(B_i),\ i\in\mathbf{N}$$

于是由 $\lim\limits_{i\to\infty}Cr\{B_i\}=0$ 得到 $\lim\limits_{i\to\infty}Cr\{A\cup B_i\}=Cr(A)$.

因为 $A\backslash B_i\subseteq A\subseteq(A\backslash B_i)\cup B_i$, 我们有

$$Cr(A\backslash B_i)\leqslant Cr(A)\leqslant Cr(A\backslash B_i)+Cr(B_i),\ i\in\mathbf{N}$$

因此由 $\lim\limits_{i\to\infty}Cr\{B_i\}=0$ 得到 $\lim\limits_{i\to\infty}Cr\{A\backslash B_i\}=Cr(A)$. □

定理 15.2.6 Θ 上的可信性测度是可加的当且仅当 Θ 中存在最多两个元素取非零值.

证明 设 Θ 上的可信性测度 Cr 是可加的. 如果 Θ 中有超过两个取非零值的元素,那么我们可以选三个不同的元素 $\theta_1,\theta_2,\theta_3$ 使得 $Cr(\{\theta_1\})\geqslant Cr(\{\theta_2\})\geqslant Cr(\{\theta_3\})>0$. 如果 $Cr(\{\theta_1\})\geqslant 0.5$, 由公理 CR2 和公理 CR3 得到

$$Cr(\{\theta_2,\theta_3\}) \leqslant Cr(\Theta\backslash\{\theta_1\}) = 1 - Cr(\{\theta_1\}) \leqslant 0.5$$

于是由 Cr 的可加性知 $Cr(\{\theta_2\}) < 0.5, Cr(\{\theta_3\}) < 0.5$.

再由公理 CR4,我们获得

$$Cr(\{\theta_2,\theta_3\}) = Cr(\{\theta_2\}) \vee Cr(\{\theta_3\}) < Cr(\{\theta_2\}) + Cr(\{\theta_3\})$$

这与可加性假设矛盾. 如果 $Cr(\{\theta_1\}) < 0.5$,那么 $Cr(\{\theta_3\}) \leqslant Cr(\{\theta_2\}) < 0.5$

由公理 CR4 而得

$$Cr(\{\theta_2,\theta_3\}) = Cr(\{\theta_2\}) \vee Cr(\{\theta_3\}) < Cr(\{\theta_2\}) + Cr(\{\theta_3\})$$

这也与可加性假设矛盾. 因此 Θ 中存在最多两个元素取非零值.

反过来,设 Θ 中存在最多两个元素取非零值,比如 θ_1, θ_2. 设 A,B 是不相交事件,分两种情况讨论.

(1) $Cr(A)=0$ 或 $Cr(B)=0$.

由次可加性可以推出 $Cr(A \cup B) = Cr(A) + Cr(B)$.

(2) $Cr(A) > 0$ 并且 $Cr(B) > 0$.

不失一般性,不妨假设 $\theta_1 \in A, \theta_2 \in B$. 注意 $Cr((A \cup B)^c) = 0$. 由公理 CR2 和次可加性得到

$$Cr(A \cup B) = Cr(A \cup B \cup (A \cup B)^c) = Cr(\Theta) = 1$$

$$Cr(A) + Cr(B) = Cr(A \cup (A \cup B)^c) + Cr(B) = Cr(A \cup B^c) + Cr(B) = 1.$$

因此 $Cr(A \cup B) = Cr(A) + Cr(B)$. 可加性得证. □

定理 15.2.7 设 Cr 是 Θ 上的一个可信性测度,则

$$\sup_{\theta\in\Theta} Cr(\{\theta\}) \geqslant 0.5$$

$$Cr(\{\theta^*\}) + \sup_{\theta\neq\theta^*} Cr(\{\theta\}) = 1,\ Cr(\{\theta^*\}) \geqslant 0.5 \tag{15.2.3}$$

我们称式(15.2.3)为可信性扩张条件.

证明 如果 $\sup_{\theta\in\Theta} Cr(\{\theta\}) < 0.5$,则由公理 CR4 得

$$1 = Cr(\{\Theta\}) = \sup_{\theta\in\Theta} Cr(\{\theta\}) < 0.5$$

这一矛盾导致 $\sup_{\theta\in\Theta} Cr(\{\theta\}) \geqslant 0.5$. 假设 $\theta^* \in \Theta$ 并且 $Cr(\{\theta^*\}) \geqslant 0.5$. 由公理 CR3 而知 $Cr(\Theta\backslash\{\theta^*\}) \leqslant 0.5$,进而由定理 15.2.2 可得

$$Cr(\{\Theta\backslash\theta^*\}) = \sup_{\theta\neq\theta^*} Cr(\{\theta\})$$

因此由可信性测度的自对偶性知式(15.2.3)的第二式是正确的. □

定理 15.2.8 (Li, Liu, 2006,可信性扩张定理) 设 Θ 是非空集, $Cr(\theta)$ 是 Θ 上满足可信性扩张条件(15.2.3)的非负函数, 则 $Cr(\theta)$ 有如下唯一可信性测

度扩张

$$Cr(A)=\begin{cases}\sup\limits_{\theta\in A}Cr(\{\theta\}), & \sup\limits_{\theta\in A}Cr(\{\theta\})<0.5\\ 1-\sup\limits_{\theta\in A^c}Cr(\{\theta\}), & \sup\limits_{\theta\in A}Cr(\{\theta\})\geqslant 0.5\end{cases}\tag{15.2.4}$$

证明 我们先证明式(15.2.4)定义的 Cr 是 Θ 上的可信性测度.

1. 由可信性扩张条件 $\sup\limits_{\theta\in\Theta}Cr(\{\theta\})\geqslant 0.5$，我们有

$$Cr(\Theta)=1-\sup_{\theta\in\varnothing}Cr(\{\theta\})=1-0=1.$$

2. 如果 $A\subseteq B$，则 $B^c\subseteq A^c$.

(1) $\sup\limits_{\theta\in A}Cr(\{\theta\})<0.5$. 对于这种情形，我们有

$$Cr(A)=\sup_{\theta\in A}Cr(\{\theta\})\leqslant\sup_{\theta\in B}Cr(\{\theta\})\leqslant Cr(B).$$

(2) $\sup\limits_{\theta\in A}Cr(\{\theta\})\geqslant 0.5$. 对于这种情形，我们有 $\sup\limits_{\theta\in B}Cr(\{\theta\})\geqslant 0.5$，并且

$$Cr(A)=1-\sup_{\theta\in A^c}Cr(\{\theta\})\leqslant 1-\sup_{\theta\in B^c}Cr(\{\theta\})=Cr(B).$$

3. 为了证明 $Cr(A)+Cr(A^c)=1$，下面分两种情况讨论.

(1) $\sup\limits_{\theta\in A}Cr(\{\theta\})<0.5$. 在此条件下我们有 $\sup\limits_{\theta\in A^c}Cr(\{\theta\})\geqslant 0.5$(由公理 CR4)，并且

$$Cr(A)+Cr(A^c)=\sup_{\theta\in A}Cr(\{\theta\})+1-\sup_{\theta\in A}Cr(\{\theta\})=1.$$

(2) $\sup\limits_{\theta\in A}Cr(\{\theta\})\geqslant 0.5$. 这时 $\sup\limits_{\theta\in A^c}Cr(\{\theta\})\leqslant 0.5$，并且

$$Cr(A)+Cr(A^c)=1-\sup_{\theta\in A^c}Cr(\{\theta\})+\sup_{\theta\in A^c}Cr(\{\theta\})=1.$$

4. 对于任意满足 $\sup\limits_{i}Cr(A_i)<0.5$ 的集族 $\{A_i\}$，我们有

$$\sup_i\sup_{\theta\in A_i}Cr(\{\theta\})\leqslant\sup_i Cr(A_i)<0.5$$

进而

$$Cr\left(\bigcup_i A_i\right)=\sup_{\theta\in\bigcup\limits_i A_i}Cr(\{\theta\})=\sup_i\sup_{\theta\in A_i}Cr(\{\theta\})=\sup_i Cr(A_i)$$

于是 Cr 是一个可信性测度.

最后证明唯一性. 设 Cr_1 和 Cr_2 是两个可信性测度并且满足 $Cr_1(\{\theta\})=Cr_2(\{\theta\})$，$\forall\theta\in\Theta$. 下面分三种情况证明 $Cr_1(A)=Cr_2(A)$，$\forall A\in\mathscr{P}(\Theta)$.

(1) $Cr_1(A)<0.5$. 由公理 CR4 推出

$$Cr_1(A)=\sup_{\theta\in A}Cr_1(\{\theta\})=\sup_{\theta\in A}Cr_2(\{\theta\})=Cr_2(A).$$

(2) $Cr_1(A) > 0.5$. 这时 $Cr_1(A^c) < 0.5$，于是由(1)得 $Cr_1(A^c) = Cr_2(A^c)$. 因此

$$Cr_1(A) = Cr_2(A).$$

(3) $Cr_1(A) = 0.5$. 这时 $Cr_1(A^c) = 0.5$，并且

$$Cr_2(A) \geqslant \sup_{\theta \in A} Cr_2(\{\theta\}) = \sup_{\theta \in A} Cr_1(\{\theta\}) = Cr_1(A) = 0.5$$

$$Cr_2(A^c) \geqslant \sup_{\theta \in A^c} Cr_2(\{\theta\}) = \sup_{\theta \in A^c} Cr_1(\{\theta\}) = Cr_1(A^c) = 0.5$$

因此 $Cr_2(A) = 0.5 = Cr_1(A)$. 唯一性证明. □

定义 15.2.2 设 Θ 是非空集，$\mathcal{P}(\Theta)$ 是 Θ 的幂集，Cr 是 Θ 上的一个可信性测度，则三元组$(\Theta, \mathcal{P}(\Theta), Cr)$称为可信性空间.

例 15.2.5 如果 $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \cdots\}$，$Cr(\{\theta_i\}) \equiv \frac{1}{2}, i = 1, 2, \cdots$. 由可信性扩张定理可得可信性测度

$$Cr(A) = \begin{cases} 0, & A = \varnothing \\ 1, & A = \Theta \\ \frac{1}{2}, & \text{其他} \end{cases}$$

三元组$(\Theta, \mathcal{P}(\Theta), Cr)$是可信性空间. □

例 15.2.6 如果 $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \cdots\}$，$Cr(\{\theta_i\}) = \frac{i}{2i+1}, i = 1, 2, \cdots$. 由可信性扩张定理可得可信性测度

$$Cr(A) = \begin{cases} \sup\limits_{\theta_i \in A} \frac{i}{2i+1}, & A \text{ 有限} \\ 1 - \sup\limits_{\theta_i \in A^c} \frac{i}{2i+1}, & A \text{ 无限} \end{cases}$$

三元组$(\Theta, \mathcal{P}(\Theta), Cr)$是可信性空间. □

例 15.2.7 如果 $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \cdots\}$，$Cr(\{\theta_1\}) = \frac{1}{2}$，$Cr(\{\theta_i\}) = \frac{1}{i}, i = 2, 3, \cdots$. 由可信性扩张定理可得可信性测度

$$Cr(A) = \begin{cases} \sup\limits_{\theta_i \in A} \frac{1}{i}, & \theta_1, \theta_2 \overline{\in} A \\ \frac{1}{2}, & \theta_1 \in A, \theta_2 \overline{\in} A \text{ 或 } \theta_1 \overline{\in} A, \theta_2 \in A \\ 1 - \sup\limits_{\theta_i \in A^c} \frac{1}{i}, & \theta_1, \theta_2 \in A \end{cases}$$

三元组(Θ, $\mathscr{P}(\Theta)$, Cr)是可信性空间. □

例 15.2.8 如果 $\Theta=[0,1]$, $Cr(\{\theta\})=\frac{\theta}{2}, \theta \in \Theta$. 由可信性扩张定理可得可信性测度

$$Cr(A)=\begin{cases}\frac{1}{2}\sup\limits_{\theta\in A}\theta, & \sup\limits_{\theta\in A}\theta<1\\ 1-\frac{1}{2}\sup\limits_{\theta\in A^c}\theta, & \sup\limits_{\theta\in A}\theta=1\end{cases}$$

三元组(Θ, $\mathscr{P}(\Theta)$, Cr)是可信性空间. □

15.2.2 隶属函数

定义 15.2.3 一个 Fuzzy 变量是一个从可信性空间到实数集的函数(当然是可测的).

定义 15.2.4 设 ξ 是定义在可信性空间(Θ, $\mathscr{P}(\Theta)$, Cr)上的 Fuzzy 变量,则从可信性测度导出的隶属函数定义为

$$\mu(x)=(2Cr\{\xi=x\}) \wedge 1, \quad \forall x \in \mathbf{R}. \tag{15.2.5}$$

例 15.2.9 很显然一个 Fuzzy 变量有唯一的隶属函数. 然而,一个隶属函数可能产生多个 Fuzzy 变量. 例如,假设 $\Theta=\{\theta_1,\theta_2\}$, $Cr(\{\theta_1\})=Cr(\{\theta_2\})=0.5$,则(Θ, $\mathscr{P}(\Theta)$, Cr)是一个可信性空间. 我们定义

$$\xi_1(\theta)=\begin{cases}0, & \theta=\theta_1\\ 1, & \theta=\theta_2\end{cases}, \quad \xi_2(\theta)=\begin{cases}1, & \theta=\theta_1\\ 0, & \theta=\theta_2\end{cases}$$

很清楚 ξ_1 和 ξ_2 都是 Fuzzy 变量并且具有相同隶属函数

$$\mu(x)=\begin{cases}1, & x=0 \text{ 或 } x=1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}.$$

□

定理 15.2.9 (可信性逆定理)设 ξ 是一个隶属函数为 μ 的 Fuzzy 变量,则 $\forall B \subseteq \mathbf{R}$,我们有

$$Cr(\{\xi \in B\})=\frac{1}{2}\left(\sup_{x\in B}\mu(x)+1-\sup_{x\in B^c}\mu(x)\right) \tag{15.2.6}$$

证明 如果 $Cr(\{\xi \in B\}) \leqslant 0.5$,那么由公理 CR2,我们有 $Cr(\{\xi=x\}) \leqslant 0.5$, $\forall x \in B$. 由定理 15.2.2 得到

$$\begin{aligned}Cr(\{\xi \in B\})&=\left(\sup_{x\in B}Cr(\{\xi=x\})\right) \wedge 0.5\\ &=\frac{1}{2}\left(\sup_{x\in B}(2Cr(\{\xi=x\})) \wedge 1\right)=\frac{1}{2}\sup_{x\in B}\mu(x).\end{aligned} \tag{15.2.7}$$

可信性测度的自对偶性可以推出 $Cr(\{\xi \in B^c\}) \geqslant 0.5$,并且 $\sup\limits_{x\in B^c}Cr(\{\xi=x\}) \geqslant$

0.5(由公理 CR4),即

$$\sup_{x\in B^c}\mu(x)=\sup_{x\in B^c}(2Cr(\{\xi=x\}))\wedge 1=1 \tag{15.2.8}$$

由式(15.2.7)和式(15.2.8)可以推出式(15.2.6).

如果 $Cr(\{\xi\in B\})\geqslant 0.5$,那么 $Cr(\{\xi\in B^c\})\leqslant 0.5$. 由此得到

$$Cr(\{\xi\in B\})=1-Cr(\{\xi\in B^c\})=1-\frac{1}{2}\Big(\sup_{x\in B^c}\mu(x)+1-\sup_{x\in B}\mu(x)\Big)$$

$$=\frac{1}{2}\Big(\sup_{x\in B}\mu(x)+1-\sup_{x\in B^c}\mu(x)\Big)$$

定理得证. □

例 15.2.10 设 ξ 是一个隶属函数为 μ 的 Fuzzy 变量,由定理 15.2.9 可以推出下列式子

$$Cr(\{\xi=x\})=\frac{1}{2}\Big(\mu(x)+1-\sup_{y\neq x}\mu(y)\Big),\ \forall x\in\mathbf{R}$$

$$Cr(\{\xi\leqslant x\})=\frac{1}{2}\Big(\sup_{y\leqslant x}\mu(y)+1-\sup_{y>x}\mu(y)\Big),\ \forall x\in\mathbf{R}$$

$$Cr(\{\xi\geqslant x\})=\frac{1}{2}\Big(\sup_{y\geqslant x}\mu(y)+1-\sup_{y<x}\mu(y)\Big),\ \forall x\in\mathbf{R}$$

特别地,当 μ 是一个连续函数时

$$Cr(\{\xi=x\})=\frac{\mu(x)}{2},\ \forall x\in\mathbf{R}.$$

定理 15.2.10 (隶属函数的充分必要条件)一个函数 $\mu:\mathbf{R}\to[0,1]$ 是一个隶属函数当且仅当 $\sup\mu(x)=1$.

证明 设 $\mu:\mathbf{R}\to[0,1]$ 是一个隶属函数,那么存在一个 Fuzzy 变量 ξ,其隶属函数正好为 μ,并且

$$\sup_{x\in\mathbf{R}}\mu(x)=\sup_{x\in\mathbf{R}}(2Cr(\{\xi=x\}))\wedge 1.$$

如果存在一点 $x\in\mathbf{R}$ 使得 $Cr(\{\xi=x\})\geqslant 0.5$,那么 $\sup\mu(x)=1$. 否则,我们有 $Cr(\{\xi=x\})<0.5$, $\forall x\in\mathbf{R}$. 如果 $\sup\limits_{x\in\mathbf{R}}Cr(\{\xi=x\})<0.5$,则由公理 CR4 得到

$$\sup_{x\in\mathbf{R}}(Cr(\{\xi=x\}))=Cr\Big(\bigcup_{x\in\mathbf{R}}\{\xi=x\}\Big)=Cr(\Theta)=1$$

这是不可能的. 所以 $\sup\limits_{x\in\mathbf{R}}Cr(\{\xi=x\})=0.5$,于是

$$\sup_{x\in\mathbf{R}}\mu(x)=\sup_{x\in\mathbf{R}}(2Cr(\{\xi=x\}))\wedge 1=2\sup_{x\in\mathbf{R}}(Cr(\{\xi=x\}))=1.$$

反过来,设 $\sup\mu(x)=1$. $\forall x\in\mathbf{R}$,我们定义

$$Cr(\{x\})=\frac{1}{2}\Big(\mu(x)+1-\sup_{y\neq x}\mu(y)\Big)$$

很显然

$$\sup_{x\in\mathbf{R}} Cr(\{x\}) \geqslant \frac{1}{2}(1+1-1)=0.5$$

对所有满足 $Cr(\{x^*\})\geqslant 0.5$ 的 $x^*\in\mathbf{R}$，我们有 $\mu(x^*)=1$，并且

$$\begin{aligned}
&Cr(\{x^*\})+\sup_{y\neq x^*} Cr(\{y\})\\
&=\frac{1}{2}\Big(\mu(x^*)+\sup_{y\neq x^*}\mu(y)\Big)+\sup_{y\neq x^*}\frac{1}{2}\Big(\mu(y)+1-\sup_{z\neq y}\mu(z)\Big)\\
&=1-\frac{1}{2}\sup_{y\neq x^*}\mu(y)+\frac{1}{2}\sup_{y\neq x^*}\mu(y)=1
\end{aligned}$$

于是 $Cr(\{x\})$ 满足可信性扩张条件，并且通过可信性扩张定理 $Cr(\{x\})$ 可以唯一扩张到 $\mathscr{P}(\mathbf{R})$上的可信性测度. 我们定义一个恒等 Fuzzy 变量 $\xi:(\mathbf{R},\mathscr{P}(\mathbf{R}),Cr)\to\mathbf{R}$. 于是 Fuzzy 变量 ξ 的隶属函数是

$$2Cr(\{\xi=x\})=\Big(\mu(x)+1-\sup_{y\neq x}\mu(y)\Big)\wedge 1=\mu(x),\ \forall x\in\mathbf{R}$$

定理得证. □

关于可信性分布、期望、方差等这里一一省略. 可以参阅刘宝碇的专著(Liu,2007). 关于可信性测度上的 Fuzzy 积分可以参阅文献(Hu, Ip, Wong, 2009.).

15.2.3 不确定性测度

刘宝碇将研究的对象由最大 σ-代数 $\mathscr{P}(\Theta)$ 推广到了一般 σ-代数，引入了满足正规性、单调性、自对偶性和可列次可加性公理的不确定性测度，建立了不确定理论(Liu,2007).

设 Θ 是非空集，$\mathscr{A}$ 是 Θ 的 σ-代数. $\mathscr{A}$ 中每一元素称为一个事件.

定义 15.2.5 (Liu, 2007) 映射 $Un:\mathscr{A}\to[0,1]$ 称为 Θ 上的不确定性测度(uncertain measure)，如果 Un 满足下面四条公理：

公理 UN1. (正规性) $Un(\Theta)=1$.

公理 UN2. (单调性) $Un(A)\leqslant Un(B)$，当 $A\subseteq B$.

公理 UN3. (自对偶性) $Un(A)+Un(A^c)=1$，对任意事件 A.

公理 UN4. (次可列可加性) 对任意的可列事件族 $\{A_i\}$，有

$$Un\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\Big)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}Un(A_i) \tag{15.2.9}$$

例 15.2.11 设 $\Theta=\{\theta_1,\theta_2,\theta_3\}$. 对于 $\mathscr{A}=\mathscr{P}(\Theta)$，我们定义

$$Un(\{\theta_1\})=0.6,\quad Un(\{\theta_2\})=0.3,\quad Un(\{\theta_3\})=0.2$$

$$Un(\{\theta_1,\theta_2\})=0.8,\quad Un(\{\theta_1,\theta_3\})=0.7,\quad Un(\{\theta_2,\theta_3\})=0.4$$

$$Un(\varnothing)=0,\quad Un(\Theta)=1.$$

容易验证 Un 满足四条公理 UN1～UN4，那么 Un 是一个不确定性测度. 但 Un 不满足公理 CR 4，即 Un 不是可信性测度. □

例 15.2.12 在例 15.2.2 中当 $\Theta=\{\theta_1,\theta_2,\cdots\}$ 时 Cr 是可信性测度，但 Cr 不是不确定性测度. □

例 15.2.13 $\mathscr{A}\subseteq\mathscr{P}(\Theta)$ 上的 Dirac 测度(见定义 12.2.2)是 $\mathscr{A}$ 上的不确定性测度. □

类似定理 15.2.1 可证.

定理 15.2.11 设 Un 是 $\mathscr{A}$ 上的一个不确定性测度，则 $Un(\varnothing)=0$，并且对任意 $A\in\mathscr{A}$，$0\leqslant Un(A)\leqslant 1$.

定理 15.2.12 设 Un 是 $\mathscr{A}$ 上的一个不确定性测度，则对任意 $A,B\in\mathscr{A}$

$$Un(A_1)\vee Un(A_2)\leqslant Un(A_1\cup A_2)\leqslant Un(A_1)+Un(A_2)\tag{15.2.10}$$

定理 15.2.13 设 Un 是 $\mathscr{A}$ 上的一个不确定性测度，则对任意 $A,B\in\mathscr{A}$

$$Un(A_1)+Un(A_2)-1\leqslant Un(A_1\cap A_2)\leqslant Un(A_1)\wedge Un(A_2)\tag{15.2.11}$$

证明 右边不等式由单调性公理直接得到. 左边不等式由自对偶性和可列次可加性公理得到，即

$$\begin{aligned}Un(A_1\cap A_2)&=1-Un((A_1\cap A_2)^c)=1-Un(A_1^c\cup A_2^c)\\&\geqslant 1-(Un(A_1^c)+Un(A_2^c))\\&=1-(1-Un(A_1))-(1-Un(A_2))\end{aligned}$$

不等式得证. □

定理 15.2.14 设 $\mathscr{A}$ 是 $\Theta=\{\theta_1,\theta_2,\cdots\}$ 的 σ-代数，并且 $\{\theta_i\}\in\mathscr{A}$，$Un$ 是 $\mathscr{A}$ 的一个不确定性测度，则对任意不相等的 i 和 j

$$Un(\{\theta_i\})+Un(\{\theta_j\})\leqslant 1\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}Un(\{\theta_k\})\tag{15.2.12}$$

证明 由单调性和自对偶性，对任意不相等的 i 和 j，我们有

$$Un(\{\theta_i\})+Un(\{\theta_j\})\leqslant Un(\Theta-\{\theta_j\})+Un(\{\theta_j\})=1.$$

又因 $\Theta=\{\theta_1,\theta_2,\cdots\}$，并且 $\{\theta_i\}\in\mathscr{A}$，由次可列可加性，我们得到

$$1=Un(\Theta)=Un\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty}\{\theta_k\}\Big)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}Un(\{\theta_k\}).$$ □

定理 15.2.15 设对于 $\mathscr{A}$ 中的序列 $\{A_i\}$，$\lim\limits_{i\to\infty}Un(A_i)=0$，则对于任意

$A_i \in \mathscr{A}$

$$\lim_{i\to\infty} Un(A \cup A_i) = \lim_{i\to\infty} Un(A\backslash A_i) = Un(A) \qquad (15.2.13)$$

证明 由单调性和次可加性公理可得

$$Un(A) \leqslant Un(A \cup A_i) \leqslant Un(A) + Un(A_i)$$

因 $\lim_{i\to\infty} Un(A_i) = 0$，所以 $\lim_{i\to\infty} Un(A \cup A_i) = Un(A)$. 又由 $A\backslash A_i \subseteq A \subseteq (A\backslash A_i) \cup A_i$，我们有

$$Un(A\backslash A_i) \leqslant Un(A) \leqslant Un(A\backslash A_i) + Un(A_i)$$

再由 $\lim_{i\to\infty} Un(A_i) = 0$，可得 $\lim_{i\to\infty} Un(A\backslash A_i) = Un(A)$. □

定理 15.2.16 对于 $\mathscr{A}$ 中的序列 $\{A_i\}$，我们有

(1)如果 $A_i \nearrow \Theta$，则 $\lim_{i\to\infty} Un(A_i) > 0$；

(2)如果 $A_i \searrow \varnothing$，则 $\lim_{i\to\infty} Un(A_i) < 1$.

证明 (1) 设 $A_i \nearrow \Theta$，因 $\Theta = \bigcup_{i\in \mathbf{N}} A_i$，由次可列可加性公理可得

$$1 = Un(\Theta) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} Un(A_i)$$

因 $Un(A_i)$ 对于 i 递增，所以 $\lim_{i\to\infty} Un(A_i) > 0$.

(2) 如果 $A_i \searrow \varnothing$，则 $A_i^c \nearrow \Theta$. 由(1) $\lim_{i\to\infty} Un(A_i^c) > 0$. 于是由对偶性公理我们有

$$\lim_{i\to\infty} Un(A_i) = 1 - \lim_{i\to\infty} Un(A_i).$$ □

定义 15.2.6 设 Θ 是一个非空集，$\mathscr{A}$ 是 Θ 上的 σ-代数，Un 是一个不确定性测度. 则三元组 $(\Theta, \mathscr{A}, Un)$ 称为不确定性空间(uncertainty space).

关于不确定性变量、不确定性分布、独立性等这里省略. 可以参阅刘宝碇的专著(Liu, 2007).

本章主要简介了粗糙集理论、可信性理论和不确定理论. 对于粗糙集有三个最基本的组成要素论域 X、关系 R 和近似对象 A. 理论的推广主要是从三方面入手：一是被近似对象 A 可以换成非经典集合(non-crisp sets)，比如 Fuzzy 集、区间值 Fuzzy 集、L-Fuzzy 集；二是等价关系 R 可以换成相似关系(满足自反性和对称性)、自反关系(满足自反性)、任意的一般关系 $R \in \mathscr{P}(X\times X)$、Fuzzy 关系 $R \in \mathscr{F}(X\times X)$、区间值 Fuzzy 关系 $R \in \mathscr{F}_I(X\times X)$、$L$-Fuzzy 关系 $R \in \mathscr{F}_L(X\times X)$；三是一个论域 X 变为两个论域 X、Y，即把 $X\times X$ 上的关系推广到 $X\times Y$ 上的关系. 详细研究可以查阅相关文献(Coker, 1998; Dubois and Prade,

1990；胡宝清，黄正华，2005；Gong，Sun，Chen，2008；Hu，Xian，2006；Kondo，2006；Liu，2008；Liu，Hu，2006；Liu，Zhu，2008；Mi & Zhang，2004；She，Wang，2009；Sun，Gong，Chen，2008；Wu，Mi & Zhang，2003；Wu and Zhang，2004；Yao，1998a，b；Zhang，Zhang，Wu，2009）. 对于可信性测度和不确定性测度是处理模糊不确定性问题的一种尝试，详细研究可以参阅刘宝碇专著（Liu，2007）.

附录I 符号说明

符号	说明
$\in$	属于
$\overline{\in}$	不属于
$\forall$	对任意给定的
$\exists$	至少存在一个
$\triangleq$	定义,记为
$\approx$	近似等于
$=$	相等或同构
$\sim$	等价关系
$\Rightarrow$	蕴涵或推出
$\Leftrightarrow$	等价或充分必要
$\mathbf{R}$	实数集
$\mathbf{R}^+$	非负实数集
$\mathbf{N}$	自然数集 $\{1,2,\cdots\}$
$\mathbf{Q}$	有理数集
$\mathbf{Z}$	整数集
$\mathbf{Q}_{[0,1]}$	$[0,1]$上的有理数集
$I_{\mathbf{R}}$	$\mathbf{R}$ 上的区间数集
$I_{[0,1]}$	$[0,1]$上的区间数集
$\widetilde{\mathbf{R}}$	Fuzzy 数集
$\widetilde{\mathbf{R}}^+$	正 Fuzzy 数集
$\widetilde{\mathbf{R}}^-$	负 Fuzzy 数集
$\widetilde{\mathbf{R}}_{LR}$	LR 型 Fuzzy 数集
$\widetilde{\mathbf{R}}_L$	对称 Fuzzy 数集
$\widetilde{[0,1]}$	Fuzzy 值集
T、Λ	指标集
X,Y,Z,U,V,W	论域
$\chi_A(x)$	经典集 A 的特征函数
$A(x)$	Fuzzy 集 A 的隶属函数
$\mathscr{P}(X)$	X 的幂集
$\mathscr{F}(X)$	X 上的全体 Fuzzy 集
$\mathscr{F}_I(X)$	X 上的全体区间型 Fuzzy 集
$\mathscr{N}(X)$	X 上的集合套集
$\mathscr{F}(X\times Y)$	X 到 Y 的 Fuzzy 关系集
$\mathscr{U}_n$	n 元 Fuzzy 综合函数集
$\mathscr{U}_p$	一些命题的集合
$\mathscr{F}_p$	一些 Fuzzy 命题的集合
$\mathscr{D}(c)$	硬 c-划分集
$\mathscr{D}_f(c)$	Fuzzy c-划分集
$[0,1]^{m\times n}$	$m\times n$ 阶 Fuzzy 矩阵集
$I_{[0,1]}^{m\times n}$	$m\times n$ 阶区间值 Fuzzy 矩阵集
$L^{m\times n}$	$m\times n$ 阶格值 Fuzzy 矩阵集
A_α	Fuzzy 集 A 的 α 截集
$A_{\bar{\alpha}}$	Fuzzy 集 A 的强 α 截集
$[\underline{a},\overline{a}]$	区间数
$[\underline{A},\overline{A}]$	区间 Fuzzy 集
$[A^-,A^+]$	区间 Fuzzy 集
$A\subseteq B$	A 被 B 包含或 B 包含 A
$A\subset B$	A 被 B 真包含或 B 真包

符号	含义
	含 A
$A \cup B$	A 与 B 的并集
$A \cap B$	A 与 B 的交集
$A \cup_{\perp} B$	A 与 B 的模并集
$A \cap_{\top} B$	A 与 B 的模交集
A^c	A 的补集
$A \backslash B$	A 与 B 的差集
$A \Delta B$	A 与 B 的对称差集
$\prod_{i=1}^{n}, \times$	在四则运算中表示乘积，在集合运算中表示直积或笛卡儿积
$\vee$	逻辑和或上确界
$\wedge$	逻辑积或下确界
$\tilde{\vee}$	扩张极大运算或 MAX
$\tilde{\wedge}$	扩张极小运算或 MIN
$\neg$	否定
$\top$	t-模
$\perp$	t-余模
$\tilde{\top}$	算子 $\top$ 的扩张运算
$\hat{+}$	代数和
$\hat{\cdot}$	代数积
$\oplus$	有界和
$\odot$	有界积
$\circ$	Fuzzy 集的内积或 Fuzzy 关系的最大-最小复合
$\hat{\circ}$	Fuzzy 集的外积或 Fuzzy 关系的最小-最大复合
$\circ_{\top}$	Fuzzy 关系的最大- $\top$ 复合
$\hat{\circ}_{\perp}$	Fuzzy 关系的最小- $\perp$ 复合
	Fuzzy 关系的最大-乘积复合
$\alpha_{\top}$	$\alpha_{\top}$ 算子或 Fuzzy 关系的最小- $\alpha_{\top}$ 复合
(a)	Fuzzy 判断句
$\mathscr{A}$	σ-代数
$\mathscr{A}_F$	Fuzzy σ-代数
μ, m	Fuzzy 测度
Cr	可信性测度
Un	不确定性测度
$\mathscr{X}$	最大-最小（$\vee - \wedge$）型关系方程的解集
$\mathscr{X}.$	最大-乘积型（$\vee - \cdot$）关系方程的解集
$N(a)$	a 的伪补
$\sigma(*)$	Fuzzy 算子 $*$ 的清晰域
$d(A)$	Fuzzy 集 A 的 Fuzzy 度
$N(A,B)$	Fuzzy 集 A 与 B 的贴近度
supp$A$	Fuzzy 集 A 的支集
ker$A$	Fuzzy 集 A 的核
$ht(A)$	Fuzzy 集 A 的峰值
$lt(A)$	Fuzzy 集 A 的谷值
$\underline{R}A$	A 关于 R 的下近似
$\overline{R}A$	A 关于 R 的上近似
$\mathrm{bn}_R(A)$	A 的 R 边界
$\mathrm{pos}_R(A)$	A 的 R 正域
$\mathrm{neg}_R(A)$	A 的 R 负域
$\vee \varnothing = 0$	空集的上确界为 0
$\wedge \varnothing = 1$	空集的下确解为 1
$\square$	证毕或例子结束

附录II 名称索引

六画

七画

八画

九画

十画

十一画

十二画

十三画以上

参考文献

[1] Abbasov, A. M., Mamedova, M. H., Orujov, G. H., Aliev, H. B., 2001. Synthesis of the Methods of Subjective Knowledge Representations in Problems of Fuzzy Pattern Recognition, Mechatronics 11, 439-449.

[2] Abo-Sinna, M. A., 2004. Multiple Objective (fuzzy) Dynamic Programming Problems: a Survey and Some Applications, Applied Mathematics and Computation 15, 861-888.

[3] Adamopoulos, G. L., Pappis, C. P., 1993. Some Results on the Resolution of Fuzzy Relation Equations, Fuzzy Sets and Systems 60, 83-88.

[4]Adillon, R., García-Cerdaña, A., Verdú, V., 2007. On Three Implication-less Fragments of t-norm Based Fuzzy Logics, Fuzzy Sets and Systems 158, 2575-2590.

[5] Anderberg, M. R., 1973. Cluster Analysis for Applications, Academic Press, New York.

[6] Asveld, P. R. J., 2005. Fuzzy Context-free Languages—Part 1: Generalized Fuzzy Context-free Grammars, Theoretical Computer Science 347, 167-190.

[7] Atanassov, K. T., 1983. Intuitionistic Fuzzy Sets, in: V. Sequrev, Ed., VII ITKR's Session, Sofia (deposed in Central Sci. and Techn. Library, Bulg. Academy of Sciences, 1697/84) (in Bulgarian).

[8]Atanassov, K. T., 1986. Intuitionistic Fuzzy Sets Fuzzy Sets Systems 20, 87-96.

[9]Atanassov, K. T., 1989. More on Intuitionistic Fuzzy Sets. Fuzzy Sets Systems 33, 37-46.

[10] Atanassov, K. T., 1999. Intuitionistic Fuzzy Sets, Physica-Verlag, Heidelberg, New York.

[11] Atanassov, K. T., Gargov, G., 1989. Interval Valued Intuitionistic

Fuzzy Sets, Fuzzy Sets and Systems 31, 343-349.

[12] Atanassov, K. T. , Stoeva, S. , 1984. Intuitionistic L-fuzzy Sets, in: R. Trapple (Ed.), Cybernetics and Systems Research, Vol. 2, Elsevier, Amsterdam, 539-540.

[13] Baczynski, M. , Jayaram, B. , 2008. Fuzzy Implications, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

[14] Baets, B. D. , Janssens, S. , Meyer, H. D. , 2006. Meta-theorems on Inequalities for Scalar Fuzzy Set Cardinalities, Fuzzy Sets and Systems 157, 1463-1476.

[15] Baets, B. D. and Meyer, H. D. , 2003. On the Existence and Construction of T-transitive Closures, Information Sciences 152, 167-179.

[16] Baky, I. A. , 2009. Fuzzy Goal Programming Algorithm for Solving Decentralized bi-level Multi-objective Programming Problems, Fuzzy Sets and Systems 160, 2701-2713.

[17] Baldwin, J. F. , 1979. A New Approach to Approximate Reasoning Using a Fuzzy Logic, Fuzzy Sets and Systems 2, 309-325.

[18] Baldwin, J. F. , 1981. Fuzzy Logic and Fuzzy Reasoning, in: Mamdani E. H. and Gaines B. R. (Eds.), Fuzzy Reasoning and Its Applications, Academic Press, 133-148.

[19] Ban, A. I. and Gal, S. G. 2002. On the Defect of Additivity of Fuzzy Measures. Fuzzy Sets and Systems 127, 353-362.

[20] Ban, A. I. and Gal, S. G. 2002. On the Defect of Complementarity of Fuzzy Measures. Fuzzy Sets and Systems 131, 365-380.

[21] Bandemer, H. , 1987. From Fuzzy Data to Functional Relationships, Mathematical Modelling 9, 419-426.

[22] Bandemer, H. , Hartmann, S. , 1998. A Fuzzy Approach to Stability of Fuzzy Controllers, Fuzzy Sets and Systems 96, 161-172.

[23] Bellman, R. E. , and Zadeh, L. A. 1970. Decision-making in a Fuzzy Environment, Management Sci. 17, 141-164.

[24] Bellman, R. E. , and Giertz, M. , 1973. On the Analytic Formalism of the Theory of Fuzzy Sets, Information Sciences 5, 149-156.

[25] Benvenuti, P. , Mesiar, R. 2000. Integral with Respect to a General Fuzzy Measure, in: Grabisch, T. Murofushi, M. Sugeno (Eds.), Fuzzy

Measure and Integrals: Theory and Applications, Springer, Berlin, pp. 205-232.

[26] Bertoluzza, C., Cariolaro, D. 1997. On the Measure of a Fuzzy Set Based on Continuous t-conorms, Fuzzy Sets and Systems 88, 355-362.

[27] Bezdek, J. C., 1973. Fuzzy Mathematics in Pattern Recognition, Ph. D. Dissertation, Cornell University, Ithaca, New York.

[28] Bezdek, J. C., 1981. Pattern Recognition with Fuzzy Objective Function Algorithms. Plenum Press, New York.

[29] Bezdek, J. C., Pal, S. K., 1992. Fuzzy Models for Pattern Recognition. Methods that Search for Patterns in Data. IEEE Press, New York.

[30] Bhattacharya, P. 1987. Some Remarks on Fuzzy Graphs, Pattern Recognition Letters 6, 297-302.

[31] Bhutani, K. R., Rosenfeld, A., 2003. Strong Arcs in Fuzzy Graphs, Information Sciences 152, 319-322.

[32] Bigand, A., Colot, O., 2010. Fuzzy Filter Based on Interval-valued Fuzzy Sets for Image Filtering, Fuzzy Sets and Systems 161, 96-117.

[33] Blanco, A., Delgado, M., Requena, I., 1995a. Identification of Fuzzy Relational Equations by Fuzzy Neural Networks, Fuzzy Sets and Systems 71, 215-226.

[34] Blanco, A., Delgado, M., Requena, I., 1995b. Improved Fuzzy Neural Networks for Solving Relational Equations, Fuzzy Sets and Systems 72, 311-322.

[35] Blin,J. M., 1974. Fuzzy Relations in Group Decision Theory, Journal of Cybernetics 4, 17-22.

[36] Bodenhofer, U., and Klawonn, F., 2004. A Formal Study of Linearity Axioms for Fuzzy Orderings, Fuzzy Sets and Systems 145, 323-354.

[37] Boixader, D., 2003. On the Relationship Between T-transitivity and Approximate Equality, Fuzzy Sets and Systems 133, 161-169.

[38] Bourke, M., Fisher, D. G., 1995. Calculation and Application of a Minimum Fuzzy Relational Matrix, Fuzzy Sets and Systems 74, 225-236.

[39] Bourke, M., Fisher, D. G., 1998. Solution Algorithms for Fuzzy Relational Equations with Max-product Composition, Fuzzy Sets and Systems 94, 61-69.

[40] Bozdag, C. E., Kahraman, C., Ruan, D., 2003. Fuzzy Group Decision

Making for Selection Among Computer Integrated Manufacturing Systems, Computers in Industry 51, 13-29.

[41] Buckley, J. J., 1988. Possibilistic Linear Programming with Triangular Fuzzy Parameters (Short Communication), Fuzzy Sets and Systems 26, 135-138.

[42] Buckley, J. J., 1989. Solving Possibilistic Linear Programming Problems, Fuzzy Sets and Systems 31, 329-341.

[43] Buckley, J. J., 1992a. Theory of the Fuzzy Controller: An Introduction, Fuzzy Sets and Systems 51, 249-258.

[44] Buckley, J. J., 1992b. Nonlinear Fuzzy Controller, Information Science, 60, 261-274.

[45] Buckley, J. J., Eslami, E., Hayashi, Y., 1997. Solving Fuzzy Equations Using Neural Nets, Fuzzy Sets and Systems 86, 271-278.

[46] Burillo, P., Bustince, H., 1996. Entropy on Intuitionistic Fuzzy Sets and on Interval-valued Fuzzy Sets, Fuzzy Sets and Systems 78, 305-316.

[47] Bustince, H., Barrenechea, E., Pagola, M., Fernandez, J., 2009. Interval-valued Fuzzy Sets Constructed from Matrices: Application to Ege Detection, Fuzzy Sets and Systems 160, 1819-1840.

[48] Bustince, H., Burillo P., 1996a. Vague Sets Are Intuitionistic Fuzzy Sets, Fuzzy Sets and Systems 79, 403-405.

[49] Bustince, H., Burillo P., 1996b. Structures on Intuitionistic Fuzzy Relations, Fuzzy Sets and Systems 78, 293-303.

[50] Butanriu, D. 1983. Additive Fuzzy Measures and Integrals. J. Math. Anal. Appl. 93, 436-452.

[51] Carlsson, C. and Fullèr, R., 2003. A Fuzzy Approach to Real Optical Valuation, Fuzzy Sets and Systems 139, 297-312.

[52] Casasnovas, J., Torrens, J., 2003. An Axiomatic Approach to Fuzzy Cardinalities of Finite Fuzzy Sets, Fuzzy Sets and Systems 133, 193-209.

[53] Castro, J. L., Delgado, M., Mantas, C. J., 2001. A New Approach for the Execution and Adjustment of a Fuzzy Algorithm, Fuzzy Sets and Systems 121, 491-530.

[54] Chakraborty, M. K., Das, M., 1983. Studies in Fuzzy Relations Over Fuzzy Subsets, Fuzzy Sets and Systems 9, 79-89.

[55] Chameau, J. L., Santamarina, J. C., 1987. Membership Functions I:

Comparing Methods of Measurement, International Journal of Approximate Reasoning 1, 287-301.

[56] Chanas, S. and Kuchta, D., 1996a. Multiobjective Programming in Optimization of Interval Objective Functions—A Generalized Approach, European Journal of Operational Research 94, 594-598.

[57] Chanas, S. and Kuchta, D. 1996b. A Concept of the Optimal Solution of the Transportation Problem with Fuzzy Cost Coefficients. Fuzzy Sets and Systems 82, 299-305.

[58] Chang, N.-B., Chen, H. W., Ning, S., 2001. Identification of River Water Quality Using the Fuzzy Synthetic Evaluation Approach, Journal of Environmental Management 63, 293-305.

[59] Chang, P.-T., 1997. Fuzzy Seasonality Forecasting, Fuzzy Sets and Systems 90, 1-10.

[60] Chang, P.-T., Huang, L.-C., Lin, H.-J., 2000. The Fuzzy Delphi Method via Fuzzy Statistics and Membership Function Fitting and an Application to the Human Resources, Fuzzy Sets and Systems 112, 511-520.

[61] Chang, P.-T., Lee, E. S., Konz, S. A., 1996. Applying Fuzzy Linear Regression to VDT Legibility, Fuzzy Sets and System 80, 197-204.

[62] Chatterji, B. N., 1982. Character Recognition Using Fuzzy Similarity Relations, in M. M. Gupta and E. Sanchez (Eds.), Approximate Reasoning in Decision Analysis, 131-137.

[63] Chen, J. E., Otto, K. N., 1995. Constructing Membership Functions Using Interpolation and Measurement Theory, Fuzzy Sets and Systems 73, 313-327.

[64] Chen, L.-H. and Lu, H.-W., 2001. An Approximate Approach for Ranking Fuzzy Numbers Based on Left and Right Dominance, Computers and Mathematics with applications 41, 1589-1602.

[65] Chen, L.-H. and Lu, H.-W., 2002. The Preference Order of Fuzzy Numbers, Computers and Mathematics with applications 44, 1455-1465.

[66] Chen, Q. and Kawase, S., 1999. On Operations and Order Relations between Fuzzy Values, Fuzzy Sets and Systems 108, 313-324.

[67] Chen, S. J, Chen, S. M., 2003. Fuzzy Risk Analysis Based on Similarity Measures of Generalized Fuzzy Numbers, IEEE Transactions on Fuzzy

Systems 11, 45-56.

[68] Chen, S. M., 1994. A weighted Fuzzy Reasoning Algorithm for Medical Diagnosis, Decision Support Systems 11, 37-43.

[69] Chen, S.-M., 1996. Forecasting Enrollments Based on Fuzzy Time Series, Fuzzy Sets and Systems 81, 311-319.

[70] Chen, S. M., Hwang, J. R., 2000. Temperature Prediction Using Fuzzy Time Series, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics—Part B: Cybernetics 30, 263-275.

[71] Chen, T., Wang, M. J. J., 1999. Forecasting Methods Using Fuzzy Concepts, Fuzzy Sets and Systems 105, 339-352.

[72] Chen, W., Yang, J.-C., Lin, Z.-Q., 2002. Application of Integrated Formability Analysis in Designing Die-face of Automobile Panel Drawing Dies, Journal of Materials Processing Technology 121, 293-300.

[73] Chen, Y.-W., Chang, H.-L., Tzeng, G.-H. 2002. Using Fuzzy Measures and Habitual Domains to Analyze the Public Attitude and Apply to the Gas Taxi Policy. European Journal of Operational Research 137, 145-161.

[74] Chen, Y.-W., Tzeng, G.-H. 2001. Using Fuzzy Integral for Evaluating Subjectively Perceived Travel Costs in a Traffic Assignment Model. European Journal of operational Research 130, 653-664.

[75] Cheng, C. H., Chang, J. R., Yeh, C. A., 2006. Entropy-based and Trapezoid Fuzzification-based Fuzzy Time Series Approaches for Forecasting it Project Cost, Technological Forecasting and Social Change 73, 524-542.

[76] Cheng, L., Peng, B., 1988. The Fuzzy Relation Equation with Union or Intersection Preserving Operator, Fuzzy Sets and Systems 25, 191-204.

[77] Chuu, S.-J., 2009. Group Decision-making Model Using Fuzzy Multiple Attributes Analysis for the Evaluation of Advanced Manufacturing Technology, Fuzzy Sets and Systems 160, 586-602.

[78] Ćirić, M., Ignjatović, J., Bogdanović, S., 2007. Fuzzy Equivalence Relations and Their Equivalence Classes, Fuzzy Sets and Systems 158, 1295-1313.

[79] Ćirić, M., Ignjatović, J., Bogdanović, S., 2009. Uniform Fuzzy Relations and Fuzzy Functions, Fuzzy Sets and Systems 160, 1054-1081.

[80] Civanlar, M. R., Trussell, H. J., 1986. Construction Membership Functions Using Statistical Data, Fuzzy Sets and Systems 18, 1-13.

[81] Coker, D., 1998. Fuzzy Rough Sets Are Intuitionistic L-fuzzy Sets, Fuzzy Sets and Systems 96, 381-383.

[82] Coletti, G., Vantaggi, B., 2006. Possibility Theory: Conditional Independence, Fuzzy Sets and Systems 157, 1491-1513.

[83] Cornelis, C., Kerre, E. E., 2006. Advances and challenges in interval-valued fuzzy logic, Fuzzy Sets and Systems 157, 622-627.

[84] Cuninghame-Green, R. A., 1979. Minimax Algebra, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems Vol. 166, Springer, Berlin.

[85] Czogala, E., Drewnial, J. and Pedrycz, W., 1982. Fuzzy Relation Equations on a Finite Set, Fuzzy Sets and Systems 7, 89-102.

[86] Das, S. K., Goswami, A. and Alam, S. S., 1999. Multiobjective Transportation Problem With Intervals Cost, Source and Destination Parameters, European Journal of Operational Research 117, 100-112.

[87] Dave, R. N., 1992. Generalized Fuzzy c-shells Clustering and Detection of Circular and Elliptical Boundaries, Pattern Recognition 25, 713-721.

[88] De, S. K., Biswas, R., Roy, A. R., 2001. An Application of Intuitionistic Fuzzy Sets in Medical Diagnosis. Fuzzy Sets and Systems 117, 209-213.

[89] Delgado, M., Sanchez, D., et al., 2002. A Probabilistic Definition of a Nonconvex Fuzzy Cardinality, Fuzzy Sets and Systems 126, 177-190.

[90] Demirci, M., 1999. Genuine Sets, Fuzzy Sets and Systems 105, 377-384.

[91] Deng, J. L., 1989. Introduction to Grey System Theory, J. Grey System 1, 1-24.

[92] Deng, Y., Shi, W., Du F., Liu Q., 2004. A New Similarity Measure of Generalized Fuzzy Numbers and its Application to Pattern Recognition, Pattern Recognition Letters 25, 875-883.

[93] Deschrijver, G. and Kerre E. E., 2003a. On the Relationship Between Some Extensions of Fuzzy Set Theory, Fuzzy Sets and Systems 133, 227-235.

[94] Deschrijver, G., and Kerre, E. E., 2003b. On the Composition of Intuitionistic Fuzzy Relations, Fuzzy Sets and Systems 136, 333-361.

[95] Dombi, J., 1990. Membership Function as an Evaluation, Fuzzy Sets and Systems 35, 1-21.

[96] Dubes, R. C., Jain, A. K., 1988. Algorithms for Clustering Data. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.

[97] Dubois, D., 2006. Possibility Theory and Statistical Reasoning, Computational Statistics & Data Analysis 51, 47-69.

[98] Dubois, D., Godo, R., de Mantaras, Prade, H., 1993. Qualitative Reasoning with Imprecise Probabilities, J. Intelligent Inform. Systems, 2, 319-363.

[99] Dubois, D., Ostasiewicz, W., Prade, H., 2000. Fuzzy Sets: History and Basic Notions, in: Dubois D., Prade, H. (Eds.), Fundamentals of Fuzzy Sets, Kluwer Academic Publishers, dordrecht, 80-93.

[100] Dubois, D., and Prade, H., 1980. Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications, New York, London, Toronto.

[101] Dubois, D., and Prade, H., 1981. Towards Fuzzy Differential Calculus, Part 1: Integration of Fuzzy Mapping, Fuzzy Sets and Systems 8, 1-17.

[102] Dubois, D., and Prade, H., 1982. A Class of Fuzzy Measures Based on Triangular Norms, Int. J. Gen. Syst. 8, 43-61.

[103] Dubois, D., and Prade, H., 1983. Ranking Fuzzy Numbers in the Setting of Possibility Theory, Information Sciences 30, 183-224.

[104] Dubois, D., and Prade, H., 1985. Fuzzy Cardinality and the Modeling of Imprecise Quantification, Fuzzy Sets and Systems 16, 199-230.

[105] Dubois, D., and Prade, H., 1988a. On Fuzzy Syllogisms, Comput. Intelligence, 4, 171-179.

[106] Dubois, D. and Prade, H. 1988b. Possibility Theory. Plenum Press, New York.

[107] Dubois, D. and Prade, H. 1990. Rough fuzzy sets and fuzzy rough sets, International Journal of General System 17, 191-208.

[108] Dubois, D., and Prade, H., 1991. Random Sets and Fuzzy Interval Analysis, Fuzzy Sets and Systems 42, 87-101.

[109] Dubois, D., and Prade, H., 1997. A Synthetic View of Belief Revision

with Uncertain Inputs in the Framework of Possibility Theory, International Journal of Approximate Reasoning 17, 295-324.

[110] Dubois, D., and Prade, H., 2009. An Overview of the Asymmetric Bipolar Representation of Positive and Negative Information in Possibility Theory, Fuzzy Sets and Systems 160, 1355-1366.

[111] Dubois, D., Prade, H., Sabbadin, R., 2001. Decision-theoretic Foundations of Qualitative Possibility Theory, European Journal of Operational Research 128, 459-478.

[112] Dubois, D., Prade, H., Toucas, J.-M., 1990. Inference with Imprecise Numerical Quantifiers, in: Z. Ras et al. (Eds.). Intelligent Systems: State of the Arts and Future Directions, Ellis Horwood, Chichester, UK.

[113] Dunn, J. C., 1974. A Fuzzy Relative of the ISODATA Process and Its Use in Detecting Compact Well Separated Cluster, J. Cybernet 3, 32-57.

[114] El-Hadykassem, H. A., 1998. Stability of Possibilistic Multiobjective Nonlinear Programming Problems without Differentiability, Fuzzy Sets and Systems 94, 239-246.

[115] Entemann, C. W., 2000. A Fuzzy Logic with Interval Truth Values, Fuzzy Sets and System 113, 161-183.

[116] Esteva, F., Godo, L., Noguera, C., 2009. First-order t-norm Based Fuzzy Logics with Truth-constants: Distinguished Semantics and Completeness Properties, Annals of Pure and Applied Logic 161, 185-202.

[117] Falk, J. E., 1976. Exact Solution of Inexact Linear Programs, Operations Research 24, 783-787.

[118] Fan, Z.-T., 2000. On the Convergence of a Fuzzy Matrix in the Sense of Triangular Norms, Fuzzy Sets and Systems 109, 409-417.

[119] Fang, S.-C., Li, G., 1999. Solving Fuzzy Relation Equations with a Linear Objective Function, Fuzzy Sets and Systems 103, 107-113.

[120] Fodor, J. C., 1991. Strict Preference Relations Based on Weak t-norms, Fuzzy Sets and Systems 43, 327-336.

[121] Gao, L. S., 1999. The Fuzzy Arithmetic Mean, Fuzzy Sets and Systems 107, 335-348.

[122] Gasse, B. V. , Cornelis, C. , Deschrijver, G. , Kerre, E. E. , 2009. The Pseudo-linear Semantics of Interval-valued Fuzzy Logics, Information Sciences 179, 717-728.

[123] Gau, W. L. , Buehrer, D. J. , 1993. Vague Sets, IEEE Transactions. Systems Man and Cybernetics 23(2), 610-614.

[124] Gehrke, M. , Walker, C. L. , Walker, E. A. , 2003. Normal Forms and Truth Tables for Fuzzy Logics, Fuzzy Sets and Systems 138, 25-51.

[125] Gerla, G. , 1991. Fuzzy Grammars and Recursively Enumerable Fuzzy Languages, Information Science 53.

[126] Ghosh, A. , Pal (Eds.), S. K. , 2003. Soft Computing Approach to Pattern Recognition and Image Processing, World Scientific, Singapore.

[127] Giang, P. H. , Shenoy, P. P. , 2005. Two Axiomatic Approaches to Decision Making Using Possibility Theory, European Journal of Operational Research 162, 450-467.

[128] Giles, R. , 1976. Lukasiewicz Logic and Fuzzy Theory, Int. J. Man-Mach. Stud. 8, 313-327.

[129] Goguen, J. A. , 1967. L-fuzzy Sets, Journal of Mathematical Analysis and Applications 18, 145-174.

[130] Goguen, J. A. , 1969. The Logic of Inexact Concepts, Synthese 19, 325-373.

[131] Gong, Z. , Sun, B. , Chen, D. , 2008. Rough Set Theory for the Interval-valued Fuzzy Information Systems, Information Sciences 178, 1968-1985.

[132] Gonzálen, L. and Martín, A. , 1995. Extension of Fuzzy Relation, Fuzzy Sets and Systems 69, 157-169.

[133] Gonzálen, L. and Martín, A. , 1996. Level-based Extension of Relations, Fuzzy Sets and Systems 84, 85-96.

[134] Gonzálen, L. and Martín, A. , 1997. Weak Properties and Aggregated Extension of Fuzzy Relation, Fuzzy Sets and Systems 85, 311-318.

[135] Gorjanac-Ranitović, M. , Tepavčević, A. , 2007. General Form of Lattice-valued Fuzzy Sets under the Cutworthy Approach, Fuzzy Sets and Systems 158, 1213-1216.

[136] Gorzalczany, M. B. , 1987. A Method of Inference in Approximate Reasoning Based on Interval Valued Fuzzy Sets, Fuzzy Sets and Systems

21, 1-17.

[137] Gottwald, S., 1993. Fuzzy Sets and Fuzzy Logic, Vieweg Verlag, Braunschweig -Wiesbaden-Toulouse.

[138] Gottwald, S., 1994. Approximately Solving Fuzzy Relation Equations: Some Mathematical Results and Some Heuristic Proposals, Fuzzy Sets and Systems 66, 175-193.

[139] Gottwald, S., 1995. Approximate Solutions of Fuzzy Relational Equations and a Characterization of t-norms that Define Metrics for Fuzzy Sets, Fuzzy Sets and Systems 75, 189-201.

[140] Grabisch, M. 1993. On the Use of Fuzzy Integral as a Fuzzy Connective. Proc. 2nd IEEE Congr. On Fuzzy Systems, San Francisco, USA, 213-218.

[141] Grabisch, M. 1997. Fuzzy Measures and Integrals for Decision Making and Pattern Recognition, Tatra Mountains Math. Publ. 13. 7-34.

[142] Guo, C., Zhang, D., Wu, C. 1998. Fuzzy-valued Fuzzy Measures and Generalized Fuzzy Integrals, Fuzzy Sets and Systems 97, 255-260.

[143] Guo, S. Z., Wang, P. Z., Di Nola, A., Sessa, S., 1988. Further Contributions to the Study of Finite Fuzzy Relation Equations, Fuzzy Sets and Systems 26, 93-104.

[144] Guo, X., 2009. Grammar Theory Based on Lattice-ordered Monoid, Fuzzy Sets and Systems 160, 1152-1161.

[145] Gupta, M. M., Qi, J., 1991a. Theory of T-norms and Fuzzy Inference, Fuzzy Sets and Systems 40, 431-450.

[146] Gupta, M. M., Qi, J., 1991b. Design of Fuzzy Logic Controllers Based on Generalized T-operators, Fuzzy Sets and Systems 40, 473-489.

[147] Guu, S.-M., Wu, Y.-K., 2010. Minimizing a Linear Objective Function under a Max-t-norm Fuzzy Relational Equation Constraint, Fuzzy Sets and Systems 161, 285-297.

[148] Hamacher, H., 1978. Uber Logische Aggregationen Nicht-binar Expliziter Entschei Dungskriterien, Frankfurt/Main.

[149] Hathaway, R. J., Bezdek, J. C., Hu, Y., 2000. Generalized Fuzzy C-means Clustering Strategies Using *Lp* Norm Distances, IEEE Trans. Fuzzy Systems 8, 576-582.

[150] Heshmaty, B., Kandel, A., 1985. Fuzzy Linear Regression and Its

Applications to Forecasting in Uncertain Environment, Fuzzy Sets and Systems 15, 159-526.

[151] Higashi, M., and Klir, G. J., 1984. Resolution of Finite Fuzzy Relation Equation, Fuzzy Sets and Systems 13, 65-82.

[152] Hirota, K., 1977. Concepts of Probabilistic Sets, IEEE Conf. on Decision and Control (New Orleans), 1361-1366.

[153] Hirota, K., 1981. Concepts of Probabilistic Sets, Fuzzy Sets and Systems 5, 31-46.

[154] Hong, D. H., 2005. A Note on Fuzzy Time-series Model, Fuzzy Sets and Systems 155, 309-316.

[155] Hong, D. H., Hwang, C., Ahn, C., 2004. Ridge Estimation for Regression Models with Crisp Inputs and Gaussian Fuzzy Output, Fuzzy Sets and Systems 142, 307-319.

[156] Hong, D. H., Hwang, S. Y., 1994. On the Compositional Rule of Inference Under Triangular Norms, Fuzzy Sets and Systems 66, 25-38.

[157] Hoppner, F., 1997. Fuzzy Shell Clustering in Image Processing—Fuzzy C-rectangular and Two Rectangular Shells, IEEE Trans. Fuzzy Systems 5, 599-613.

[158] Hoppner, F., Klawonn, F., Kruse, R., Runkler, T., 1999. Fuzzy Cluster Analysis—Methods for Image Recognition, Wiley, New York.

[159] Hsu Y.-L., Lee C.-H., Kreng V. B., 2010. The Application of Fuzzy Delphi Method and Fuzzy AHP in Lubricant Regenerative Technology Selection, Expert Systems with Applications 37, 419-425.

[160] Hsu, Y. Y., Tse, S. M., Wu, B. 2003. A New Approach of Bivariate Fuzzy Time Series Analysis to the Forecasting of a Stock Index, International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems 11, 671-690.

[161] Hsueh, Y.-C., 1993. Extended Lattice-ordered Structures for L-fuzzy Sets and L-fuzzy Numbers, Fuzzy Sets and Systems 54, 81-90.

[162] Hu, B. Q. and Huang, Z. H., 2009. ($\perp$, $\top$)-Generalized Fuzzy Rough Sets Based on Fuzzy Composition Operations, B.-y. Cao, C.-y. Zhang, and T.-f. Li (Eds.): Fuzzy Info. and Engineering, ASC 54, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 647-659.

[163] Hu, B. Q., Ip, W. C., Wong, H., 2009. Fuzzy Integral on

Credibility Measure, B. Cao, T.-F. Li, C.-Y. Zhang (Eds.): Fuzzy Information and Engineering, Volume 2, Advances in Intelligent and Soft Computing 62, 253-261. Springerlink. com © Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

[164] Hu, B. Q. and Wang, S., 2006a. A Novel Approach in Uncertain Programming Part I: New Arithmetic and Order Relations for Interval Numbers, Journal of Industrial and Management Optimization 2, 351-371.

[165] Hu, B. Q. and Wang, S., 2006b. A novel Approach in Uncertain Programming Part II: A Class of Constrained Nonlinear Programming Problems with Interval Objective Functions, Journal of Industrial and Management Optimization 2, 373-385.

[166] Hu, B. Q. and Xia, J., 1995. Interval-valued Fuzzy Number and Its Operations, Pro. of Systems Control Information Methodologies & Applications, Huazhong University of Science and Technology Press, China, Wuhan: 284-287.

[167] Hu, B. Q. and Xian, Y. X., 2006. Level characteristics of generalized rough fuzzy sets and generalized fuzzy rough sets, 模糊系统与数学, 20 (6), 108-114.

[168] Hu, B. Q. and Zhang, Z. H., 1995. Generalized Interval Numbers and Operations. Pro. of Int. Con. On Information & Knowledge Engineering, Dalian Maritime University Publishing House, China, Dalian: 1156-1159.

[169] Huang, K., 2001a. Heuristic Models of Fuzzy Time Series for Forecasting, Fuzzy Sets and Systems 123, 369-386.

[170] Huang, K., 2001b. Effective Lengths of Intervals to Improve Forecasting in Fuzzy Time Series, Fuzzy Sets and Systems 123, 387-394.

[171] Huarng, K., Yu, H. K., 2005. A Type 2 Fuzzy Time Series Model for Stock Index Forecasting, Physica A 353, 445-462.

[172] Huarng, K., Yu, T. H.-K., 2006a. The Application of Neural Networks to Forecast Fuzzy Time Series, Physica A 363, 481-491.

[173] Huarng, K., Yu, T. H. K., 2006b. Ratio-based Lengths of Intervals to Improve Fuzzy Time Series Forecasting, IEEE Transactions on

Systems, Man, and Cybernetics—Part B: Cybernetics 36, 328-340.

[174] Hulsurkar, S., Biswal, M. P., and Sinha, S. B., 1997. Fuzzy Programming Approach to Multi-objective Stochastic Linear Programming Problem, Fuzzy Sets and Systems 88, 173-181.

[175] Hung W.-L., Yang M.-S., 2004. Similarity Measures of Intuitionistic Fuzzy Sets based on Hausdorff Distance, Pattern Recognition Letters 25, 1603-1611.

[176] Hwang, J.-R., Chen, S.-M., Lee, C.-H., 1998. Handling Forecasting Problems Using Fuzzy Time Series, Fuzzy Sets and Systems 100, 217-228.

[177] Hyung, L. K., Song, Y. S., Lee, K. M., 1994. Similarity Measure between Fuzzy Sets and Between Elements. Fuzzy Sets and System 62, 291-293.

[178] Imai, H., Kikuchi, K., Miyakoshi, M., 1998. Unattainable Solutions of a Fuzzy Relation Equation, Fuzzy Sets and Systems 99, 193-196.

[179] Imai, H., Miyakoshi, M., Da-te, T., 1997. Some Properties of Minimal Solutions for a Fuzzy Relation Equation, Fuzzy Sets and Systems 90, 335-340.

[180] Imai, H., Okahara, Y., Miyakoshi, M., 2000. The Period of Powers of a Fuzzy Matrix, Fuzzy Sets and Systems 109, 405-408.

[181] Irion, A., 1998. Fuzzy Rules and Fuzzy Functions: A Combination of Logic and Arithmetic Operations for Fuzzy Numbers, Fuzzy Sets and Systems 99, 49-56.

[182] Ishibuchi, H. and Tanaka, H., 1990. Multiobjective Programming in Optimization of the Interval Objective Function, European Journal of Operational Research 48, 219-225.

[183] Ishii, K. and Sugeno, M. 1985. A Model of Human Evaluation Process Using Fuzzy Measures, Proc. IEEE 66, 1619-1639.

[184] Iwamoto, S. 2001. A Class of Dual Fuzzy Dynamic Programs, Applied Mathematics and Computation 120, 91-108.

[185] Jacas, J., and Recasens, J., 1995. Fuzzy T-transitive Relations: Eigenvectors and Generators, Fuzzy Sets and Systems 72, 147-154.

[186] Jain, R., 1976. Tolerance Analysis Using Fuzzy Sets, International Journal of Systems Science 7(12), 1393-1401.

[187] Jiménez, M., Bilbao, A., 2009. Pareto-optimal Solutions in Fuzzy Multi-objective Linear Programming, Fuzzy Sets and Systems 160, 2714-2721.

[188] Kacprzyk, J., Esogbue, A. O., 1996. Fuzzy Dynamic Programming: Main Developments and Applications, Fuzzy Sets and Systems 81, 31-45.

[189] Kahraman, C., Ruan, D., Dogan, I., 2003. Fuzzy Group Decision-making for Facility Location Selection, Information Sciences 157, 135-153.

[190] Kamel, M. S., Selim, S. Z., 1991. A Threshold Fuzzy C-means Algorithm for Semifuzzy Clustering, Pattern Recognition 24, 825-833.

[191] Kandel, A., 1982. Fuzzy Techniques in Pattern Recognition, John Wiley, New York.

[192] Kandel, A., 1991. Fuzzy Expert System. CRC Press, Boca Raton, Florida.

[193] Kandel, A., Peng, X. T., Cao, Z. Q., Wang, P. Z., 1990. Representation of Concepts by Factor Spaces, Cybernetics and Systems 21, 43-57.

[194] Karnik, N. N., Mendel, J. M., 2001. Operations on type-2 fuzzy sets, Fuzzy Sets and Systems 122, 327-348.

[195] Kaufmann, A., 1975a. Introduction to the Theory of Fuzzy Subsets, Vol. I. New York, San Francisco, London.

[196] Kaufmann, A., 1975b. Fuzzy Mathematical Models in Engineering and Management Science, Amsterdam, New York.

[197] Kaufmann, A., Gupta, M. M., 1988. Fuzzy Mathematical Models in Engineering and Management Science, North-Holland, Amsterdam.

[198] Kawahara, Y., Furusawa, H., 1999. An Algebraic Formalization of Fuzzy Relations, Fuzzy Sets and Systems 101, 125-135.

[199] Kehagias, A., Konstantinidou, M., 2003. L-fuzzy Valued Inclusion Measure, L-fuzzy Similarity and L-fuzzy Distance, Fuzzy Sets and Systems 136, 313-332.

[200] Keller, J. M., and Qin, H., 1985. Fuzzy Set Methods in Pattern Recognition, IEEE Trans. On Systems, Man and Cybernetics, 15(4), 580-585.

[201] Kenevan, J. R., Neapolitan, R. E., 1992. A Model Theoretic Approach to Propositional Fuzzy Logic Using Beth Tableau, In: Zadeh, L., Kacprzyk, J. (Eds.), Fuzzy Logic for the Management of Uncertainty, Wiley, New York, NY, 141-157.

[202] Khare, M. 1999. Fuzzy σ-algebras and Conditional Entropy. Fuzzy Sets and Systems 102, 287-292.

[203] Khatibi, V., Montazer, G. A., 2009. Intuitionistic Fuzzy Set vs. Fuzzy Set Application in Medical Pattern Recognition, Artificial Intelligence in Medicine 47, 43-52.

[204] Kim, B., Bishu, R. R., 1998. Evaluation of Fuzzy Linear Regression Models by Comparison Membership Function, Fuzzy Sets and Systems 100, 343-352.

[205] Kim, K. H. and Roush, F. W., 1980. Generalized Fuzzy Matrix, Fuzzy Sets and Systems 4, 293-315.

[206] Kim, Y. K. and Ghil, B. M. 1997. Integrals of Fuzzy Number-valued Functions, Fuzzy Sets and Systems 86, 213-222.

[207] Kitainik, L., 1993. Fuzzy Decision Procedures with Binary Relations, Kluwer, Dordrecht.

[208] Klement, E. P., 1982. Construction of Fuzzy σ-algebras Using Triangular Norms, J. Math. Anal. Appl. 85, 543-565.

[209] Klement, E. P., Mesiar, R., Pap, E., 2004a. Triangular Norms. Position Paper I: Basic Analytical and Algebraic Properties, Fuzzy Sets and Systems 143, 5-26.

[210] Klement, E. P., Mesiar, R., Pap, E., 2004b. Triangular Norms. Position Paper II: General Constructions and Parameterized Families, Fuzzy Sets and Systems 145, 411-438.

[211] Klement, E. P., Mesiar, R., Pap, E., 2004c. Triangular Norms. Position Paper III: Continuous t-norms, Fuzzy Sets and Systems 145, 439-454.

[212] Klir, G. J., Folger, T. A., 1988. Fuzzy Sets, Uncertainty, and Information, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.

[213] Klir, G. J., Wang, Z. Y., Harmanec, D. 1997. Constructing Fuzzy Measures in Exert System, Fuzzy Sets and Systems 92, 251-264.

[214] Klir, G. J., Yuan, B., 1991. Fuzzy Sets and Fuzzy Logic, Prentice-

Hall, Englewood Cliffs, NJ.

[215] Klir, G. J. , Yuan, B. , 1995. Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications, Pretice-Hall, Upper Saddle River, NJ.

[216] Kondo, M. , 2006. On the Structure of Generalized Rough Sets, Information Sciences 176, 589-600.

[217] Kortelainen, J. , 1997. Modifiers connect L-fuzzy sets to topological spaces, Fuzzy Sets and Systems 89, 267-273.

[218] Kundu, S. , 1995. Defining the Fuzzy Spatial Relationship Left(A,B), Proc. Internat. Conf. on Fuzzy Sets and Applications, IFSA- 95, Brazil.

[219] Laarhoven, P. J. M. , Pedrycz, W. , 1983. A Fuzzy Extension of Saaty's Priority Theory, Fuzzy Sets and Systems 11, 229-241.

[220] Lai, Y. J. , Chang, S. I. , 1994. A Fuzzy Approach to Multipersone Optimization: An Off-line Quality Engineering Problem, Fuzzy Sets and Systems 63, 117-129.

[221] Lee, C. S, Wen, C. G. 1997. Fuzzy Goal Programming Approach for Water Quality Management in a River Basin, Fuzzy Sets and Systems 89, 181-192.

[222] Lee, E. T. , 1972. Proximity Measure for the Classification for the Geometric, J. Cybern. , 43-59.

[223] Lee, E. T. , Zadeh, L. A. , 1969. Note on Fuzzy Languages, Inform. SCI. 1, 421-434.

[224] Lee, H. -S. , 2002. Optimal Consensus of Fuzzy Opinions Under Group Decision Making Environment, Fuzzy Sets and Systems 132, 303-315.

[225] Li, D. F. , Cheng, C. T. , 2002. New Similarity Measures of Intuitionistic Fuzzy Sets and Application to Pattern Recognitions, Pattern Recognition Letters 23, 221-225.

[226] Li, G. , Fang, S. -C. , 1998. Solving Interval-valued Fuzzy Relation Equations, IEEE Transactions on Fuzzy Systems 6, 321-324.

[227] Li, H. , 1986. Multifactorial Fuzzy Sets and Multifactorial Fuzzy Degree of Nearness, Fuzzy Sets and Systems 19, 291-297.

[228] Li, H. , 1989. Fuzzy Clustering Methods Based on Perturbation, Fuzzy Sets and Systems 33, 291-302.

[229] Li, H. , 1990. Multifactorial Functions in Fuzzy Sets Theory, Fuzzy

Sets and Systems 35, 68-84.

[230] Li, H., Huang L., Yeh, V., 1993. Factor Spaces and Fuzzy Decision-making, Proceedings of First Asian Fuzzy Symposium, Singapore, 484-491.

[231] Li, H.-X., Li, L.-X., Wang, J.-Y., Mo, Z.-W., Li, Y.-D., 2004. Fuzzy Decision Making Based on Variable Weights, Mathematical and Computer Modelling 39, 163-179.

[232]Li, H., Phillip Chen, C. L., Yen, V. C., Lee, E. S., 2000. Factor Spaces Theory and Its Applications to Fuzzy Information Processing: Two Kinds of Factor Space Canes, Computers & Mathematics with Applications 40, 835-843.

[233] Li, H., Phillip Chen, C. L., Lee, E. S., 2000. Factor Space Theory and Fuzzy Information Processing—Fuzzy Decision Making Based on the Concepts of Feedback Extension, Computers & Mathematics with Applications 40, 845-864.

[234] Li, H., Wang, P., Yen, V. C., 1998. Factor Spaces Theory and Its Applications to Fuzzy Information Processing. (I). The basics of factor spaces, Fuzzy Sets and Systems 95, 147-160.

[235] Li, H., Yen, V. C., Lee, E. S., 2000. Factor Space Theory in Fuzzy Information Processing—Composition of States of Factors and Multifactorial Decision Making, Computers & Mathematics with Applications 39, 245-265.

[236] Li, J. X., 1994. Convergence of Powers of Controllable Fuzzy Matrix, Fuzzy Sets and Systems 62, 83-99.

[237] Li, L. and Lai K. K., 2000. A Fuzzy Approach to the Multiobjective Transportation Problem. Computer & Operation Research 27, 43-57.

[238] Li, R. and Lee, E. S., 1990. Fuzzy Approaches to Multicriteria de Novo Programs, J. Mathematical Analysis and Applications 153, 97-111.

[239] Li., R. P., Mukaidino, M., 1995. A Maximum Entropy Approach to Fuzzy Clustering, IEEEFUZZ'95, 2227-2232.

[240] Li, S.-M., Lo, S.-L., Hu, C.-Y., 2003. Application of Two-stage Fuzzy Set Theory to River Quality Evaluation in Taiwan, Water Research 37, 1406-1416.

[241] Li, S.-T., Kuo, S.-C., Cheng, Y.-C., Chen, C.-C., 2009. Deterministic Vector Long-term Forecasting for Fuzzy Time Series, Fuzzy Sets and Systems, doi:10.1016/j.fss.2009.10.028.

[242] Li, X, and Liu, B., 2006. A Sufficient and Necessary Condition for Credibility Measures, International Journal of Uncertainty, Fuzziness & Knowledge-Based Systems 14, 527-535.

[243] Liang, T.-F., 2006. Distribution Planning Decisions Using Interactive Fuzzy Multi-objective Linear Programming, Fuzzy Sets and Systems 157, 1303-1316.

[244] Liang, Z., Shi, P., 2003. Similarity Measures on Intuitionistic Fuzzy Numbers, Pattern Recognition Letters 24, 2687-2693.

[245] Liaw, J.-N., Kashyap, R. L., 1994. A New Sequential Classifier Using Information Criterion Window, Pattern Recognition 27, 1423-1438.

[246] Lin, C. T., George Lee, C. S., 1996. Neural Fuzzy Systems: A Neuro-Fuzzy Synergism to Intelligent Systems, Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ.

[247] Lin, J-. L., 2009. On the Relation Between Fuzzy Max-Archimedean t-norm Relational Equations and the Covering Problem, Fuzzy Sets and Systems 160, 2328-2344.

[248] Lin, J.-L., Wu, Y.-K., Chang, P.-C., 2009. Minimizing a Nonlinear Function under a Fuzzy Max-t-norm Relational Equation Constraint, Expert Systems with Applications 36, 11633-11640.

[249] Lin, L., Yuan, X.-H., Xia, Z.-Q., 2007. Multicriteria Fuzzy Decision-making Methods Based on Intuitionistic Fuzzy Sets, Journal of Computer and System Sciences 73, 84-88.

[250] Liu, B., 2004. Uncertainty Theory, Springer-Verlag, Berlin.

[251] Liu, B., 2007. Uncertainty Theory, 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin.

[252] Liu B, 2009. Some Research Problems in Uncertainty Theory, Journal of Uncertain Systems, Vol. 3, No. 1, 3-10.

[253] Liu, B., Liu, Y. K., 2002. Expected Value of Fuzzy Variable and Fuzzy Expected Value Models, IEEE Transactions on Fuzzy Systems 10, 445-450.

[254] Liu, F., Hu B. Q., 2006. Fuzziness in rough fuzzy sets and fuzzy

rough sets,Fuzzy Information and Engineering, 6, 36-51.

[255] Liu, G., 2008. Generalized Rough Sets over Fuzzy Lattices, Information Sciences 178, 1651-1662.

[256] Liu, G., Zhu, W., 2008. The Algebraic Structures of Generalized Rough Set Theory, Information Sciences 178, 4105-4113.

[257] Liu, H-W., 2005. New Similarity Measures Between Intuitionistic Fuzzy Sets and Between Elements, Mathematical and Computer Modelling 42, 61-70.

[258] Liu, H.-W., Wang, G.-J., 2006. A note on implicators based on binary aggregation operators in interval-valued fuzzy set theory, Fuzzy Sets and Systems 157, 3231-3236.

[259] Liu, H.-W., Wang, G.-J., 2007. Multi-criteria decision-making methods based on intuitionistic fuzzy sets, European Journal of Operational Research 179, 220-233.

[260] Liu, X. and Zhang, G. 1994. Lattice-valued Fuzzy Measure and Lattice-valued Fuzzy Integral, Fuzzy Sets and System 62, 319-332.

[261] Liu, Y., Kerre, E. E., 1998. An Overiew of Fuzzy Quantifiers. (II). Reasoning and Applications, Fuzzy Sets and Systems, 95, 135-146.

[262] Loetamonphong, J., Fang, S.-C., 1999. An Efficient Solution Procedure for Fuzzy Relation Equations with Max-product Composition, IEEE Transactions on Fuzzy Systems 7, 441-445.

[263] Loetamonphong, J., Fang, S.-C., 2001. Optimization of Fuzzy Relation Equations with Max-product Composition, Fuzzy Sets and Systems 118, 509-517.

[264] Loetamonphong, J., Fang, S.-C., Yong, R.E., 2002. Multi-objective Optimization Problems with Fuzzy Relation Equation Constrains, Fuzzy Sets and Systems 127, 141-164.

[265] Lu, J., Fang, S.-C., 2001. Solving Nonlinear Optimization Problems with Fuzzy Relation Equations Constraints, Fuzzy Sets and Systems 119, 1-20.

[266] Lu, R.-S., Lo, S.-L., 2002. Diagnosing Reservoir Water Quality Using Self-organizing Maps and Fuzzy Theory, Water Research 36, 2265-2274.

[267] Lu, R.-S., Lo, S.-L., Hu, J.-Y., 1999. Analysis of Reservoir Water

Quality Using Fuzzy Synthetic Evaluation, Stochastic Environ. Res. Risk Assessment 13, 327-336.

[268] Luca, A. D. , Termini, S. , 1972. A Definition of a Non-probabilistic Entropy in the Setting of Fuzzy Set Theory, Information and Control 20, 301-312.

[269] Luhandjula, M. K. , 1986. On Possibilistic Linear Programming, Fuzzy Sets and Systems 18, 15-30.

[270] Luhandjula, M. K. , 1987a. Linear Programming with a Possibilistic Objective Functions, European Journal of Operational Research 31, 110-117.

[271] Luhandjula, M. K. , 1987b. Multiple Objective Programming Problems with Possibilistic Coefficients, Fuzzy Sets and Systems 21, 135-145.

[272] Luo, C. , 1993. Mathematical Description of Factor Spaces Cans, Proceedings of First Asian Fuzzy Symposium, Singapore, 484-491.

[273] Luoh, L. , Wang, W.-J. , Liaw, Y.-K. , 2002. New Algorithms for Solving Fuzzy Relation Equations, Mathematics and Computers in Simulation 59, 329-333.

[274] Lur, Y.-Y. , Wu, Y.-K. , and Guu, S.-M. , 2007. Convergence of Max-arithmetic Mean Powers of a Fuzzy Matrix, Fuzzy Sets and Systems 158, 2516-2522.

[275] Ma, J. , Li, W. , Ruan, D. , Xu, Y. , 2007. Filter-based Resolution Principle for Lattice-valued Propositional Logic LP(X), Information Sciences 177, 1046-1062.

[276] Maeda, T. , 2001. Fuzzy Linear Programming Problems as Bi-criteria Optimization Problems, Applied Mathematics and Computation 120, 109-121.

[277] Mahdavi-Amiri, N. , Nasseri S. H. , 2007. Duality Results and a Dual Simplex Method for Linear Programming Problems with Trapezoidal Fuzzy Variables, Fuzzy Sets and Systems 158, 1961-1978.

[278] Maleki, H. R. , Tata, M. , Mashinchi, M. , 2000. Linear Programming with Fuzzy Variables, Fuzzy Sets and Systems 109, 21-33.

[279] Mamdani, E. H. , 1974. Applications of Fuzzy Algorithms for Control of Simple Dynamic Plant, Proceedings of IEEE, 121(12), 1585-1588.

[280] Martínez, R. , Castillo, O. , Aguilar, L. T. , 2009. Optimization of

Interval Type-2 Fuzzy Logic Controllers for a Perturbed Autonomous Wheeled Mobile Robot Using Genetic Algorithms, Information Sciences 179, 2158-2174.

[281] Mayor, G., and Torrens, J., 1991. On a Family of t-norms, Fuzzy Sets and Systems 41, 161-166.

[282] McDermott, D., Doyle, J., 1980. Non-monotonic Logic, Artificial Intelligence, 13, 41-72.

[283] Medaglia, A. L., Fang, S.-C., Nuttle, H. L. W., Wilson, J. R., 2002. An Efficient and Flexible Mechanism for Constructing Membership Functions, European Journal of Operational Research 139, 84-95.

[284] Medasani, S., Kim, J., Krishnapuram, R., 1998. An Overview of Membership Function Generation Techniques for Pattern Recognition, International Journal of Approximate Reasoning 19, 391-417.

[285] Mendel, J. M., 2007. Advances in Type-2 Fuzzy Sets and System, Information Sciences 177, 84-110.

[286] Mendel, J. M., Wu, H., 2007. New Results about the Centroid of an Interval Type-2 Fuzzy Set, Including the Centroid of a Fuzzy Granule, Information Sciences 177, 360-377.

[287] Méndez, G. M., Hernandez, M. A., 2009. Hybrid Learning for Interval Type-2 Fuzzy Logic Systems Based on Orthogonal Least-squares and Back-propagation Methods, Information Sciences 179, 2146-2157.

[288] Menger, K., 1942. Statisticial Metrices, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 28, 535-537.

[289] Mesiar, R. 1997. Possibility Measures, Integration and Fuzzy Possibility Measures, Fuzzy Sets and Systems 92, 191-196.

[290] Mi, J. S., Zhang, W. X., 2004. An axiomatic characterization of a fuzzy generalization of rough sets, Information Sciences 160, 235-249.

[291] Mikenina, L. and Zimmermann, H.-J. 1999. Improved Feature Selection and Classification by the 2-additive Fuzzy Measure, Fuzzy Sets and Systems 107, 197-218.

[292] Mitchell, H. B., 2003. On the Dengfeng-Chuntian Similarity Measure and its Application to Pattern Recognition, Pattern Recognition Letters

24, 3101-3104.

[293] Miyakoshi, M., Shimbo, M., 1984. Composite Fuzzy Relations with T-norms, Trans. IECE Jpn. J. 67-D, 391-398.

[294] Miyakoshi, M., Shimbo, M., 1985. Solutions of Composite Fuzzy Relational Equations with Triangular Norms, Fuzzy Sets and Systems 16, 53-63.

[295] Miyamoto, S., Ichihashi, H., Honda, K., 2008. Algorithms for Fuzzy Clustering, Studies in Fuzziness and Soft Computing, V. 229, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

[296] Mizumoto, M., 1981, 1982. Fuzzy Sets and Their Operations, Inform. Control 48, 30-48; 50, 160-174.

[297] Mizumoto, M., Tanaka, K., 1976. Some Properties of Fuzzy Sets of Type 2, Information and Control 31, 312-340.

[298] Mizumoto, M., Toyoda, J., Tanaka, K., 1973. *N*-fold Fuzzy Grammars, Information Science 5, 25-43.

[299] Modarres, M., Nasrabadi, E., Nasrabadi, M. M., 2005. Fuzzy Linear Regression Models with Least Square Errors, Applied Mathematics and Computation 163, 977-989.

[300] Modarres, M. and Sadi-Nezhad, S., 2001. Ranking Fuzzy Numbers by Preference Ratio, Fuzzy Sets and Systems 118, 429-436.

[301] Molodtsov, D., 1999. Soft set theory—First results, Computers Math. Applic. 37, 19-31.

[302] Moon, B. S., 1995. Equivalence between Fuzzy Logic Controllers and PI Controllers for Single Input System, Fuzzy Sets and Systems, 69, 105-113.

[303] Moore, R. E., 1979. Method and Application of Interval Analysis, SIAM, Philadelphia.

[304] Mordeson, J. N., Nair, P. S., 2000. Fuzzy Graphs and Fuzzy Hypergraphs, Physica-Verlag, Heidelberg.

[305] Mordeson, J. N., Peng, C.-S., 1994. Operations on Fuzzy Graphs, Information Sciences 79, 159-170.

[306] Morsi, N. N., 1994. Hyperspace Fuzzy Binary Relations, Fuzzy Sets and Systems 67, 221-237.

[307] Murofushi, T., Sugeno, M., 1989. An Interpretation of Fuzzy

Measures and the Choquet Integral with Respect to a Fuzzy Measure, Fuzzy Sets and System 29, 201-227.

[308] Murofushi, T., Sugeno, M., 1991. Fuzzy t-conorm Integral with Respect to Fuzzy Measure: Generalization of Sugeno Integral and Choquet Integral, Fuzzy Sets and Systems 42, 57-71.

[309] Murofushi, T., Sugeno, M. 2000. Fuzzy Measure and Fuzzy Integrals in: Grabisch, T. Murofushi, M. Sugeno (Eds.), Fuzzy Measure and Integrals: Theory and Applications, Springer, Berlin, 3-41.

[310] Murray, T. J., Pipino, L. L., van Gigch, J. P., 1985. A Pilot Study of Fuzzy Set Modification of Delphi, Human Systems Mgmt. 5, 76-80.

[311] Nakahara, Y., 1998. User Oriented Ranking Criteria and its Application to Fuzzy Mathematical Programming Problems, Fuzzy Sets and Systems 94, 275-286.

[312] Nanda, S., Majumdar, S., 1992. Fuzzy Rough Sets, Fuzzy Sets and Systems 45, 157-160.

[313] Nasrabadi, M. M., Nasrabadi, E., 2004. A Mathematical-programming Approach to Fuzzy Linear Regression Analysis, Applied Mathematics and Computation 155, 873-881.

[314] Negoita, C. V., 1981. Fuzzy Systems. Abacus, Tunbridge Wells (U. K.).

[315] Negoita, C. V., Ralescu, D. A., 1975. Applications of Fuzzy Sets to Systems Analysis, Interdisciplinary Systems Research Series, Vol. 11, Birkhäuser, Basel, Stuttgart and Halsted Press, New York.

[316] Nguyen, H. T., 1978. A Note on the Extension Principle for Fuzzy Sets, Journal Mathematics Analysis and Application 64, 369-380.

[317] Nola, D. A., 1985. Relational Equations in Totally Ordered Lattices and their Complete Resolution, J. Math. Appl. 107, 148-155.

[318] Nola, D. A., Pedrycz, W., Sessa, S., 1995. Fuzzy Relational Structures: The State-of-art, Fuzzy Sets and Systems 75, 241-262.

[319] Nola, D. A., Sessa, S., Pedrycz, W., Sanchez, E., 1989. Fuzzy Relation Equations and their Applications to Knowledge Engineering, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London.

[320] Norwich, A. M., Turksen, I. B., 1984. A Model for the Measurement of Membership and the Consequences of Its Empirical Implementation,

Fuzzy Sets and Systems 12, 1-25.

[321] Novak, V., Perlilieva, L., Mockor, J., 1999. Mathematical Principles of Fuzzy Logic, Kluwer, Dordrecht.

[322] Oliveira, C., Antunes, C. H., 2007. Multiple Objective Linear Programming Models with Interval Coefficients-an Illustrated Overview, European Journal of Operational Research 181, 1434-1463.

[323] Onisawa, T., Sugeno, M., Nishiwaki, Y., Kawai, H. and Harima, Y., 1986. Fuzzy Measure Analysis of Public Attitude towards the Use of Nuclear Energy, Fuzzy Sets and Systems 20, 259-289.

[324] Pal, S. K., 2001. Fuzzy Image Processing and Recognition: Uncertainty Handling and Applications, Internat. J. Image Graphics 1, 169-195.

[325] Pal, S., and King, R., 1980. Image Enhance Using Fuzzy Sets, Electron Lett. 16, 376-378.

[326] Pal, S. K., and Majumder, D. D., 1986. Fuzzy Mathematical Approach to Pattern Recognition, John Wiley & Sons, New York.

[327] Pan, N.-F., Lin, T.-C., Pan, N.-H., 2009. Estimating Bridge Performance Based on a Matrix-driven Fuzzy Linear Regression Model, Automation in Construction 18, 578-586.

[328] Pappis, C. P., Karacapilidis, N. I., 1993. A Comparative Assessment of Measures of Similarity of Fuzzy Values, Fuzzy Sets and Systems 56, 171-174.

[329] Pappis, C. P., Sugeno, M., 1985. Fuzzy Relational Equations and the Inverse Problem, Fuzzy Sets and Systems 15, 79-90.

[330] Patyra, M. J. and Kwon, T. M., 1995. A Degenerated Fuzzy-number Processing System Based on Artificial Neural Networks, Information Sciences 86, 211-226.

[331] Pawlak, Z., 1982. Rough Sets, Internat. J. Information Science 11 (5), 341-356.

[332] Pawlak, Z., 1985. Rough Sets and Fuzzy Sets, Fuzzy Sets and Systems 17, 99-102.

[333] Pedrycz, W., 1982a. Fuzzy Relational Equations with Triangular Norms and Their Resolutions, Busefal 11, 24-32.

[334] Pedrycz, W., 1982b. Some Aspects of Fuzzy Decision-making,

Kybernetes 11, 297-301.

[335] Pedrycz, W., 1983. Fuzzy Relational Equations with Generalized Connectives and Their Applications, Fuzzy Sets and Systems 10, 185-201.

[336] Pedrycz, W., 1984. Identification in Fuzzy Systems, IEEE Trans. Systems Man Cybernet. 14, 361-366.

[337] Pedrycz, W., 1989. Fuzzy Control and Fuzzy Systems, Wiley/Research Studies Press, London, New York.

[338] Pedrycz, W., 1991. Processing in Relational Structures: Fuzzy relational equations, Fuzzy Sets and Systems 40, 77-106.

[339] Pedrycz, W., 1995. Genetic Algorithms for Learning in Fuzzy Relational Structures, Fuzzy Sets and Systems 69, 37-52.

[340] Pedrycz, W., 1997. Fuzzy Sets in Pattern Recognition: Accomplishments and Challenges, Fuzzy Sets and Systems 90, 171-176.

[341] Pedrycz, W., Gomide, F., 1998. An Introduction to Fuzzy Sets Analysis and Design, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, London, English.

[342] Pedrycz, W., Loia, V., Senatore S., 2004. P-FCM: A Proximity—Based Fuzzy Clustering, Fuzzy Sets and Systems 148, 21-41.

[343] Peeva, K., Kyosev, Y., 2007. Algorithm for Solving Max-product Fuzzy Relational Equations, Soft Computing 11, 593-605.

[344] Peng, Z., Sun, Y., 1998. F-propositional Calculus and a Kind of F-control Model on the Basis of Complemented t-norm, Fuzzy Sets and Systems 93, 247-256.

[345] Peters, G., 1994. Fuzzy Linear Regression with Fuzzy Intervals, Fuzzy Sets and Systems 63, 45-55.

[346] Prevot, M., 1981. Algorithm for the Solution of Fuzzy Relations Equations, Fuzzy Sets and Systems 5, 319-322.

[347] Qiao, Z. 1990a. On Fuzzy Measure and Fuzzy Integral on Fuzzy Sets, Fuzzy Sets and Systems 37, 77-92.

[348]Qiao, Z., 1990b. Fuzzy Integrals on L-fuzzy Sets, Fuzzy Sets and Systems 38, 61-79.

[349] Qiu, D., 2006. Pumping Lemma in Dutomata Theory Based on Complete Residuated Lattice-valued Logic: A Note, Fuzzy Sets and

Systems 157, 2128-2138.

[350] Qu, X.-B, Wang, X.-P., 2007. Some Properties of Infinite Fuzzy Relational Equations on Complete Brouwerian Lattices, Fuzzy Sets and Systems 158, 1327-1339.

[351] Radzikowska, A. M., and Kerre, E. E., 2002. A Comparative Study of Fuzzy Rough Sets, Fuzzy Sets and Systems 126, 137-155.

[352] Ralescu, D. 1995. Cardinality, Quantifiers and the Aggregation of Fuzzy Criteria, Fuzzy Sets and Systems 69, 355-365.

[353] Ralescu, D., Adams, G. 1980. The Fuzzy Integral. J. Math. Anal. Appl. 75, 562-570.

[354] Ramík, J., 2006. Duality in Fuzzy Linear Programming with Possibility and Necessity Relations, Fuzzy Sets and Systems 157, 1283-1302.

[355] Ramik, J., and Rimanek, J., 1985. Inequality Relation between Fuzzy Number and Its Use in Fuzzy Optimization, Fuzzy Sets and Systems 16, 123-138.

[356] Rao, S. S., Sundaraju, K., and Prakash, B. G. et al, 1992. Fuzzy Goal Programming Approach for Structure Optimization, AIAA J. 30, 1425-1432.

[357] Reddy, P., Babu, M., 1992. Some Methods of Reasoning for Fuzzy Conditional Propositions, Fuzzy Sets and Systems, 52, 229-250.

[358] Requena, I., Blanco, A., Delgado, M. and Versegay, J. L., 1995. A Decision Personal Index of Fuzzy Number Based on Neural Networks, Fuzzy Sets and Systems 73, 185-199.

[359] Rescher, N., 1996. Many-valued Logic, McGraw-Hill, New York.

[360] Riecan, B., Neubrunn, T. 1997. Integral, Measure, and Ordering, Kluwer Academic Publishers.

[361] Roger, J.-C., Sun, C.-T., Mizutani, E., 1997. Neuro-Fuzzy and Soft Computing: A Computational Approach to Learning and Machine Intelligence, Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ.

[362] Rommelfanger, H., Hanscheck, R. and Wolf, J., 1989. Linear Programming with Fuzzy Objectives, Fuzzy Sets and Systems 29, 31-48.

[363] Rosenfeld, A., 1975. Fuzzy Graphs, In: Zadeh et al., 77-95.

[364] Ross, T. J., 1995. Fuzzy Logic with Engineering Applications,

McGraw-Hill Companies, Inc.

[365] Ruspini, E. H., 1969. A New Approach to Clustering. Inf. Cont. 15, 22-32.

[366] Ryzin, J., 1977. Classification and Clustering, Academic Press, New York.

[367] Sakawa, M., amd Kato, K., 1997. Interactive Decision Making for Large-scale Multiobjective Linear Programs with Fuzzy Number, Fuzzy Sets and Systems 88, 161-172.

[368] Sakawa, M. and Kato, K., 1998. An Interactive Fuzzy Satisfying Method for Structured Multiobjective Linear Fractional Programs with Fuzzy Numbers, European Journal of Operational Research 107, 575-589.

[369] Sakawa, M., Sawada, K. and Inuiguchi, M., 1995. A Fuzzy Satisfying Method for Large-scale Linear Programming Problems with Block Angular Structure, European Journal of Operational Research 81, 399-409.

[370] Sambuc, R., 1975. Functions ϕ-flous, Aplication a l'aide au Diagnostic en Pathologie Thyroidienne, Ph. D. Thèse, Universite de Marseille, France.

[371] Sanchez, E., 1976. Resolution of Composite Fuzzy Relation Equation, Informational and Control 30, 38-48.

[372] Sanchez, E., 1979. Compositions of Fuzzy Relations, in: M. M. Gupta, R. K. Ragade, R. R. Yager (Eds.), Advances in Fuzzy Set Theory and Applications, North-Holland, Amsterdam, 421-433.

[373] Sánchez, J. A., 2006. Calculating Insurance Claim Reserves with Fuzzy Regression, Fuzzy Sets and Systems 157, 3091-3108.

[374] Schmucker, K. J., 1984. Fuzzy Sets, Natural Language Computations, and Risk Analysis, Computer Science Press, Rockville, Maryland.

[375] Selim, S. Z., Ismail, M. A., 1984. Soft Clustering of Multidimensional Data: A Semifuzzy Approach, Pattern Recognition 17, 559-568.

[376] Sengupta, T. and Pal, T. K., 2000. On Comparing Interval Numbers, European Journal of Operational Research 127, 28-43.

[377] Šešelja, B., Tepavcevic, A., 1995. Partially Ordered and Relational Valued Fuzzy Relations I, Fuzzy Sets and Systems 72, 205-213.

[378] Sessa, S., 1984. Some Results in the Setting of Fuzzy Relation Equation Theory, Fuzzy Sets and Systems 14, 281-297.

[379] Shastri, L., 1994. Guest Editor's Introduction, IEEE Transactions. On Expert, 9(4), 2.

[380] Shang, X.-G., Jiang, W.-S., 1997. Note on Fuzzy Information Measures, Pattern Recognition Letters 18, 425-432.

[381] She, Y.-H., Wang, G.-J., 2009. An Axiomatic Approach of Fuzzy Rough Sets Based on Residuated Lattices, Computers and Mathematics with Applications 58, 189-201.

[382] Shieh, B.-S., 2007. Solutions of Fuzzy Relation Equations Based on Continuous t-norms, Information Sciences 177, 4208-4215.

[383] Shukhat, B., 1995. Fuzzy Patterns Recognition, Proc. ISUMA-NAFIPS'95, College Park, MD, USA, 17-20 September, 788-791.

[384] Shukhat, B., 1996. Labels Evaluation for the Fuzzy Patterns Recognition, Proc. NAFIPS'96, Berkeley, CA, USA, 19-22 June, 405-409.

[385] Shukhat, B., 1998. Supervised Fuzzy Pattern Recognition, Fuzzy Sets and Systems 100, 257-265.

[386] Siler, W., Ying, H., 1989. Fuzzy Control Theory: the Linear Case, Fuzzy Sets and Systems 33, 275-290.

[387] Singh, S. R., 2007. A Simple Method of Forecasting Based on Fuzzy Time Series, Applied Mathematics and Computation 186, 330-339.

[388] Singh, S. R., 2008. A Computational Method of Forecasting Based on Fuzzy Time Series, Mathematics and Computers in Simulation 79, 539-554.

[389] Singh, S. R., 2009. A Computational Method of Forecasting Based on High-order Fuzzy Time Series, Expert Systems with Applications 36, 10551-10559.

[390] Siy P., and Chen C. C., 1974. Fuzzy Logic for Handwritten Numerical Character Recognition, IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics 6, 570-575.

[391] Slowinski, R. 1986. A Multicriteria Fuzzy Linear Programming Method for Water Supply System Development Planning, Fuzzy Sets and Systems 19, 217-237.

[392] Song, Q. , Chissom, B. S. , 1993a. Fuzzy Time Series and Its Models, Fuzzy Sets and Systems 54, 269-277.

[393] Song, Q. , Chissom, B. S. , 1993b. Forecasting Enrollments with Fuzzy Times Series-part I, Fuzzy Sets and Systems 54, 1-9.

[394] Song, Q. , Chissom, B. S. , 1994. Forecasting Enrollments with Fuzzy Times Series-part II, Fuzzy Sets and Systems 62, 1-8.

[395] Song, Q. , Leland, R. P. , Chissom, B. S. , 1995. A New Fuzzy Time-series Model of Fuzzy Number Observations, Fuzzy Sets and Systems 73, 341-348.

[396] Song, Q. , Leland, R. P. , Chissom, B. S. , 1997. Fuzzy Stochastic Fuzzy Time Series and Its Models, Fuzzy Sets and Systems 88, 333-341.

[397] Soyster, A. L. , 1979. Inexact Linear Programming with Generalized Resource Sets, European Journal of Operational Research 3, 316-321.

[398] Special Issue on Modern Fuzzy Control, Fuzzy Sets and Systems 70(2-3), 1995.

[399] Special Issue on Fuzzy Control, Fuzzy Sets and Systems 71(1), 1995.

[400] Special Issue on Fuzzy Arithmetic, Fuzzy Sets and Systems 91, 1997.

[401] Srivastava, P. , Khare, M. and Srivastava, Y. K. , 2001. M-equivalence, Entropy and F-dynamical Systems, Fuzzy Sets and Systems 121, 275-283.

[402] Stamou, G. B. , Tzafestas, S. G. , 2001. Resolution of Composite Fuzzy Relation Equations Based on Archimedean Triangular Norms, Fuzzy Sets and Systems 120, 395-407.

[403] Stojakovic, M. 1994. Fuzzy Valued Measures. Fuzzy Sets and Systems 65, 95-104.

[404] Sugeno, M. 1974. Theory of Fuzzy Integrals and Its applications, Ph. D. Dissertation, Tokyo Institute of Technology.

[405] Sugeno, M. , Murofushi, T. , 1987. Pseudo-additive Measures and Integrals, J. Math. Anal. Appl. 122, 197-222.

[406] Sun, J. , Ge, P. , Liu, Z. , 2001. Two-grade Fuzzy Synthetic Decision-making System with Use of an Analytic Hierarchy Process for Performance Evaluation of Grinding Fluids, Tribology International 34, 683-688.

[407] Sun, B., Gong, Z., Chen, D., 2008. Fuzzy Rough Set Theory for the Interval-valued Fuzzy Information Systems, Information Sciences 178, 2794-2815.

[408] Suzuki, H. 1988. On Fuzzy Measures Defined by Fuzzy Integrals, Journal of Mathematical Analysis and Applications 132, 87-101.

[409] Szmidt, E., Kacprzyk, J., 2001a. Entropy of Intuitionistic Fuzzy Sets, Fuzzy Sets Systems 118, 467-477.

[410] Szmidt, E., Kacprzyk, J., 2001b. Intuitionistic Fuzzy Sets in Intelligent Data Analysis for Medical Diagnosis. In: Alexandrov, V. N., Dongarra, J. J., Juliano, B. A., Renner, R. S., Tan, C. J. K. (Eds.), ICCS 2001, Vol. LNCS 2074. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 263-271.

[411] Szmidt, E., Kacprzyk, J., 2001c. Intuitionistic Fuzzy Sets in Some Medical Applications. In: Reusch, B. (Ed.), Fuzzy Days 2001, Vol. LNCS 2206. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 148-151.

[412] Szmidt, E., Kacprzyk, J., 2004a. A Similarity Measure for Intuitionistic Fuzzy Sets and its Application in Supporting Medical Diagnostic Reasoning. In: Rutkowski, L., Siekmann, J. H., Tadeusiewicz, R., Zadeh, L. A. (Eds.), ICAISC 2004, Vol. LNAI 3070. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 388-393.

[413] Szmidt, E., Kacprzyk, J., 2004b. Similarity of Intuitionistic fuzzy sets and the Jaccard coefficient. In: Proc. of the 10th Int. Conf. IPMU 2004. 1405-1412

[414] Tahani, H. and Keller, J. M., 1990. Information Fusion on Computer Vision Using the Fuzzy Integral, IEEE Trans. System Man Cybernet 20, 733-741.

[415] Tamura, S., Higuchi, S., Tanaka, K., 1971. Pattern Classification Based on Fuzzy Relations, IEEE SMC, 1, 217-242.

[416] Tanaka, H., 1987. Fuzzy Data Analysis by Possibility Linear Models, Fuzzy Sets and Systems 24, 363-375.

[417] Tanaka, H., and Asai, K., 1984. Fuzzy Linear Programming with Fuzzy Numbers, Fuzzy Sets and Systems 13, 1-10.

[418] Tanaka, H., and Hayashi, I., 1989. Possibilistic Linear Regression Analysis for Fuzzy Data, European Journal of Operations Research

40, 389-396.

[419] Tanaka, H., and Ishibuchi, H., 1991. Identification of Possibilistic Linear Systems by Quadratic Membership Functions of Fuzzy Parameters, Fuzzy Sets and Systems 41, 145-160.

[420] Tanaka, H., Ishibuchi, H., and Asai, K., 1984. A Formulation of Fuzzy Linear Programming Based on Comparison of Fuzzy Numbers, Control and Cybernet 13, 185-194.

[421] Tanaka, H., Ishibuchi, H., and Yoshikawa, S., 1995. Exponential Possibility Regression Analysis, Fuzzy Sets and Systems 69, 305-318.

[422] Tanaka, K. and Sugeno, M. 1991. A Study on Subjective Evaluation of Color Printing Images, International Journal of Approximate Reasoning 5, 213-222.

[423] Tanaka, H., Uejima, S., Asai, K., 1982. Linear Regression Analysis with Fuzzy Model, IEEE Trans. Systems Man Cybernet 12, 903-907.

[424] Thomason, M. G., 1977. Convergence of the Powers of a Fuzzy Matrix, J. Math. Anal. Appl. 5, 476-480.

[425] Tizhoosh, H. R., 1997. Fuzzy Image Processing—Introduction in Theory and Practice, Springer.

[426] Tizhoosh, H. R., 2005. Image Thresholding Using Type II Fuzzy Sets. Pattern Recognition 38, 2363-2372.

[427] Trauwaert, E., Kaufman, L., and Rousseeuw, P., 1991. Fuzzy Clustering Algorithms Based on the Maximum Likelihood Principle, Fuzzy Sets and System 85, 213-227.

[428] Tsaur, R. C., Wang, H. F., Yang, J.-C. O., 2002. Fuzzy Regression for Seasonal Time Series Analysis, International Journal of Information Technology and Decision Making 1, 165-175.

[429] Tseng, F.-M., Tzeng, G.-H., 2002. A Fuzzy Seasonal ARIMA Model for Forecasting, Fuzzy Sets and Systems 126, 367-376.

[430] Türksen, I. B., 1983. Inference Regions for Fuzzy Proposition, in: P. P. Wang (Ed.), Fuzzy Set Theory and Applications, Plenum Press, New York, 137-148.

[431] Türksen, I. B., 1984. Fuzzy Representations and Inference with Normal Forms, in: J. Kacprzyk, R. R. Yager (Eds.), Management Decision Support Systems Using Fuzzy Sets and Possibility

Theory, Verlag.

[432] Türksen, I. B., 1986. Interval-valued Fuzzy Sets Based on Normal Form, Fuzzy Sets and Systems 20, 191-210.

[433] Türksen, I. B., 1991. Measurement of Membership Functions and their Acquisition, Fuzzy Sets and Systems 40, 5-38.

[434] Vlachos, I. K., Sergiadis, G. D., 2007a. Intuitionistic Fuzzy Information-Applications to Pattern Recognition, Pattern Recognition Letters 28, 197-206.

[435] Vlachos, I. K., Sergiadis, G. D., 2007b. Subsethood, Entropy, and Cardinality for Interval-valued Fuzzy Sets—An Algebraic Derivation, Fuzzy Sets and Systems 158, 1384-1396.

[436] Wang, F., 2000. A Fuzzy Grammar and Possibility Theory-based Natural Language User Interface for Spatial Queries, Fuzzy Sets and Systems 113, 147-159.

[437] Wang, H.-F. and Wang, M.-L., 1997. A Fuzzy Multiobjective Linear Programming, Fuzzy Sets and Systems 86, 61-72.

[438] Wang, M., Chen, B., Dai, S-L., 2007. Direct Adaptive Fuzzy Tracking Control for a Class of Perturbed Strict-feedback Nonlinear Systems, Fuzzy Sets and Systems 158, 2655-2670.

[439] Wang, M., Hu, B. Q., Wu, X., Niu, Y. Q., 2009. The Topological and Statistical Analysis of Public Transport Network Based on Fuzzy Clustering,B. Cao, T.-F. Li, C.-Y. Zhang (Eds.): Fuzzy Information and Engineering, Volume 2, Advances in Intelligent and Soft Computing 62, 1183-1191. springerlink. com © pringer-Verlag Berlin Heidelberg.

[440] Wang, P. Z., 1990. A Factor Spaces Approach to Knowledge Representation, Fuzzy Sets and Systems, 36, 113-124.

[441] Wang, P. P., and Chang, S. K. (Eds.)., 1980. Fuzzy Sets—Theory and Applications to Policy Analysis and Information Systems, New York. London, 59-75.

[442] Wang, P. P., and Wang, C. Y., 1980. Experiments on Character Recognition Using Fuzzy Filters, in Wang, P. P. and Chang S. K. (Eds.), Fuzzy Sets Theory and Applications to Policy Analysis and Information Systems, 195-221.

[443] Wang, P. Z., 1993. Factor Spaces and Fuzzy Tables, Proceeding of Fifth International Fuzzy Systems Association World Congress'93 (Seoul), Vol. I, 683-686.

[444] Wang, P. Z., Zhang, D., Sanchez, E., 1991. Latticized Linear Programming and Fuzzy Relation Inequalities, Journal of Mathematical Analysis and Applications 159, 72-87.

[445] Wang, W. F., 1995. A Multi-objective Mathematical Programming Problem with Fuzzy Relation Constraints, J. Multi-Criteria Dec. Anal. 4, 23-35.

[446] Wang X.-P., 2001. Method of Solution to Fuzzy Relation Equations in a Complete Brouwerian Lattice, Fuzzy Sets and Systems 120, 409-414.

[447] Wang, X.-P., Xia, C., 2009. The solution sets of infinite fuzzy relational equations with sup-conjunctor composition on complete distributive lattices Fuzzy Sets and Systems 160, 2989-3006.

[448] Wang, Y., Li, Y., 2009. Approximation of Fuzzy context-free Grammars, Information Sciences 179, 3920-3929.

[449] Wang, Y.-M., Chin, K.-S., 2008. A Linear Goal Programming Priority Method for Fuzzy Analytic Hierarchy Process and its Applications in New Product Screening, International Journal of Approximate Reasoning 49, 451-465.

[450] Wang, Y.-M., Elhag, T. M. S., Hua, Z., 2006. A Modified Fuzzy Logarithmic Least Squares Method for Fuzzy Analytic Hierarchy Process, Fuzzy Sets and Systems 157, 3055-3071.

[451] Wang, Z. 1984. The Auto continuity of Set-function and the Fuzzy Integral, J. Math. Anal. Appl. 99, 195-218.

[452] Wang, Z., 2006. Generating Pseudo-t-norms and Implication Operators, Fuzzy Sets and Systems 157, 398-410.

[453] Wang, Z., Klir, G. J. 1992. Fuzzy Measure Theory, Plenum Press, New York.

[454] Wang, Z., Yang, R., Heng, P.-A., Leung, K.-S., 2006. Real-valued Choquet Integrals with Fuzzy-valued Integrand, Fuzzy Sets and Systems 157, 256-269.

[455] Weber, S., 1983. A General concept of Fuzzy Connectives, Negations and Implications Based on t-norms and t-conorms, Fuzzy Sets and

Systems 11, 115-134.

[456] Wu, C., Ha, M., 1993. Completion of a Fuzzy Measure. J. Fuzzy Math. 1, 295-302.

[457] Wu, C., Wang, S. and Ma, M., 1993, 1995. Generalized Fuzzy Integrals: part 1,3, Fuzzy Sets and Systems 57, 219-226, 70, 75-87.

[458] Wu, C., Zhang, D., Guo, C. and Wu, C., 1998. Fuzzy Number Fuzzy Measures and Fuzzy Integrals. (I). Fuzzy Integrals of Functions with Respect to Fuzzy Number Fuzzy Measures, Fuzzy Sets and Systems 98, 355-360.

[459] Wu, C., Zhang, D., Zhang, B. and Guo, C., 1999. Fuzzy Number Fuzzy Measures and Fuzzy Integrals. (II). Fuzzy Integrals of Fuzzy-valued Functions with Respect to Fuzzy Number Fuzzy Measures on Fuzzy Sets. Fuzzy Sets and Systems 101, 137-141.

[460] Wu, D., Mendel, J. M., 2007. Uncertainty Measures for Interval type-2 Fuzzy Sets, Information Science 177, 5378-5393.

[461] Wu, D., Mendel, J. M., 2008. A Vector Similarity Measure for Linguistic Approximation: Interval Type-2 and Type-1 Fuzzy Sets, Information Sciences 178, 381-402.

[462] Wu, D., Tan, W. W., 2006. Genetic Learning and Performance Evaluation of Interval Type-2 fuzzy Logic Controllers, Engineering Applications of Artificial Intelligence 19, 829-841.

[463] Wu, H., Wang, F., Zhang, X., He, N., 1996. A Model of Inexact Reasoning in Mechanical Design Evaluation, Artificial Intelligence in Engineering 10, 357-362.

[464] Wu, H.-C., 2009. The Karush-Kuhn-Tucker Optimality Conditions in Multiobjective Programming Problems with Interval-valued Objective Functions, European Journal of Operational Research 196, 49-60.

[465] Wu, W. Z., Mi, J. S., Zhang, W. X., 2003. Generalized fuzzy rough sets, Information Sciences 151, 263-282.

[466] Wu, W. Z., Zhang, W. X., 2004. Constructive and axiomatic approaches of fuzzy approximation operators, Information Sciences 159, 233-254.

[467] Wu, Y.-K., Guu, S.-M., 2004. Finding the Complete set of Minimal Solutions for Fuzzy Relational Equations with Max-product

Composition, International Journal of Operations Research 1, 29-36.

[468] Wu, Y.-K., Guu, S.-M., 2005. Minimizing a Linear Function under a Fuzzy Max-min Relational Equation Constraint, Fuzzy Sets and Systems 150, 147-162.

[469] Wu, Y.-K., Guu, S.-M., 2008. An Efficient Procedure for Solving a Fuzzy Relational Equation with Max-Archimedean t-norm Composition, IEEE Transactions on Fuzzy Systems 16, 73-84.

[470] Wu, Y.-K., Guu, S.-M., Liu, J. Y.-C, 2008. Reducing the Search Space of a Linear Fractional Programming Problem under Fuzzy Relational Equations with Max-Archimedean t-norm Composition, Fuzzy Sets and Systems 159, 3347-3359.

[471] Wu, Z., Leathy, R., 1993. An Optimal Graph Theoretic Approach to Data Clustering: Theory and Its Application to Image Segmentation, IEEE PAMI, 15, 1101-1113.

[472] Wygralak, M., 1997. On the Best Scalar Approximation of Cardinality of a Fuzzy Set, Int. J. Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based System 5, 681-687.

[473] Wygralak, M., 2000. An Axiomatic Approach to Scalar Cardinalities of a Fuzzy Set, Fuzzy Sets and Systems 110, 175-176.

[474] Wygralak, M., 2003. Cardinalities of Fuzzy Sets, Springer, Berlin, Heidelberg, New York.

[475] Xia, J. and Hu, B. Q., 1995. The Center Operation of Interval Number and Their Applications, Pro. of Int. Con. On Information & Knowledge Engineering, Dalian Maritime University Publishing House, China: Dalian, 1256-1259.

[476] Xia, J. and Hu, B. Q., 1997. A Grey System Model for Predicting Trend Change of Urban Waste Water Load, J. of Environmental Hydrology 5, 1-10.

[477] Xing, H., Qiu, D., 2009a. Automata Theory Based on Complete Residuated Lattice-valued Logic: A Categorical Approach, Fuzzy Sets and Systems 160, 2416-2428.

[478] Xing, H., Qiu, D., 2009b. Pumping Lemma in Context-free Grammar Theory Based on Complete Residuated Lattice-valued Logic, Fuzzy Sets and Systems 160, 1141-1151.

[479] Xing, H., Qiu, D., Liu, F., 2009. Automata Theory Based on Complete Residuated Lattice-valued Logic: Pushdown Automata, Fuzzy Sets and Systems 160, 1125-1140.

[480] Xu, R., Li, C., 2001. Multidimensional Least-squares Fitting with a Fuzzy Model, Fuzzy Sets and Systems 119, 215-223.

[481] Yager, R. R., 1978. Fuzzy Decision-making Including Unequal Objectives, Fuzzy Sets and Systems 1, 87-95.

[482] Yager, R. R., 1979. On the Measure of Fuzziness and Negation Part I: Membership in the Unit Interval, Int. J. Gen. Syst. 5, 221-229.

[483] Yager, R. R., 1980. On A General Class of Fuzzy Connectives, Fuzzy Sets and Systems 4, 235-242.

[484] Yager, R. R., 1984. A Representation of the Probability of Fuzzy Subsets, Fuzzy Sets and Systems 4, 235-242.

[485] Yager, R. R., 1986. Reasoning with Fuzzy Quantified Statements: Part II, Kybernetes, 15, 111-120.

[486] Yager, R. R., 1988. On Implementing Usual Values, in: J. F. Lemmer et al. (Eds.), Uncertainty in Artificial Intelligence, Vol. 2, Elsevier, Amsterdam, 209-217.

[487] Yager, R. R., 1989. On Usual Values in Commonsense Reasoning, Fuzzy Sets and Systems, 30, 239-255.

[488] Yager, R. R., 1995. Automated Multiagent Preference Aggregation Using Fuzzy Quantifiers, in: Proc. 1st Internat. Conf. on Multiagent Systems.

[489] Yang, M. S., 1993. A Survey of Fuzzy Clustering, Math. Comput. Modelling, 18, 1-16.

[490] Yang, M.-S., Liu, H.-H., 2003. Fuzzy Least-squares Algorithms for Interactive Fuzzy Linear Regression Models, Fuzzy Sets and Systems 135, 305-316.

[491] Yao, J. F.-F. and Yao, J.-S., 2001. Fuzzy Decision Making for Medical Diagnosis Based on Fuzzy Number and Compositional Rule of Inference, Fuzzy Sets and Systems 120, 351-366.

[492] Yao, Y. Y., 1998a. Generalized rough set model, In: Polkowski, L., Skowron, A., (Eds.), Rough Sets in Knowledge Discovery 1. Methodology and Application, Physica-Verlag, 286-318.

[493] Yao, Y. Y., 1998b. Constructive and Algebraic Methods of the Theory of Rough Sets, Information Sciences 109, 21-24.

[494] Yeh, R. T. and Bang, S. Y., 1975. Fuzzy Relations, Fuzzy Graphs and their Applications to Clustering Analysis, In Zadeh et al., 125-150.

[495] Ying, H., 1993. General Analytical Structure of Typical Fuzzy Controllers and their Limiting Structure Theorems, Automatica, 29 (4), 1139-1143.

[496] Ying, H., 1994. Analytical Structure of a Two-input Two-output Fuzzy Controller and its Relation to PI and Multilevel Relay Controllers, Fuzzy Sets and Systems, 63, 21-33.

[497] Ying, H., Siler, W., Buckley, J. J., 1990. Fuzzy Control Theory: A Nonlinear Case, Automatica, 26(3), 513-522.

[498] Yoshida, Y., 1998. A Time-average Fuzzy Reward Criterion in Fuzzy Decision Processes, Information Sciences 110, 103-112.

[499] Yu, H. K., 2005a. A Refined Fuzzy Time-series Model for Forecasting, Physica A 346, 657-681.

[500] Yu, H. K., 2005b. Weighted Fuzzy Time Series Models for TAIEX Forecasting, Physica A 349, 609-624.

[501] Yu, Z.-G., 2001. Fuzzy *L* Languages, Fuzzy Sets and Systems 117, 317-321.

[502] Zadeh, L. A., 1965. Fuzzy Sets, Information and Control 8, 338-353.

[503] Zadeh, L. A., 1968. Probability Measures of Fuzzy Events, Journal of Mathematical Analysis and Applications 23, 421-427.

[504] Zadeh, L. A., 1971. Similarity Relations and Fuzzy Orderings, Information Sciences 3, 177-200.

[505] Zadeh, L. A., 1972. A Fuzzy-set Theoretic Interpretation of Linguistic Hedges, J. Cybern. 2, 4-34.

[506] Zadeh, L. A., 1973a. The Concept of a Linguistic Variable and its Application to Approximate Reasoning, Memorandum ERL-M 411, Berkeley, October 1973.

[507] Zadeh, L. A., 1973b. Outline of a New Approach to the Analysis of Complex Systems and Decision Processes, IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, SMC-1, 28-44.

[508] Zadeh, L. A., 1975. The concept of a linguistic variable and its

applications in approximate reasoning, Information Science, 8: 199-249. 9, 43-80.

[509] Zadeh, L. A. , 1978. Fuzzy Sets as a Basis for a Theory of Possibility, Fuzzy Sets and Systems 1, 3-28.

[510] Zadeh, L. A. , 1979. A Theory of Approximate Reasoning, Machine Intell. 9, 149-194.

[511] Zadeh, L. A. , 1983. A Computational Approach to Fuzzy Quantifiers in Natural Languages, Comput. Math. Appl. 9 (1), 149-184.

[512] Zadeh, L. A. , 1985. Syllogistic Reasoning in Fuzzy Logic and Its Application to Usuality and Reasoning with Dispositions, IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics 15, 754-763.

[513] Zadeh, L. A. , 1987a. A Theory of Approximate Reasoning, in: R. R. Yager et al. (Eds.), Fuzzy Sets and Applications: Selected Paper by L. A. Zadeh, Wiley, New York, 367-412.

[514] Zadeh, L. A. , 1987b. The Role of Fuzzy Logic in the Management of Uncertainty in Expert Systems, in: R. R. Yager et al. (Eds.), Fuzzy Sets and Applications: Selected Paper by L. A. Zadeh, Wiley, New York, 413-441.

[515] Zadeh, L. A. , Fu, K. S. , Tanaka, K. and Shimura, M. (Eds.), 1975. Fuzzy Sets and Their Appplications to Cognitive and Decision Processes, Academic Press, New York, London.

[516]Zeng, W. , Li, H. , 2006. Relationship Between Similarity Measure and Entropy of Interval Valued Fuzzy Sets, Fuzzy Sets and Systems 157, 1477-1484.

[517] Zhang, D. and Guo, C. 1995a. On the Convergence of Sequence of Fuzzy Measures and Generalized Convergence Theorems of Fuzzy Integrals, Fuzzy Sets and Systems 72, 349-356.

[518] Zhang, D. and Guo, C. , 1995b. Generalized Fuzzy Integrals of Set-valued Functions. Fuzzy Sets and Systems 76, 365-373.

[519] Zhang, D. and Wang, Z. , 1993. Fuzzy Integrals of Fuzzy-valued Functions, Fuzzy Sets and Systems 54, 63-67.

[520] Zhang, G. , Wu, Y.-H. , Remias, M. and Lu, J. , 2003. Formulation of Fuzzy Linear Programming Problems as Four-objective Constrained Optimization Problems, Applied Mathematics and Computation 139,

383-399.

[521] Zhang, G. Q. , 1992. The Structural Characteristics of the Fuzzy-valued Fuzzy Measure on the σ-algebra and Their Applications, Fuzzy Sets and Systems 52, 68-81.

[522] Zhang, H.-Y. , Zhang, W.-X. , Wu, W.-Z. , 2009. On Characterization of Generalized Interval-valued Fuzzy Rough Sets on Two Universes of Discourse, International Journal of Approximate Reasoning 51, 56-71.

[523] Zhou, C. and Ruan, D. , 2002. Fuzzy Control Rules Extraction from Perception-based Information Using Computing with Words, Information Sciences 142, 275-290.

[524] Zhou, T. F. , and Liu, D. F. , 1997. Convergence of the Power Sequence of a Nearly Monotone Increasing Fuzzy Matrix, Fuzzy Sets and Systems 88, 363-372.

[525] Zhou, T. F. , and Liu, D. F. , 1998. On the Oscillating Power Sequence of a Fuzzy Matrix, Fuzzy Sets and Systems 93, 75-85.

[526] Zimmermann, H.-J. 1978. Fuzzy Programming and Linear Programming with Several Objective Functions, Fuzzy Sets and Systems 1, 45-55.

[527] Zimmermann, H.-J. , 1987. Fuzzy Sets, Decision Making, and Expert Systems. Kluwer, Boston.

[528] Zimmermann, H.-J. , 2001. Fuzzy Set Theory and Its Applications, Kluwer Academic Publishers, Boston/Dordrecht/London.

[529] Zimmermann, H.-J. , Zysno, P. , 1985. Quantifying Vagueness in Decision Models, European Journal of Operational Research 22, 148-158.

[530] Zkim, L. , 1996. Fuzzy Relation Compositions and Pattern Recognition, Information Science 89, 107-130.

[531] Zwick, R. , Carlstein, E. , Budescu, D. , 1987. Measures of Similarity among Fuzzy Sets: A Comparative Analysis, International Journal of Approximation Reasoning 1, 221-242.

[532] 昌玮,郭清宇. Fuzzy 模式识别在长期天气预报中的应用,模糊数学, 1987, 7(2), 59-64.

[533] 陈启浩. 模糊值及其在模糊推理中的应用,北京:北京师范大学出版社,2000.

[534] 郭桂蓉主编. 模糊模式识别,长沙:国防科技大学出版社,1992.

[535] 郭桂蓉主编. 信息处理中的模糊技术,长沙:国防科技大学出版社,1993.

[536] 郭桂蓉,郁文贤. 雷达目标模糊智能识别,模糊系统与数学,1992,6(2),10-19.

[537] 何 清. 模糊聚类分析理论与应用研究进展,模糊系统与数学,1998,12(2),89-94.

[538] 胡宝清. 格上矩阵的三角分解,武汉水利电力学院学报,1987,1,22-30.

[539] 胡宝清. Sup-T 合成下的广义 Fuzzy 逆矩阵,应用数学,1988 a,1-2,173-176.

[540] 胡宝清. L-F 关系及格阵的广义逆,武汉水利电力学院学报,1988 b,2,109-117.

[541] 黄正华,胡宝清. 模糊粗糙集理论研究进展,模糊系统与数学,2005,19(4),125-134.

[542] 李洪兴. 综合分析,模糊系统与数学,1988,2,9-19.

[543] 李洪兴. 从模糊控制的数学本质看模糊逻辑的成功,模糊系统与数学,1995,9,1-14.

[544] 李洪兴. 模糊控制的数学本质与一类高精度模糊控制器的设计,控制理论与应用,1997,14,868-876.

[545] 李洪兴. 模糊控制的插值机理,中国科学(E 辑),1998,28(3),259-267.

[546] 李荣钧. 模糊多准则决策理论与应用,北京:科学出版社,2002.

[547] 李相镐. 变次 Fuzzy 相似矩阵方程,模糊数学,1984,4,67-72.

[548] 李相镐,李洪兴,陈世权等. 模糊聚类分析及其应用,贵阳:贵州科学技术出版社,1994.

[549] 刘普寅,吴孟达. 模糊理论及其应用,长沙:国防科技大学出版社,1998.

[550] 刘旺金. Fuzzy 对称方阵的可实现问题,模糊数学,1982,2(1),69-76.

[551] 刘叙华. 模糊逻辑与模糊推理,长春:吉林大学出版社,1989.

[552] 罗承忠. 广义 Fuzzy 逆矩阵的求法,模糊数学,1981,1,31-38.

[553] 罗承忠. 扩张原理和 Fuzzy 数,模糊数学,1984a,3,109-116.

[554] 罗承忠. 扩张原理和 Fuzzy 数(II),模糊数学,1984b,4,105-114.

[555] 彭祖赠,胡宝清. 广义 Fuzzy 矩阵的广义逆,武汉水利电力学院学报,1984,1,65-73.

[556] 彭祖赠,孙韫玉. Fuzzy 关系的有补 t-范构造,武汉水利电力学院学报.

1985,3,9-19.

[557] 彭祖赠,孙韫玉. 模糊数学及其应用,武汉:武汉大学出版社, 2002.

[558] 王晓波. 2-型模糊集的分解定理,模糊数学,1983, 3,9-14.

[559] 汪培庄,罗承忠. 有限 Fuzzy 关系方程极小解的个数,模糊数学,1984,4,63-70.

[560] 汪培庄,李洪兴. 模糊系统理论与模糊计算机,北京:科学出版社. 1996.

[561] 叶德明,王晓星. 计算机语言模糊模式识别,模糊系统与数学,1992, 6(2), 125-132.

[562] 应明生. Fuzzy 算子的模糊度,模糊数学,1984, 4,1-6.

[563] 应明生. Fuzzy 命题逻辑中的模糊推理, 模糊系统与数学, 1989, 3(1), 20-27.

[564] 张文修. 模糊数学基础,西安:西安交通大学出版社, 1984.

[565] 张曾科. 模糊数学在自动化技术中的应用,北京:清华大学出版社,1997.

[566] 赵振宇,徐用懋. 模糊理论和神经网络的基础与应用, 北京:清华大学出版社, 南宁: 广西科技出版社, 1996.

[567] 朱学芳,石青云,程民德. 模糊集在手写数字识别中的应用,模糊系统与数学,1996, 10(3), 70-75.

[General Information]
书名=模糊理论基础
作者=胡宝清编著
页数=648
SS号=12632272
DX号=
出版日期=2010.06
出版社=武汉大学出版社